

Comparação e Criação de Diagramas de Antena Phased Array Linear Utilizando Três Métodos Diferentes de Otimização

Bruno Pompeo, Leandro Pralon, João Bosco do Val e Rafael Mendes

Resumo—Aplicações civis e militares que utilizam antenas do tipo *phased array* aumentaram consideravelmente nas últimas décadas. Variando amplitude e fase de cada elemento ativo da antena é possível direcionar, eletronicamente, o feixe principal em frações de segundos. Tal tecnologia permite criar diagramas de radiação seguindo certas restrições relacionadas a máxima potência de pico, lóbulos secundários, largura de 3dB e nulos em direções desejadas. O foco desse trabalho é comparar os resultados obtidos com três diferentes métodos de otimização utilizados na geração de diagramas de radiação de antenas *phased array*. Análise matemática e simulações são utilizadas para avaliar e comparar os métodos considerados.

Palavras-Chave— *phased array*, beamforming, otimização.

Abstract—Phased array antennas have been widely employed in both civilian and military applications in recent decades. Phase and amplitude variations for each active antenna element allow to control beam steering electronically. In addition, antenna pattern with constraints on power peak, sidelobes levels, mainlobe 3dB-width and nulls in given directions can be generated. This paper focuses on a comparison between the results obtained when three distinct optimization methods are applied in order to obtain a given radiation pattern. Mathematical analysis and simulation results are taken into consideration to evaluate and to compare these methods.

Keywords— *phased array*, beamforming, optimization.

I. INTRODUÇÃO

O estudo de antenas *phased array* tem crescido muito nos últimos anos, aumentando o número de aplicações, tanto civis quanto militares que empregam tal tecnologia. Estações de rádio AM e FM, comunicação de sondas espaciais, atividades óticas e acústicas, radares meteorológicos e modernos sistemas de radares militares [1] são exemplos das supracitadas áreas de interesse.

Phased arrays consistem de múltiplos transmissores/receptores coerentemente alimentados cada qual com respectiva fase e amplitude. A multiplicidade de elementos permite um controle mais preciso do diagrama da antena, diminuindo lóbulos secundários além de modelar o seu padrão de formação [2]. No entanto, a razão principal de se utilizar esse tipo de antena é a possibilidade de direcionar o feixe principal de forma eletrônica. Dessa forma, esse é

deslocado em frações de segundos, e principalmente, sem a necessidade do uso de um motor, componente esse, um dos principais responsáveis pelo tempo médio entre falhas de um equipamento.

Cada aplicação exige um tipo de antena *phased arrays* adequada cujo projeto inclui o estudo da geometria mais apropriada e o cálculo das ponderações aplicadas em cada um dos elementos. A geometria do *array* compreende o número de elementos ativos que compõem o sistema, a distância entre eles e a forma como estão dispostos, podendo esta última ser linear, circular, planar, hexagonal, entre outras. Essas características impõem certos limites ao sistema, como exemplo, *arrays* em linha só conseguem varrer um único plano, enquanto que os planares, apesar de varrerem em três dimensões, necessitam de uma quantidade maior de elementos. Sendo assim, percebe-se que a escolha desses parâmetros é feita considerando-se o emprego de determinado sistema, além do custo e limitações físicas impostas pelo projeto.

As ponderações atribuídas a cada elemento estão ligadas diretamente ao diagrama resultante gerado por toda a antena. Essas são compostas por módulo e fase, sendo assim, podem ser descritas como grandezas complexas, possibilitando a modelagem matemática do problema. As limitações existentes acerca dessas variáveis advêm da quantização e precisão existentes em amplificadores/atenuadores e defasadores. Sendo assim, ainda que a otimização seja realizada em termos de algoritmos computacionais, em ordem prática esses efeitos devem ser considerados.

O foco do presente trabalho é fornecer o vetor de ponderações para um *array* linear no plano horizontal de modo que o diagrama total da antena apresente uma forma mais próxima possível de um diagrama pré especificado. Para tal, utiliza-se determinados algoritmos de otimização, sem levar em consideração as quantizações de módulos e fases dos elementos. Três desses algoritmos de otimização foram implementados e simulados e, por fim, os resultados comparados. As teorias utilizadas foram mínimos quadrados [3], mínimos quadrados de magnitude [4,5] e otimização convexa utilizando LMI's (*Linear Matrix Inequalities*) [6].

Na Seção II, uma breve explicação sobre a teoria de *phased array* linear será apresentada, explicando seu funcionamento e deixando claro a importância das ponderações utilizadas em tal sistema. Em seguida, na Seção III, são descritos os três métodos de otimização utilizados, cada qual em uma subseção. A Seção IV traz os resultados das simulações realizadas. Por fim, na Seção V, uma conclusão é tecida acerca dos resultados

Bruno Pompeo, Leandro Pralon, João Bosco do Val e Rafael Mendes, Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial (DCA), Departamento de Telemática (DT), Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), São Paulo-SP, Brasil, Centro Tecnológico do Exército, Rio de Janeiro-RJ, Brasil. E-mails: pompeo@ctex.eb.br, jbosco@dt.fee.unicamp.br, rafael@dca.fee.unicamp.br, pralon@ctex.eb.br.

obtidos através de uma comparação de desempenho e resposta.

II. PHASED ARRAY LINEAR

Um *array* de antena linear geralmente é composto por elementos ativos dispostos em linha e igualmente espaçados de uma distância dx . Essa grandeza é de suma importância para o projeto, pois, não só influencia no diagrama total gerado pela antena, como também está relacionada com o máximo ângulo de visada possível sem que se tenha um indesejável pico em outra direção (*grating lobe*) [8]. Essa relação é mostrada na equação (1).

$$dx = \frac{\lambda}{1 + |\text{sen } \theta|} \quad (1)$$

onde θ é o azimute de um ponto fixo a partir do ângulo normal à antena e λ é o comprimento de onda do sinal emitido/recebido.

Uma vez escolhidos dx e o tipo de antena de cada elemento, o diagrama resultante fornecido pelo *array* segue a equação (2).

$$f(\theta, \phi) = \sum_{i=1}^n D_i w_i * e^{\frac{-j2\pi R_i \cos(\theta) \sin(\phi)}{\lambda}} \quad (2)$$

Onde:

- D_i : Diagrama de cada elemento i
- w_i : Ponderação em módulo e fase de cada elemento i da antena;
- R_i : Distância de um ponto fixo em relação a cada elemento i da antena
- ϕ : Elevação do mesmo ponto fixo a partir do plano horizontal que passa pela reta normal à antena.

No trabalho em questão, a componente de fase referente ao ângulo ϕ pode ser suprimida pois essa é igual em todos os elementos do *array*. Sem perda de generalidade, considere-se, também, que a onda é sempre proveniente de um ponto distante ($R_i \gg \lambda$), podendo assim, ser dita como uma forma planar. Supondo um ângulo azimutal θ , percebe-se que a diferença de fase entre os sinais em cada elemento varia linearmente com dx conforme mostrado na Figura 1.

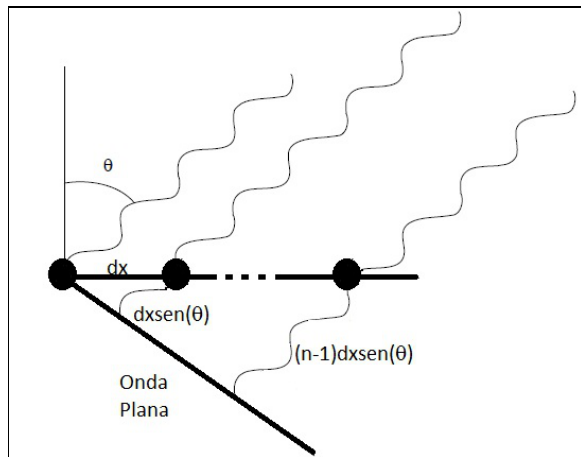


Fig. 1. Onda Planar chegando no array de antena

No intuito de melhor representar a equação (2) para um uso de técnicas de otimização, pode-se rescrevê-la em uma forma matricial indicada na equação (3).

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{w} \quad (3)$$

Onde:

- \mathbf{F} é o diagrama gerado pela antena.
- \mathbf{w} é o vetor ponderação dos elementos de antena.
- \mathbf{A} é a matriz de exponenciais de fases que chegam para cada elemento de antena, onde as colunas são os elementos da antena, de 1 a n , e as linhas os azimutes, de -90° a 90° , dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{-90^\circ,1} & a_{-90^\circ,2} & \dots & a_{-90^\circ,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{90^\circ,1} & a_{90^\circ,2} & \dots & a_{90^\circ,n} \end{bmatrix}$$

Considerando $w_i = \|w_i\| * e^{j\alpha_i}$, deseja-se encontrar os valores de $\|w_i\|$ e α_i que resultem em um diagrama desejado, dado a matriz \mathbf{A} a qual representa a física do sistema. Nesse trabalho foram analisados três métodos para se encontrar a composição do vetor w .

III. ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADOS

Algoritmos de otimização são empregados em problemas que exijam a tomada de decisões de forma a minimizar um determinado esforço requerido ou maximizar algum benefício desejado e que possam ser modelados em função das variáveis de decisão. Esses algoritmos são, então, utilizados a fim de encontrar possíveis condições que forneçam o máximo ou o mínimo valor da referida função [9].

Sendo assim, observa-se que uma das maneiras de se encontrar os valores de fase e amplitude de cada elemento de antena citados na seção anterior, é utilizar métodos dessa natureza. No entanto, é preciso destacar que não existe na literatura um único método que resolva todos os problemas de otimização existentes.

Neste trabalho, os desempenhos de três técnicas serão analisadas. A primeira baseia-se no método dos mínimos quadrados, que é uma abordagem clássica da literatura. O segundo parte da mesma ideia do primeiro, porém devido a algumas modificações impostas, passa a ser uma solução não convexa. Por fim, o último, assim como o primeiro, é um método convexo baseado em restrições, porém não necessita seguir uma função ideal.

A. Mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados minimiza o quadrado da diferença entre os dados calculados e os dados desejados. A função custo desse método [3] é dada pela equação (4).

$$J(\beta) = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n])^2 \quad (4)$$

Onde o estimador de β escolhe os valores calculados, $s[n]$, mais próximos dos valores observados, $x[n]$. O valor de β

que minimiza $J(\beta)$ é o estimador de mínimos quadrados [3], $\hat{\beta}$, e é encontrado através da operação (5).

$$\begin{aligned} s &= H\beta \\ \hat{\beta} &= (H^T H)^{-1} H^T x \end{aligned} \quad (5)$$

Onde, H é a matriz de observação. No presente trabalho, observa-se, a partir das equações (3) e (5), que os valores de w são dados pela equação (6).

$$\hat{w} = (A^T A)^{-1} A^T F \quad (6)$$

1) *Mínimos quadrados Ponderado*: Mínimos quadrados Ponderado é uma extensão do método descrito anteriormente que leva em consideração uma matriz de pesos, P , $n \times n$, definida positiva [3]. Essa matriz enfatiza a contribuição de certas amostras, mais confiáveis, ou provê maior importância a pontos críticos. De posse dessas considerações, a relação (5) é dada pela relação (7)

$$\hat{\beta} = (H^T P H)^{-1} H^T P x \quad (7)$$

B. Mínimos quadrados de magnitude

Como dito anteriormente, o vetor diagrama resultante da antena é formado por números complexos e portanto possui módulo e fase. Todavia, as fases deste não são relevantes, uma vez que não têm influência no ganho de transmissão/recepção. Sendo assim, há, somente, interesse nos valores absolutos desse diagrama, o que não é previsto no método dos mínimos quadrados convencional.

Como alternativa para adequar o método tradicional à nossa aplicação, utiliza-se o método dos mínimos quadrados de magnitude. Ao contrário do primeiro, o problema de otimização com resposta em amplitude desejada (fase desprezada) é não-convexo e, portanto, mais difícil de ser resolvido [4]. Modifica-se a função custo, sendo essa representada por (8)

$$\min_{x \in C} \|A\mathbf{w} - \mathbf{F}\|_2^2 \equiv \min_{w \in C} \sum_{i=1}^n (A_i \mathbf{w} - F_i)^2 \quad (8)$$

Diversos algoritmos para solucionar o problema descrito são apresentados na literatura [5]. O algoritmo utilizado nesse trabalho é descrito, recursivamente, os seguintes passos

- Passo 1: Escolher um valor de tolerância $\epsilon > 0$.
- Passo 2: Escolher um valor inicial aleatório para o vetor w .
- Passo 3: Para todo i , escolher z_i como um complexo de módulo unitário e fase igual a $A_i w$.
- Passo 4: Fixar z e encontrar o novo valor de w que seja solução da análise dos mínimos quadrados dado por: $\|A_i w - z_i F_i\|$
- Passo 5: Repetir os passos 3 e 4 até a função objetivo ser menor do que ϵ ou atingir uma certa quantidade de iterações.

C. Otimização convexa com o uso de LMI

Uma das limitações dos casos abordados anteriormente é a necessidade de se conhecer um diagrama ideal. Em situações onde não se busca máximos/mínimos, mas sim garantia de

transposição de limites pré estabelecidos, uma boa solução é fazer uso de LMI's combinado com um critério de otimização convexa. Nesse trabalho, utiliza-se o critério de mínimo ganho de ruído branco, cuja as inequações [6] são apresentadas em (9)

$$\begin{aligned} &\min_w \|w\| \\ &\text{sujeito a } W^H a(\varphi_0) = val \\ &|W^H a(\varphi_i)|^2 \leq C \quad \varphi_i \in (Az_1, Az_2) \\ &|W^H a(\varphi_j)|^2 \leq D \quad \varphi_j \in (Az_3, Az_4) \\ &\quad \vdots \\ &|W^H a(\varphi_n)|^2 \leq Z \quad \varphi_n \in (Az_{n-1}, Az_n) \end{aligned} \quad (9)$$

Onde val é um valor de máximo pré determinado, $\varphi_i, \varphi_j, \dots, \varphi_n$ são os ângulos azimutais, C, D, \dots, Z são os valores, em módulo, limitantes e Az_1, Az_2, \dots, Az_n são os intervalos azimutais.

IV. SIMULAÇÕES

Nessa seção são apresentados os resultados de três simulações realizadas em Matlab, como o apoio do *toolbox* YALMIP, usando os três métodos de otimização supracitados em cada uma delas. Em todas as simulações foram considerados vinte elementos ativos de antena separados de uma distância de meio comprimento de onda. Como não é foco desse trabalho o estudo de cada elemento, foram consideradas antenas unitárias omnidirecionais.

Primeiramente, foi realizada uma simulação considerando-se que o diagrama total da antena a ser alcançado é factível e, já é de conhecimento dos projetistas. Não obstante, os valores de módulo e fase que deverão alimentar cada elemento de antena são desconhecidos. Utilizou-se um diagrama gerado quando a fase de cada elemento ativo segue uma função linear e os módulos seguem um janelamento de Hamming [7]. Todos os métodos deram como saída o diagrama desejado, porém cada um com determinado erro e tempo de processamento. A Tabela I mostra os erros e tempos gastos nessa primeira simulação.

Em seguida, foi realizada uma simulação considerando-se um diagrama caracterizado somente por um lóbulo principal desejado e valor zero em todos os azimutes fora desse intervalo. Essa simulação foi executada no intuito de analisar um cenário onde somente as características do lóbulo principal são importantes e os lóbulos secundários sejam o menor possível. A Figura 2 mostra os resultados obtidos utilizando os métodos dos mínimos quadrados e dos mínimos quadrados de magnitude, visto que o terceiro método proposto não consegue resolver o problema com essas limitações. A Tabela II mostra os erros e tempos gastos nessa segunda simulação.

Por fim, foi feita uma simulação considerando nulos em determinados azimutes (-15° , 54° e 60°), *sidelobes* em azimutes menores do que o do lóbulo principal limitados a -20dB , *sidelobes* em azimutes maiores do que o do lóbulo principal limitados a -30dB e feixe principal direcionado a 20° . A Figura 3 mostra o resultado alcançado pelo método de otimização convexa utilizando LMI's. O tempo de execução foi de 52s.

TABELA I

TABELA DE ERROS E TEMPOS CONSIDERANDO UM DIAGRAMA DE HAMMING COMO DIAGRAMA IDEAL.

	MQ	MQM	LMI
Tempo (s)	0.099	6.99	67.6
Erro Médio Quadrático	4.3e-8	7e-4	1.2e-5

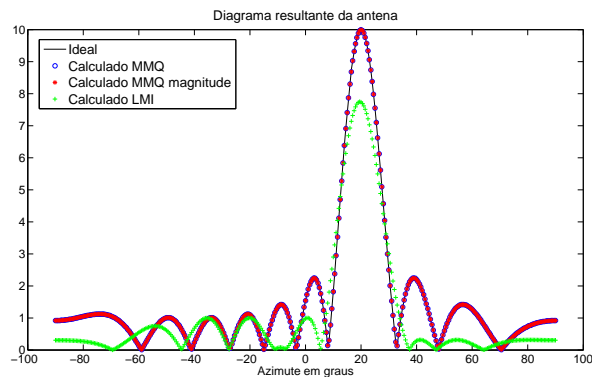


Fig. 2. Diagrama resultante tendo como diagrama ideal um determinado lóbulo principal e lóbulos secundários zeados

TABELA II

TABELA DE ERROS E TEMPOS CONSIDERANDO UM DIAGRAMA DE HAMMING COM SOMENTE O LÓBULO PRINCIPAL COMO DIAGRAMA IDEAL.

	MQ	MQM	LMI
Tempo	1.8e-3	10.18	∞
Erro Médio Quadrático	51.52	1.75	X

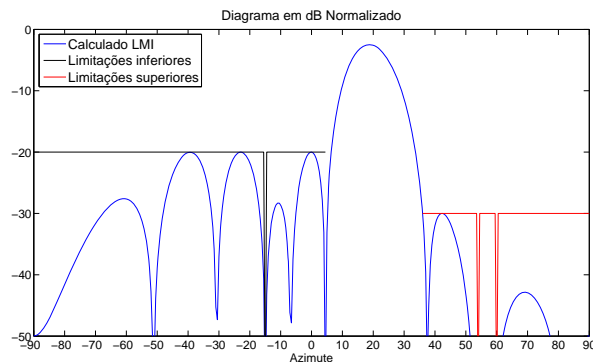


Fig. 3. Diagrama resultante utilizando o método de otimização convexa com o uso de LMI

V. CONCLUSÃO

Neste trabalho foram comparados os desempenhos de três métodos de otimização, aplicados na geração de diagramas de radiação de antenas do tipo *phased array* linear, com base no erro médio quadrático da saída, complexidade computacional e tempo de execução dos mesmos. Para tal, foi proposto um modelo matemático, onde se considerou tanto as ponderações a serem aplicadas, quanto o diagrama gerado, como vetores complexos, com módulo e fase.

Foram objetos de estudo o método clássico de mínimos quadrados (MQ), o método de mínimos quadrados de mag-

nitude (MQM), onde deseja-se otimizar apenas o módulo do vetor diagrama, e o método de otimização convexa com uso de matriz de restrições (LMI's). Analisou-se três distintos cenários onde cada método se sobressai diante dos outros: geração de um diagrama de radiação exequível e conhecido (hamming), geração de um diagrama de radiação com forte restrição e geração de diagrama de radiação que atendesse determinadas restrições de nulos e limitantes superiores nos lóbulos secundários.

No primeiro cenário, o MQ apresenta um desempenho melhor que os demais pois, além de apresentar o menor tempo de execução, consegue encontrar o diagrama com o menor erro médio quadrático (Tabela I). Destaca-se, ainda, que, neste cenário, o método LMI se mostrou inconsistente, em alguns casos atingindo o diagrama desejado, e em outros não.

No segundo cenário, o método MQM mostrou-se mais eficiente pois embora apresente um tempo maior de execução, o erro médio quadrático é consideravelmente menor que o fornecido pelo primeiro método (Tabela II). Ressalta-se que o emprego do algoritmo de LMI's para este tipo de cenário é inviável, pois o problema proposto é dado como infactível pelo método.

Por fim, no último cenário, somente o algoritmo de LMI's pode ser empregado, uma vez que nesta configuração não se faz uso de um diagrama ideal a ser seguido. Dessa forma, os outros métodos não garantem que todos os lóbulos estarão abaixo de um determinado valor.

Com base nas simulações e implementações realizadas, conclui-se que não existe um método de otimização ideal que abrange todos os tipos de aplicação. Sendo assim, destaca-se a importância da realização de análises comparativas, tendo como base as necessidades e limitações do sistema no qual o algoritmo de otimização será empregado.

REFERÊNCIAS

- [1] Mark A. Richards, James A. Scheer and William A. Holm, *Principles of Modern Radar - Basic Principles*, Raleigh, 2010.
- [2] Robert J. Mailloux, *Phased Array Antenna Handbook*, Norwood, 2005.
- [3] Steven M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing - Estimation Theory*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, 1993
- [4] Alexander M. Pasqual, *Controle da Diretividade Sonora no Espaço Tridimensional por um Arranjo Esférico Compacto de Alto Falantes*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, 2010.
- [5] Peter W. Kassakian, *Convex approximation and optimization with applications in magnitude filter design and radiation pattern synthesis*, PhD thesis, University of California, Berkeley, 2006.
- [6] Y. Qu, G. S. Liao, S. Q. Zhu, and X. Y. Liu, *Pattern Synthesis of planar antenna array via convex optimization for airborne forward looking radar*, Progress In Electromagnetics Research, PIER 84, 1-10, Xidian University, Xi'an, 710071, P. R. China, 2008
- [7] Fredric J. Harris, *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*, Proceedings of the IEEE, VOL. 66, NO. 1, 1978
- [8] David K. Barton, *Radar System Analysis and Modeling*, Artech House, London, 2005
- [9] Singiresu S. Rao, *Engineering Optimization*, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc, New Jersey, 2009