

# Avaliação dos Efeitos da Interferência de Co-Canal e da Diversidade de Antenas na Probabilidade de Erro de Bit para Modulações M-QAM em Canais com Desvanecimento Rayleigh

Edgar Benítez, Diana Moya, Gina Quelal e Celso de Almeida

**Resumo**—Este artigo estuda os efeitos da interferência de co-canal (ICC) e da diversidade de antenas no desempenho dos esquemas de modulação M-QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) em canais com desvanecimento Rayleigh. Foi encontrada uma expressão analítica para se avaliar a probabilidade de erro de bit (PEB) em sistemas M-PAM (*Pulse Amplitude Modulation*) em função da relação sinal-ruído por bit ( $E_b/N_0$ ) e da relação sinal-interferência (SIR, do inglês *signal-to-interference ratio*) considerando apenas um interferente dominante, a partir da qual foi obtida uma expressão equivalente para a modulação M-QAM. Foi analisado o desempenho de um sistema com diversidade usando um combinador MRC (*Maximal Ratio Combining*). A validação das expressões analíticas foi obtida mediante simulação. Os resultados obtidos mostram que a ICC provoca uma degradação significativa da PEB havendo a presença de patamares. Portanto, o uso de diversidade de antenas é necessário para mitigar estes efeitos.

**Palavras-Chave**—PEB, M-QAM, desvanecimento Rayleigh, Interferência de Co-Canal, Diversidade de Antenas, MRC.

**Abstract**—This paper studies the effects of co-channel interference (CCI) and antenna diversity on the performance of M-QAM modulation schemes over Rayleigh fading channels. At first, an analytical expression of the bit error probability (BEP) for M-PAM systems as a function of the signal-to-noise ratio per bit ( $E_b/N_0$ ) and the signal-to-interference power ratio (SIR) is obtained, by considering a single dominant interferer. From the BEP expression obtained earlier, an expression for M-QAM modulations is derived. Both single channel reception and diversity reception with maximal ratio combining (MRC) are examined. Validation of the analytical expressions is done by simulation. The results show that CCI causes a significant degradation on the BEP by the presence of floors. Therefore, the use of antenna diversity is necessary to mitigate the co-channel interference effects.

**Keywords**—BEP, M-QAM, Rayleigh Fading, Co-Channel Interference, Antenna Diversity, MRC.

## I. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o esquema de modulação M-QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) tem sido considerado para a transmissão de altas taxas de dados em sistemas de comunicações sem fio, devido à sua alta eficiência espectral [1]-[3]. Em [2], mostra-se que as modulações M-QAM, para uma ordem elevada de  $M$ , podem ser utilizadas para

aumentar a eficiência espectral de um sistema em canais AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), apresentando pouca degradação na probabilidade de erro de bit (PEB). No entanto, em um ambiente com desvanecimento, as modulações M-QAM precisam de outras técnicas para combater seus efeitos, devido a que o sinal recebido M-QAM sofre de severas variações de amplitude, o que certamente degrada o desempenho do sistema. Várias técnicas de diversidade têm sido propostas para fornecer ao receptor réplicas independentes do sinal. A diversidade na recepção pode ser realizada através de múltiplas antenas no receptor, separadas suficientemente para obter decorrelação entre os sinais recebidos. O combinador MRC (*Maximal Ratio Combining*) é a melhor maneira de combinar os sinais recebidos em um único sinal com melhor relação sinal-ruído (SNR, do inglês *signal-to-noise ratio*) [10]. No entanto, a avaliação correta do desempenho desta modulação em sistemas celulares não deve ser limitada a uma análise em um ambiente com desvanecimento puro [3], mas deve considerar também a presença da interferência de co-canal, que é um limitante importante no funcionamento do sistema [4]-[5]. Por outro lado, alguns trabalhos [6]-[7], que avaliam a PEB, considerando a presença da interferência de co-canal (ICC), têm limitado a sua análise apenas às modulações de ordem inferior ou fazem uma modelagem da ICC usando a aproximação gaussiana [8]. Embora em uma rede celular possam existir vários interferentes, geralmente um deles predomina sobre os outros [9], de tal modo que a interferência não é gaussiana.

Estas considerações mostram ênfase na importância de ter um método eficiente para avaliar o desempenho de sistemas digitais na presença de interferência de co-canal. Neste artigo, nós apresentaremos expressões analíticas para se avaliar o desempenho das modulações M-QAM, em termos da PEB, em canais com desvanecimento Rayleigh, usando diversidade de antenas e na presença de um interferente de co-canal dominante. Considerou-se que o interferente utiliza um esquema de modulação igual ao do usuário de interesse e transmite com a mesma potência. Assume-se que os sinais do usuário de interesse e do interferente são síncronos. O caso em que o interferente é síncrono apresenta pior desempenho em relação ao caso assíncrono [9].

Este artigo está estruturado da seguinte maneira. A seção II apresenta uma descrição do sistema. Na seção III, expressões da probabilidade de erro de bit para os esquemas de modulação

Edgar Benítez, Diana Moya, Gina Quelal e Celso de Almeida, Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil, E-mails: {ebenitez,dianamo,ginisque,celso}@decom.fee.unicamp.br.

$M$ -PAM e  $M$ -QAM com diversidade e interferência de co-canal são mostradas. A seção IV apresenta os resultados. Finalmente, as conclusões são apresentadas na seção V.

## II. DESCRIÇÃO DO SISTEMA

Considere um sistema de comunicações em um ambiente com desvanecimento lento Rayleigh, na presença de interferência de co-canal. O sinal recebido pelo usuário de interesse é dado por:

$$r_0(t) = \alpha_0 s_0(t) + \Omega \alpha_1 s_1(t) + n(t) \quad (1)$$

onde  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  são os sinais  $M$ -PAM do usuário de interesse e interferente, respectivamente, sendo  $M$  o tamanho do alfabeto,  $\Omega$  é a amplitude de interferência relativa ao sinal e  $n(t)$  é o ruído AWGN com densidade espectral de potência unilateral  $N_0$ . As variáveis aleatórias (VA)  $\alpha_k$ , para  $k = 0$  ou  $1$ , representam o desvanecimento, que tem a função densidade de probabilidade (FDP) dada por:

$$f_{\alpha_k}(\alpha_k) = \frac{\alpha_k}{\sigma^2} e^{-\frac{\alpha_k^2}{2\sigma^2}}, \quad \alpha_k \geq 0 \quad (2)$$

onde  $\sigma^2$  é definido a partir de  $E\{\alpha_k^2\}/2$ , onde  $E\{\cdot\}$  denota o operador de esperança.

O sinal  $M$ -PAM,  $s_k(t)$ , para  $k = 0$  ou  $1$ , é dado por:

$$s_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{i,k} g(t - iT_s) \quad (3)$$

onde  $b_{i,k}$  é o símbolo transmitido no  $i$ -ésimo intervalo de tempo do  $k$ -ésimo usuário, que assume um dos  $M$  valores do alfabeto com igual probabilidade e  $g(t)$  é o formato do pulso que se assume retangular com duração  $T_s$  e energia normalizada de acordo com  $\int_{iT_s}^{(i+1)T_s} g^2(t) dt = 1$ .

No  $i$ -ésimo intervalo de tempo de símbolo, ou seja,  $iT_s \leq t < (i+1)T_s$ , ignorando o ruído e assumindo que os sinais de interesse e interferente são perfeitamente síncronos no tempo e em fase, temos que o sinal na saída do filtro casado, amostrado no instante  $t = (i+1)T_s$  é dado por:

$$y(i+1) = \alpha_0 b_{i,0} + \Omega \alpha_1 b_{i,1} \quad (4)$$

onde  $b_{i,0}$  é o símbolo do sinal de interesse e  $b_{i,1}$  é o símbolo do interferente.

A potência instantânea é dada por:

$$P = (\alpha_0 b_{i,0} + \Omega \alpha_1 b_{i,1})^2 \quad (5)$$

Portanto, a potência média é dada por:

$$\bar{P} = E\{\alpha_0^2 b_{i,0}^2\} + \Omega^2 E\{\alpha_1^2 b_{i,1}^2\} + 2\Omega E\{\alpha_0 \alpha_1 b_{i,0} b_{i,1}\} \quad (6)$$

A partir de (6), é possível mostrar que a potência média é dada por:

$$\bar{P} = 2\sigma^2 P_a + 2\sigma^2 \Omega^2 P_a \quad (7)$$

onde  $P_a = E\{b_{i,0}^2\} = E\{b_{i,1}^2\}$  é a potência média da constelação e  $E\{b_{i,0}\} = E\{b_{i,1}\} = 0$ .

De (7), tem-se que a relação sinal-interferência (SIR, do inglês *signal-to-interference ratio*) é dada por:

$$\frac{S}{I} = \frac{2\sigma^2 P_a}{2\sigma^2 \Omega^2 P_a} = \frac{1}{\Omega^2} \quad (8)$$

## III. PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT

Para um esquema de modulação arbitrário, a probabilidade de erro de símbolo (PES) em um canal AWGN pode ser escrita em função da relação sinal-ruído por bit como  $P_s(E_b/N_0)$ . Na presença de um canal com desvanecimento, a SNR torna-se uma VA, pois  $\gamma_b = \alpha^2 E_b/N_0$ , que representa a SNR por bit instantânea, sendo  $\alpha$  uma VA Rayleigh. A partir de (2) e fazendo uma transformação de variáveis, mostra-se que a FDP da VA  $\gamma_b$  é dada por [10]:

$$f_{\gamma_b}(\gamma_b) = \frac{1}{\bar{\gamma}_b} e^{-\frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_b}}, \quad \gamma_b \geq 0 \quad (9)$$

onde  $\bar{\gamma}_b = E_b/N_0$ , assumindo que  $E\{\alpha^2\} = 1$ .

A PES em um canal com desvanecimento Rayleigh, pode ser obtida simplesmente pelo cálculo da média da PES obtida para um canal AWGN,  $P_s(\gamma_b)$ , sobre as estatísticas do sinal com desvanecimento Rayleigh, ou seja:

$$P_{s,\text{Rayl}} = \int_0^{\infty} P_s(\gamma_b) f_{\gamma_b}(\gamma_b) d\gamma_b \quad (10)$$

Finalmente, considerando mapeamento de bits com codificação de Gray, a PEB pode ser expressa como:

$$P_{b,\text{Rayl}} \approx \frac{P_{s,\text{Rayl}}}{\log_2 M} \quad (11)$$

### A. Interferência de Co-Canal

Considerando a presença da ICC, podemos escrever a PES para um esquema de modulação arbitrário, em um canal AWGN, como uma função das relações sinal-ruído por bit instantâneas dos sinais de interesse e interferente,  $P_s(\gamma_{b0}, \gamma_{b1})$ , onde  $\gamma_{b0} = \alpha_0^2 E_b/N_0$  e  $\gamma_{b1} = \alpha_1^2 E_b/N_0$ , sendo  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  VAs Rayleigh independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) de acordo com a FDP dada em (2).

Usando (10), a PES em um canal com desvanecimento Rayleigh e ICC é dada por:

$$P_{s,\text{Rayl,I}} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_s(\gamma_{b0}, \gamma_{b1}) f_{\gamma_{b0}}(\gamma_{b0}) f_{\gamma_{b1}}(\gamma_{b1}) d\gamma_{b0} d\gamma_{b1} \quad (12)$$

onde  $f_{\gamma_{b0}}(\gamma_{b0})$  e  $f_{\gamma_{b1}}(\gamma_{b1})$  são as FDPs das VAs independentes  $\gamma_{b0}$  e  $\gamma_{b1}$ .

### B. Combinador Maximal Ratio

Nesta técnica de combinação, cada um dos sinais recebidos pelas  $N_a$  antenas do combinador, provenientes do usuário de interesse, têm um ganho proporcional à sua própria SNR. Em [10], mostra-se que a SNR instantânea na saída do combinador é igual a soma das SNRs instantâneas de cada antena. Portanto, para o sinal de interesse, tem-se que  $\gamma_{b0} = \sum_{i=1}^{N_a} \gamma_{bi,0}$ , onde  $\gamma_{bi,0}$  é uma VA que representa a SNR por bit instantânea do

sinal de interesse na  $i$ -ésima antena e cuja FDP é dada em (9). Portanto a FDP de  $\gamma_{b0}$ , para o caso de diversidade de antenas, é dada por [10]:

$$f_{\Gamma_{b0}, \text{MRC}}(\gamma_{b0}) = \frac{\gamma_{b0}^{N_a-1} e^{-\frac{\gamma_{b0}}{\overline{\gamma}_b}}}{\overline{\gamma}_b^{N_a} (N_a - 1)!}, \quad \gamma_{b0} \geq 0 \quad (13)$$

onde  $\overline{\gamma}_b$  é definido do mesmo modo que em (9).

Por outro lado, para o caso de sinal interferente, o efeito aleatório da variável  $\gamma_{b1}$  pode ser substituído pela média de seu limitante superior, obtendo uma boa aproximação. O limitante superior de  $\gamma_{b1}$ , correspondente à situação de pior caso, onde a interferência também é maximizada na saída do combinador, é dado por:

$$\widehat{\gamma}_{b1} = \sum_{i=1}^{N_a} \gamma_{bi,1} \quad (14)$$

onde  $\gamma_{bi,1}$  é uma VA que representa a SNR por bit instantânea do sinal interferente na  $i$ -ésima antena do combinador. Desse modo, a FDP da variável  $\widehat{\gamma}_{b1}$  é da forma dada em (13), sendo que sua média é dada por [10]:

$$\overline{\widehat{\gamma}_{b1}} = N_a \overline{\gamma}_b \quad (15)$$

De (12), tem-se que a PES para um certo esquema de modulação, em um canal com desvanecimento Rayleigh, na presença de ICC e usando diversidade de antenas pode ser expressa como:

$$P_{s, \text{Rayl,I}} = \int_0^\infty P_s(\gamma_{b0}, \overline{\widehat{\gamma}_{b1}}) f_{\Gamma_{b0}, \text{MRC}}(\gamma_{b0}) d\gamma_{b0} \quad (16)$$

Finalmente, assumindo mapeamento de Gray, a PEB é determinada como em (11).

Nas subseções seguintes, de acordo com (16), vamos começar obtendo as expressões de  $P_s(\gamma_{b0}, \gamma_{b1})$ , para  $\gamma_{b1} = \overline{\widehat{\gamma}_{b1}}$ , correspondentes aos esquemas  $M$ -PAM, para depois obter as expressões equivalentes para  $M$ -QAM.

### C. 2-PAM

Para o esquema de modulação 2-PAM, a PES em um canal AWGN, sem interferência de co-canal, é dada por:

$$P_s = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (17)$$

Para um interferente, a PES pode ser obtida como:

$$P_s(\gamma_{b0}, \gamma_{b1}) = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{2\gamma_{b0}} + \Omega\sqrt{2\gamma_{b1}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{2\gamma_{b0}} - \Omega\sqrt{2\gamma_{b1}}\right) \quad (18)$$

### D. $M$ -PAM

Para o esquema de modulação  $M$ -PAM, a PES em um canal AWGN e sem interferência de co-canal é dada por [11]:

$$P_s = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{6\frac{E_b}{N_0} \frac{\log_2 M}{(M^2-1)}}\right) \quad (19)$$

Para um interferente, como mostramos em [5] para o caso de canais AWGN, a PES é dada por:

$$P_{s, M\text{-PAM}}(\gamma_{b0}, \gamma_{b1}) = \frac{2(M-1)}{M^2} \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{k=0}^1 Q(A) \quad (20)$$

onde

$$A = [\sqrt{\gamma_{b0}} - (2m+1)(1-2k)\Omega\sqrt{\gamma_{b1}}] \sqrt{6\frac{\log_2 M}{M^2-1}}$$

### E. $M$ -QAM

A PES para os esquemas  $M$ -QAM pode ser obtida a partir do produto cartesiano de dois sinais  $\sqrt{M}$ -PAM, ou seja [11]:

$$P_{s, M\text{-QAM}} = 1 - \left(1 - P_{s, \sqrt{M}\text{-PAM}}\right)^2 \quad (21)$$

onde  $P_{s, \sqrt{M}\text{-PAM}}$  é a PES de um sinal  $\sqrt{M}$ -PAM, dada por:

$$P_{s, \sqrt{M}\text{-PAM}}(\gamma_{b0}, \gamma_{b1}) = \frac{2(\sqrt{M}-1)}{M} \sum_{m=0}^{\frac{\sqrt{M}}{2}-1} \sum_{k=0}^1 Q(B) \quad (22)$$

onde:

$$B = [\sqrt{\gamma_{b0}} - (2m+1)(1-2k)\Omega\sqrt{\gamma_{b1}}] \sqrt{3\frac{\log_2 M}{M-1}}$$

## IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de se avaliar os efeitos da interferência e diversidade de antenas na PEB das modulações digitais, vamos apresentar algumas curvas correspondentes às equações da seção III.

A Fig. 1 apresenta a PEB em função da  $E_b/N_0$  para o esquema de modulação QPSK com um interferente, para valores de SIR = 0, 10, 20, 30, 40,  $\infty$  dB. O caso em que a SIR é infinita corresponde ao desempenho da PEB em um ambiente unicamente com desvanecimento Rayleigh, sem interferência. Entretanto para valores de SIR no intervalo de 0 a 40 dB, observa-se uma degradação significativa na PEB, devido aos efeitos da interferência de co-canal. A PEB apresenta patamares independentemente de qualquer aumento na  $E_b/N_0$ , mesmo para valores altos da SIR. Para valores da SIR abaixo de 30 dB, observa-se PEBs altas, maiores do que  $10^{-3}$ .

As Fig. 2 e 3 apresentam a PEB em função da relação  $E_b/N_0$  para os esquemas 16-QAM e 64-QAM, respectivamente. As curvas e conclusões são muito semelhantes ao esquema QPSK. Observa-se que conforme aumenta o tamanho do alfabeto  $M$ , o esquema de modulação é mais suscetível aos

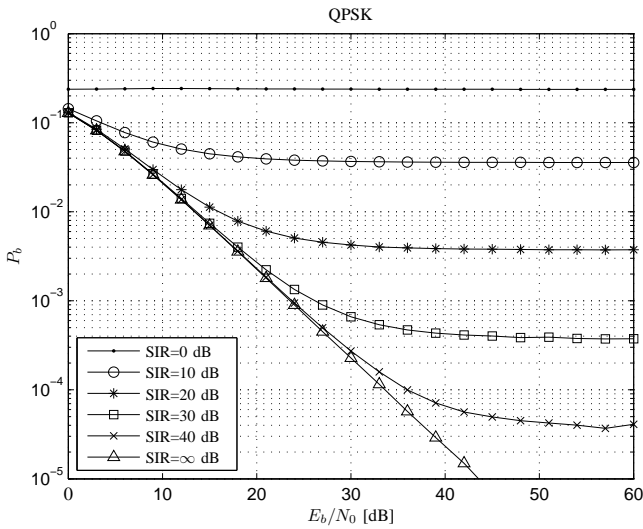


Fig. 1. PEB média em função da relação  $E_b/N_0$  e da SIR para o esquema de modulação QPSK, com um interferente.

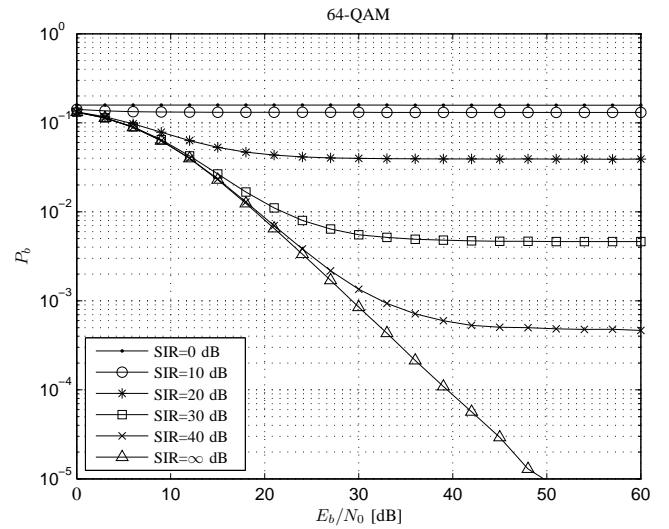


Fig. 3. PEB média em função da relação  $E_b/N_0$  e da SIR para o esquema de modulação 64-QAM, com um interferente.

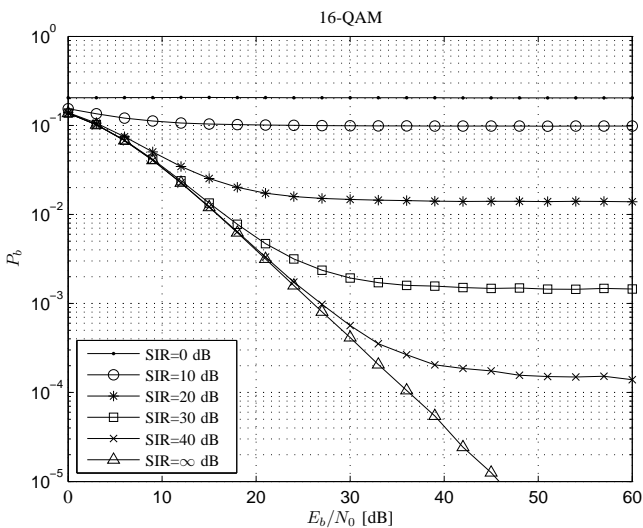


Fig. 2. PEB média em função da relação  $E_b/N_0$  e da SIR para o esquema de modulação 16-QAM, com um interferente.

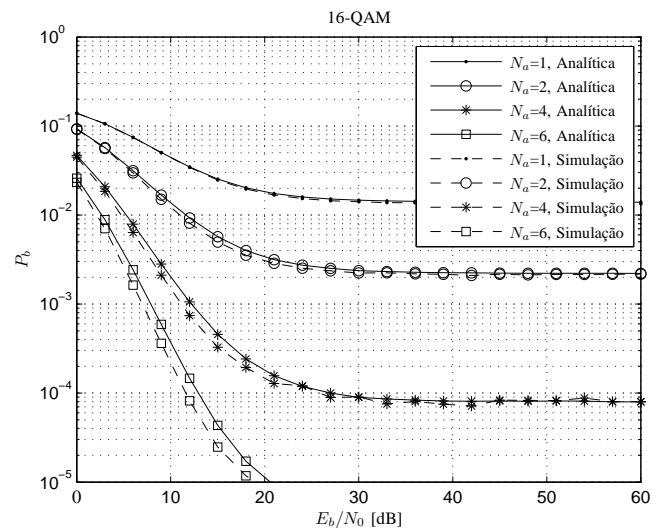


Fig. 4. PEB média em função da relação  $E_b/N_0$  para o esquema de modulação 16-QAM, com um interferente, para SIR=20 dB e ordem de diversidade  $N_a$ .

efeitos da interferência, precisando de uma SIR mais elevada para obter igual desempenho.

A Fig. 4 apresenta a PEB para o esquema 16-QAM, obtida mediante a análise teórica da seção III e também por simulação, em função da relação  $E_b/N_0$ , na presença de um interferente, para uma SIR de 20 dB, em função da ordem de diversidade,  $N_a = 1, 2, 4, 6$ . Conforme se aumenta a ordem da diversidade, observa-se uma melhora notável no desempenho da PEB. Para  $N_a = 6$ , o desempenho é superior ao caso que considera apenas desvanecimento, sem interferência (Fig. 2 para SIR=  $\infty$  dB).

### V. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram obtidas expressões analíticas da PEB para os esquemas de modulação  $M$ -QAM em função da

relação  $E_b/N_0$ , na presença de um interferente de co-canal dominante, em canais com desvanecimento do tipo Rayleigh, usando diversidade de antenas. A interferência de co-canal causa uma degradação notável no desempenho de sistemas digitais em canais com desvanecimento, apresentando patamares nas curvas da PEB, mesmo para uma SIR elevada e independentemente de um aumento na relação  $E_b/N_0$ . Portanto, é indispensável a utilização de técnicas de diversidade para se mitigar estes efeitos. Conforme se aumenta a ordem do esquema de modulação, observa-se que a mesma é mais susceptível à interferência de co-canal. As expressões apresentadas neste trabalho constituem uma ferramenta importante para a avaliação correta do desempenho de sistemas digitais celulares, pois a interferência de co-canal mostrou ser um

limitante crítico em seu funcionamento.

#### REFERÊNCIAS

- [1] J. R. Barry, E. A. Lee, D. G. Messerschmitt, *Digital Communication*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [2] L. Yang, L. Hanzo, A recursive algorithm for the error probability evaluation of M-QAM, *IEEE Communications Letters*, Vol.4, pp.304-306, Outubro 2000.
- [3] W. T. A. Lopes, W. J. L. Queiroz, F. Madeiro, M. S. Alencar, Exact Bit Error Probability of M-QAM Modulation Over Flat Rayleigh Fading Channels, International Microwave and Optoelectronics Conference, (IMOC 2007)
- [4] K. Gulati, A. Chopra, B. L. Evans, K. R. Tinsley, Statistical Modeling of Co-Channel Interference, *IEEE GLOBECOM 2009*
- [5] E. Benítez, G. Quelal, D. Moya, D. Altamirano, C. de Almeida, Evaluation of the Effects of Co-Channel Interference on the Bit Error Rate for QPSK and M-QAM Modulations, 7th International Telecommunications Symposium, Manaus, Brasil, Setembro 2010.
- [6] V. Tralli, R. Verdone, Performance Characterization of Digital Transmission Systems with Cochannel Interference, *IEEE Transactions on Vehicular Technology* Vol. 48, No. 3, Maio 1999
- [7] I. Trigui, A. Laourine, S. Affes and A. Stéphane, Performance Analysis of Mobile Radio Systems over Composite Fading/Shadowing Channels with Co-located Interference, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Vol. 8, No. 7, Julho 2009.
- [8] A. Giorgetti, M. Chiani, Influence of Fading on the Gaussian Approximation for BPSK and QPSK With Asynchronous Cochannel Interference, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Vol.4, No.2, Março 2005.
- [9] D. Altamirano and C. de Almeida, Evaluation of the Effects of the Co-Channel Interference on the Bit Error Rate of Cellular Systems for BPSK Modulation, 7th International Telecommunications Symposium, Manaus, Brasil, Setembro 2010.
- [10] T. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*, Prentice Hall, 2001.
- [11] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2001.