

Algumas Aplicações e Resultados Recentes em Codificação de Rede

Bartolomeu F. Uchôa-Filho, João Luiz Rebelatto e Roberto W. Nóbrega

Resumo— Neste artigo apresentamos inicialmente uma breve introdução à *codificação de rede*, uma área de pesquisa de grande importância para o desenvolvimento das futuras redes de comunicação. A nova técnica consiste em processar informação nos nodos intermediários da rede, ao invés de restringir a atuação destes à de meros roteadores. Com o uso desta técnica mostrou-se que é possível alcançar a máxima taxa de transferência de informação em algumas topologias de rede, o que não se consegue com roteamento apenas. Mais recentemente, codificação de rede tem sido aplicada em outros problemas. Neste tutorial, os autores descrevem conceitos fundamentais e duas aplicações de codificação de rede com as quais têm trabalhado nos últimos dois anos.

Palavras-Chave— Canal matricial, codificação de canal, codificação de rede, codificação de subespaço, comunicação cooperativa, diversidade cooperativa, teoria de informação.

I. INTRODUÇÃO

As redes de comunicação de dados são parte integrante de inúmeros serviços, nos mais diversos setores da sociedade moderna. Prevê-se também que essa infraestrutura venha a ser essencial para se lidar com diversos problemas que definirão o futuro do nosso planeta, desde as mudanças climáticas como a sustentabilidade econômica. É de se esperar, portanto, que esforços de pesquisa científica continuem a ser despendidos para tornar as redes de comunicação ainda mais eficientes, mais seguras e mais rápidas.

Um enorme passo foi dado quando, há pouco mais de uma década, Ahlswede, Cai, Li e Yeung [1] apresentaram para a comunidade de Teoria de Informação resultados surpreendentes sobre como uma nova forma de disseminar pacotes de dados por uma rede pode resultar em uma maior taxa de transferência de informação. A assim chamada *Codificação de Rede* logo despertou o interesse da comunidade científica, que enxergou aplicações dessa técnica em diversos problemas práticos. O tutorial de Fragouli e Soljanin [2], publicado em 2007, constituiu uma excelente referência que reúne muitas dessas aplicações.

Sucintamente, codificação de rede é um novo paradigma no que concerne à forma como os pacotes de dados são transportados por uma rede de comunicação. Mais especificamente, enquanto os nodos de uma rede normalmente apenas realizam roteamento, i.e., repassam os pacotes que recebem para nodos subsequentes, em codificação de rede os nodos combinam os

pacotes recebidos, produzindo novos pacotes, que são então repassados. Mostrou-se que com codificação de rede pode-se alcançar a máxima taxa de transferência de informação em alguns cenários, o que não se consegue com roteamento apenas.

O exemplo mais conhecido na literatura, e também o mais citado, para ilustrar a codificação de rede é a *rede borboleta*, originamente apresentada em [1]. Nesta rede, um nodo fonte deseja enviar dois pacotes binários, I_1 e I_2 , a dois nodos destino. Mostra-se que, restringindo-se à operação de roteamento, apenas um dos nodos receberá os dois pacotes com apenas um uso da rede. Entretanto, com um único nodo intermediário da rede que recebe I_1 e I_2 realizando a operação $I_1 \oplus I_2$ e repassando o resultado, o nodo destino i recebe os pacotes I_i e $I_1 \oplus I_2$, a partir dos quais consegue recuperar ambos I_1 e I_2 com um único uso da rede. Tem-se, portanto, um aumento na taxa de transferência de informação.

Mais recentemente, codificação de rede tem sido utilizada para outros propósitos, por exemplo, para maximizar o ganho de diversidade em sistemas multiusuário com codificação distribuída. Outro exemplo é a codificação de informação na forma de subespaços lineares, que pode ser adotada em redes que operam com codificação de rede linear aleatória não-coerente. Neste caso, os nodos destino não possuem conhecimento da topologia da rede, que pode ser variante no tempo, e nem da própria codificação de rede realizada. Neste artigo, de natureza tutorial, os autores descrevem os conceitos fundamentais destas duas aplicações e apresentam alguns de seus resultados recentes nesta área.

Este artigo encontra-se organizado da seguinte maneira. Na Seção II, um sistema multiusuário no qual N usuários móveis desejam enviar informações independentes para um destino comum é considerado. A codificação de rede neste caso é projetada para maximizar o ganho de diversidade do sistema. Na Seção III, considera-se o cenário no qual os nodos intermediários da rede selecionam de forma aleatória os coeficientes para realizarem as combinações lineares dos pacotes recebidos. Considera-se também que os nodos destino não têm conhecimento de tais combinações (“codificação de rede linear não-coerente”). O conceito de codificação de subespaço, que parece ser a solução mais natural para a transmissão de informação neste cenário, é então apresentado. Por fim, conclusões são encontradas na Seção IV.

II. CODIFICAÇÃO DE REDE PARA MELHORAR O DESEMPENHO DA REDE

Originalmente, como mencionado na Introdução, codificação de rede foi proposta para cenários com fio

Bartolomeu F. Uchôa-Filho, João Luiz Rebelatto e Roberto W. Nóbrega, Grupo de Pesquisa em Comunicações (GPqCom), Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, E-mails: {uchoa,jlrebelatto,rwnobrega}@eel.ufsc.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq (481717/2010-2, 306081/2010-5, 159777/2010-0, 143241/2009-5).

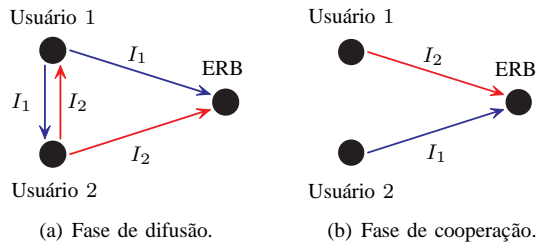


Fig. 1. Rede cooperativa DAF com 2 usuários. (a) Cada usuário difunde sua própria informação e (b) cada usuário transmite a informação de seu parceiro após decodificá-la e recodificá-la.

visando maximizar a taxa de transferência de informação de uma rede de comunicação [1]. Recentemente, entretanto, sua aplicação foi estendida a redes sem fio com o intuito de reduzir suas taxas de erro [3]–[9].

Em uma rede sem fio cooperativa de múltiplo acesso em que os usuários possuem informações independentes para transmitir para um destino em comum, pode-se dividir o processo de transmissão em duas fases: a chamada *fase de difusão*, em que os usuários difundem suas próprias mensagens (normalmente através de canais ortogonais), e a denominada *fase de cooperação*, em que os usuários retransmitem as mensagens de seus parceiros que foram “ouvidas” durante a fase de difusão. Um dos protocolos de retransmissão mais utilizados é o protocolo decodifica-e-encaminha (DAF, do inglês *decode-and-forward*) [10], [11], o qual está ilustrado na Fig. 1. Neste protocolo, os usuários somente retransmitem a informação de seus parceiros durante a fase de cooperação¹. Supondo que P_{ij} corresponda à probabilidade de o canal de comunicação entre o usuário i e usuário j não estar propício para a comunicação (de tal forma que $P_{ij} = P_o \forall i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j$), pode-se mostrar que a probabilidade de que I_i (pacote de informação transmitido pelo usuário i , com $i \in \{1, 2\}$) não seja recuperado pelo destino² no esquema DAF apresentado na Fig. 1 é igual a [10]

$$P_{o,j}^{DAF} = 1.5P_o^2. \quad (1)$$

Percebe-se que ordem de diversidade (expoente de $P_{o,j}^{DAF}$) em (1) é igual a 2, o que já era esperado visto que cada informação é transmitida através de dois canais independentes [10], [11].

No entanto, ao invés de simplesmente retransmitir a informação de seu parceiro durante a fase de cooperação, os usuários poderiam efetuar combinações lineares desta informação e de sua própria informação antes de realizar a retransmissão, com coeficientes em um campo finito \mathbb{F}_q [4]–[9], caracterizando assim uma codificação de rede.

Em [4], mostrou-se que tais combinações lineares devem ser projetadas utilizando-se coeficientes não-binários para que a ordem de diversidade do sistema seja aumentada, e os denominados códigos de rede de diversidade (DNC, do inglês *diversity network codes*) foram propostos. A Fig. 2 ilustra o esquema DNC para uma rede com dois usuários. Percebe-se

¹Caso o usuário não seja capaz de decodificar corretamente a informação de seu parceiro, ele retransmite sua própria informação.

²Também denominada *probabilidade de outage* [10].

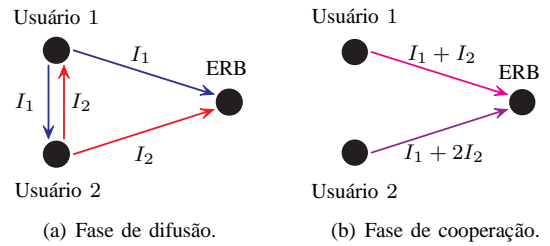


Fig. 2. Rede cooperativa com 2 usuários empregando codificação de rede não-binária. (a) Cada usuário difunde a sua própria informação e (b) cada usuário transmite uma combinação linear sobre \mathbb{F}_4 composta de todos os pacotes de informação disponíveis.

que, nesta situação, os dois pacotes de informação I_1 e I_2 serão recuperados pelo destino caso este seja capaz de decodificar corretamente quaisquer 2 dentre os 4 pacotes recebidos (I_1 , I_2 , $I_1 + I_2$ e $I_1 + 2I_2$). Somente a incapacidade do destino em recuperar pelo menos 3 destes pacotes resultaria na perda de algum (ou de ambos) dos pacotes de informação I_1 e I_2 . Dessa forma, mantendo a mesma taxa $1/2$ do esquema DAF apresentado na Fig. 1, ao se utilizar codificação de rede sobre \mathbb{F}_4 pode-se mostrar que a probabilidade de que I_i ($i \in \{1, 2\}$) não seja recuperado pelo destino no esquema DNC com dois usuários é [4]

$$P_{o,j}^{DNC} = 4P_o^3, \quad (2)$$

em que podemos observar que a ordem de diversidade foi aumentada para 3. Para confirmar tais resultados, a Fig. 3 apresenta a taxa de apagamento de pacote (FER) em função da relação sinal-ruído (SNR) juntamente com as probabilidades apresentadas em (1) e (2) para uma rede com 2 usuários considerando os esquemas DAF (Fig. 1) e DNC (Fig. 2), respectivamente.

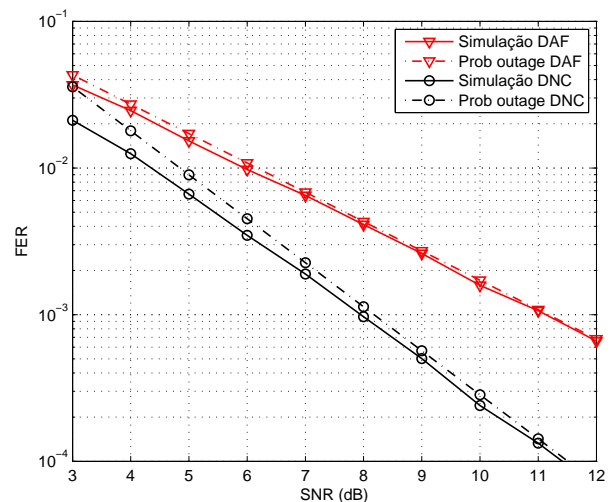


Fig. 3. FER versus SNR (dB) para uma rede com 2 usuários considerando os esquemas DAF e DNC, apresentados nas Figuras 1 e 2, respectivamente, ambos com taxa $1/2$.

Pode-se perceber que ao se considerar codificação de rede não-binária, a diversidade do sistema (inclinação da curva) foi aumentada.

A. Trabalhos Relacionados

Outros trabalhos que consideram codificação de rede com o intuito de melhorar o desempenho de redes de múltiplo acesso podem ser destacados. Em [5], [6], uma generalização do esquema DNC foi proposta, através de uma associação entre códigos de rede e teoria da codificação clássica. No esquema proposto em [5], [6], denominado DNC generalizado (GDNC), cada usuário transmite k_1 pacotes de informação na fase de difusão e k_2 pacotes (combinações lineares) na fase de cooperação. Com isso, pode-se realizar uma melhor solução de compromisso entre diversidade e taxa de transmissão, de tal forma que ambos podem simultaneamente superar o esquema DNC. Para o esquema de 2 usuários e taxa $1/2$ apresentados nas Figuras 1 e 2, por exemplo, o esquema GDNC seria capaz de atingir diversidade 4. Todavia, devido à possível ocorrência de apagamentos nos enlaces interusuário, mostra-se em [5], [6] que este valor de diversidade não é um valor ótimo.

Em [7] mostrou-se que, mesmo com os enlaces interusuário sujeitos a apagamentos, o valor ótimo de diversidade pode ser atingido caso a restrição de que os usuários sejam aptos apenas a transmitir durante a fase de cooperação seja relaxada e os mesmos possam fazer uso dos pacotes redundantes transmitidos pelos seus parceiros. Dessa forma, para o sistema com 2 usuários e de taxa $1/2$, pode-se atingir diversidade 5.

Supondo-se existir um canal de retorno entre o destino e os usuários, uma abordagem adaptativa de construção de códigos de rede foi considerada em [8], [9], aumentando a taxa média de transmissão do sistema sobre o esquema GDNC, sem que a ordem de diversidade fosse reduzida.

Por fim, deve-se ressaltar, mais uma vez, o fato de que, para que o desempenho destas redes de múltiplo acesso pudessem ser melhorado, fizeram-se necessárias a escolha adequada dos coeficientes das combinações lineares de pacotes realizadas pelos usuários da rede, bem como a escolha de um corpo finito com ordem suficientemente grande. Em outras palavras, a codificação de rede, em substituição ao DAF, mostrou-se essencial para se alcançar os objetivos.

III. CODIFICAÇÃO DE REDE NÃO-COERENTE E CÓDIGOS DE SUBESPAÇO

Nas técnicas DNC e GDNC apresentadas na Seção II, para que o destino possa recuperar os pacotes de informação com o máximo desempenho, a codificação de rede deve projetada e mantida fixa para uma topologia específica. Também, o destino deve ter conhecimento da codificação de rede empregada pela rede. E se a topologia da rede variar com o tempo? Uma nova codificação de rede deverá ser projetada e informada ao destino. Obviamente, esta abordagem se torna impraticável à medida que o tamanho, a complexidade e a taxa de mudança da topologia da rede aumentarem.

Adicionalmente, em algumas aplicações práticas, nem sempre a topologia da rede é conhecida antecipadamente. Para contornar esse problema, Chou, Wu e Jain [12] desenvolveram um esquema simples que permite a decodificação da informação recebida sem a necessidade do conhecimento antecipado da topologia ou do código de rede utilizado, bastando esse ser linear. É criada, assim, a área conhecida

como *codificação de rede não-coerente*. Aliada ao método de *codificação linear aleatória* de Ho et al. [13], [14], no qual cada nodo intermediário da rede realiza uma combinação linear escolhendo os coeficientes de um corpo finito aleatoriamente, segundo uma distribuição de probabilidades uniforme, a proposta de Chou, Wu e Jain [12] permite um funcionamento totalmente descentralizado do sistema, uma vez que tudo o que é exigido dos nodos intermediários é que eles repassem combinações aleatórias dos pacotes recebidos; a topologia da rede pode ser variante no tempo, bastando cada nodo realizar novo sorteio dos coeficientes para formar uma nova combinação linear aleatória.

A abordagem em [12] para codificação de rede não-coerente não será apresentada neste trabalho, mas sim a abordagem de “codificação de subespaço”, proposta por Koetter e Kschischang [15], na qual os autores observam que, como a rede realiza combinações lineares dos pacotes nela injetados, o subespaço vetorial gerado por tais pacotes é preservado. Em outras palavras, os pacotes transmitidos e os pacotes recebidos constituem duas bases geradoras possivelmente distintas para o mesmo subespaço vetorial. Sendo assim, se a informação for atrelada ao subespaço vetorial gerado pelos pacotes transmitidos, e não ao conteúdo dos pacotes, as combinações lineares específicas realizadas pela rede são completamente irrelevantes, e a informação pode ser recuperada no destino sem qualquer conhecimento da topologia ou da codificação de rede realizada.

Neste trabalho, considera-se que o número de pacotes injetados pelo nodo fonte é igual ao número de pacotes coletados pelo nodo destino, que é igual a n . Cada pacote consiste de m símbolos do corpo finito \mathbb{F}_q . Em adição, com o intuito de simplificar o modelo, são feitas as seguintes suposições:

- É considerada uma única unidifusão (*unicast*), isto é, o caso em que existe um único nodo fonte que deseja transmitir informação a um único nodo destino.
- Erros nos pacotes transmitidos são detectados canal a canal, através de códigos detectores de erro, sendo os pacotes com erro descartados pelos nodos. Alternativamente, pode-se dizer que não existem erros nos canais, mas que esses estão sujeitos a *apagamentos*.

Sob tais hipóteses, é possível mostrar [16] que a comunicação entre o nodo fonte e o nodo destino é modelada por um “canal matricial” com lei dada por

$$Y = GX, \quad (3)$$

em que $X \in \mathbb{F}_q^{n \times m}$ é a *matriz de entrada*, cujas linhas são os pacotes injetados na rede pelo nodo fonte, $Y \in \mathbb{F}_q^{n \times m}$ é a *matriz de saída*, cujas linhas são os pacotes coletados da rede pelo nodo destino, e $G \in \mathbb{F}_q^{n \times n}$ é a *matriz de transferência*, que depende da topologia da rede e das combinações lineares efetuadas pelos nodos intermediários. Note que, em termos do modelo em questão, a não-coerência se traduz no *desconhecimento* da matriz de transferência G .

O ideal seria que a matriz de transferência, apesar de desconhecida, tivesse sempre posto completo. Neste caso, a não-coerência pode ser contornada através do já mencionado esquema proposto em [15]: a transmissão de *subespaços*

vetoriais pela rede, visto que esses são sempre preservados após a multiplicação por uma matriz de posto completo. De fato,

$$\langle Y \rangle = \langle GX \rangle = \langle X \rangle,$$

em que $\langle A \rangle$ é o subespaço gerado pelas linhas da matriz A .

No entanto, devido aos possíveis apagamentos ocorridos nos canais ou as eventuais combinações lineares infelizes (lembre-se de que codificação de rede aleatória é ótima apenas quando o tamanho do corpo tende a infinito [13], [14]), a matriz de transferência G pode não ter posto completo. Para lidar com tal situação, pode-se limitar os possíveis subespaços transmitidos a um subconjunto particular, definindo-se, assim, um “código de subespaço”. Mais precisamente, um *código de subespaço* é um subconjunto não-vazio de $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q^m, n)$, o conjunto de todos os subespaços vetoriais de \mathbb{F}_q^m de dimensão n ou menos.

Note que, enquanto na codificação de canal “clássica” uma palavra-código consiste de um vetor de um espaço vetorial, na codificação de subespaço uma palavra-código corresponde a um subespaço vetorial completo, representado pelos vetores de alguma base geradora.

Em paralelo com a codificação de canal “clássica”, costuma-se considerar para a codificação de subespaços dois modelos de erros distintos: o modelo de *pior caso* e o modelo *probabilístico*.

A. Modelo de erro de pior caso

Neste modelo, está-se interessado em obter condições necessárias e suficientes sobre um código de subespaço para que este seja capaz de “corrigir” qualquer deficiência de posto de ρ ou menos. O seguinte resultado é um caso particular daquele considerado por Silva et al. [17].

Resultado. Considere o canal de comunicação definido pela lei (3). Sejam $X_1, X_2 \in \mathbb{F}_q^{n \times m}$ duas matrizes de entrada quaisquer. As afirmações a seguir são equivalentes:

- (i) $\mathcal{Y}_\rho(X_1) \cap \mathcal{Y}_\rho(X_2) = \emptyset$, em que $\mathcal{Y}_\rho(X) \triangleq \{Y \in \mathbb{F}_q^{n \times m} : Y = GX, G \in \mathbb{F}_q^{n \times n}, \text{rank } G \geq n - \rho\}$ é o conjunto das possíveis saídas atingidas a partir da entrada X ;
- (ii) $d_1(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle) > \rho$, em que $d_1(\cdot, \cdot)$ é a *distância de injeção* entre dois subespaços vetoriais, definida como $d_1(U, V) \triangleq \max\{\dim U, \dim V\} - \dim(U \cap V)$.

Em outras palavras, duas palavras-código X_1 e X_2 geram saídas Y_1 e Y_2 sempre “inconfundíveis” se e somente se os subespaços gerados por tais palavras-código estiverem suficientemente “separados”, em termos da distância de injeção.

B. Modelo de erro probabilístico

Neste modelo, considera-se um canal discreto sem memória com alfabetos de entrada e saída iguais dados por $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{F}_q^m$, respectivamente, e probabilidades de transição induzidas pela distribuição da matriz de transferência G (assumida ser independente da entrada) e pela lei do canal (3). O seguinte resultado segue de [18], [19].

Resultado. Seja $m \geq n$ e $r \triangleq \text{rank } G$ a variável aleatória que representa o posto de G . Então a capacidade C do canal satisfaz

$$\mathbb{E} \left[\log_q \frac{\binom{m}{r}_q}{\binom{n}{r}_q} \right] \leq C \leq \mathbb{E} [mr],$$

em que $\binom{n}{k}_q$ é o coeficiente Gaussiano [15]. O limitante inferior é exato no caso em que a distribuição da matriz de transferência é uniforme condicionada em seu posto e a entrada está restrita a matrizes de posto completo n . O limitante superior representa a capacidade no caso em que a matriz de transferência é conhecida pelo receptor (isto é, no caso coerente).

A Fig. 4 ilustra esse resultado para $q = 2$, $n = 5$ e r distribuída de acordo com $(0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$. A capacidade é expressa normalizada por m .

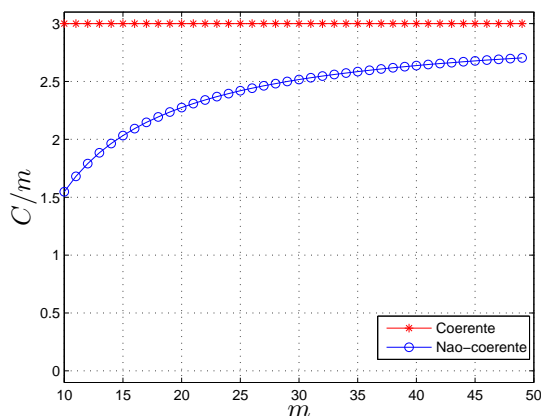


Fig. 4. Limitantes sobre a capacidade do canal matricial $Y = GX$.

Mais detalhes estão presentes em [18]. O cálculo da capacidade de canais matriciais também é considerado nos trabalhos de Silva et al. [20], Yang et al. [19] e Jafari et al. [21].

C. Códigos multishot

Um dos problemas fundamentais no que diz respeito aos canais matriciais sobre corpos finitos é a obtenção de códigos com altas taxas e distâncias mínimas (no caso de códigos baseados em métricas) ou códigos que alcancem a capacidade do canal (no caso de códigos para canais probabilísticos). Para atingir tais objetivos, pode ser inevitável o aumento do tamanho do corpo finito, q , ou do comprimento do vetor, m . *Códigos multishot* apresentam uma terceira alternativa: o aumento do número de usos do canal matricial.

O uso do canal matricial repetidas vezes é sugerido no trabalho original de Koetter e Kschischang [15], mas a ideia não é desenvolvida. Em [22], são definidos códigos de bloco nos quais a informação é codificada em *sequências* de subespaços. Tais códigos são chamados de *códigos de subespaço multishot*. O trabalho também determina limitantes sobre o tamanho dos códigos e sugere um esquema baseado na construção multinível de Imai e Hirakawa [23].

Uma construção mais explícita, baseada em códigos de Gabidulin [24] e códigos concatenados generalizados [25], [26], é proposta em [27]. Códigos multishot que alcançam a capacidade do canal matricial multiplicativo são apresentados por Yang et al. [28] e [29]. Mais recentemente, Wachter et al. [30] introduzem códigos multishot convolucionais sobre a mesma métrica considerada em [27].

Em resumo, codificação de subespaço constitui uma importante área de pesquisa, com diversos problemas ainda em aberto, como a construção de boas classes de códigos. Esta técnica em conjunto com a codificação de rede não-coerente têm grande apelo prático, pois possibilita uma operação descentralizada de rede e é viável em cenários com topologias variantes no tempo (por exemplo, redes sem fio).

IV. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou dois cenários nos quais codificação de rede é utilizada numa forma ou com propósito distintos daqueles considerados no trabalho em que foi originalmente proposta por Ahlswede, Cai, Li e Yeung [1]. Várias referências são fornecidas, incluindo trabalhos recentes dos autores nesta área de pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Ahlswede, N. Cai, S.-Y. Li, and R. Yeung, "Network information flow," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 46, no. 4, pp. 1204–1216, 2000.
- [2] C. Fragouli and E. Soljanin, *Network Coding Applications*, ser. Foundations and Trends® in Networking. Now Publishers Inc., 2007.
- [3] L. Xiao, T. Fuja, J. Kliewer, and D. Costello, "A network coding approach to cooperative diversity," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 10, pp. 3714–3722, October 2007.
- [4] M. Xiao and M. Skoglund, "Multiple-user cooperative communications based on linear network coding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 12, pp. 3345–3351, December 2010.
- [5] J. L. Rebelatto, B. F. Uchôa-Filho, Y. Li, and B. Vucetic, "Generalized distributed network coding based on nonbinary linear block codes for multi-user cooperative communications," in *Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory, ISIT'10*, June 2010, pp. 943–947.
- [6] —, "Multi-user cooperative diversity through network coding based on classical coding theory," *Submitted to IEEE Trans. Signal Process.*, 2011. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1004.2757>
- [7] J. L. Rebelatto, B. F. Uchôa-Filho, and D. Silva, "Full-diversity network coding for two-user cooperative communications," in *To appear in the proc. of the IEEE Information Theory Workshop (ITW'11)*, Paraty, Brazil, 2011.
- [8] J. L. Rebelatto, B. F. Uchôa-Filho, Y. Li, and B. Vucetic, "Adaptive distributed network-channel coding," *Accepted for publication in the IEEE Trans. Wirel. Commun.*, 2010.
- [9] J. L. Rebelatto and B. F. Uchôa-Filho, "Codificação de rede adaptativa e distribuída para sistemas cooperativos de múltiplo acesso," in *To appear in the proceedings of the XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT'11)*, Curitiba, Brazil, 2011.
- [10] A. Sendonaris, E. Erkip, and B. Aazhang, "User cooperation diversity: Part I and Part II," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 11, pp. 1927–1948, November 2003.
- [11] J. N. Laneman, D. N. C. Tse, and G. W. Wornell, "Cooperative diversity in wireless networks: Efficient protocols and outage behavior," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 50, no. 12, pp. 3062–3080, December 2004.
- [12] P. Chou, Y. Wu, and K. Jain, "Practical network coding," in *Proceedings of the 41st Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton'03)*, Monticello, Illinois, Oct. 2003.
- [13] T. Ho, R. Koetter, M. Médard, D. Karger, and M. Effros, "The benefits of coding over routing in a randomized setting," in *Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT'03)*, Yokohama, Japan, Jun. 2003, p. 442.
- [14] T. Ho, M. Médard, R. Koetter, D. Karger, M. Effros, J. Shi, and B. Leong, "A random linear network coding approach to multicast," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 10, pp. 4413–4430, Oct. 2006.
- [15] R. Koetter and F. R. Kschischang, "Coding for errors and erasures in random network coding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, no. 8, pp. 3579–3591, Aug. 2008.
- [16] R. Koetter and M. Médard, "An algebraic approach to network coding," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 11, no. 5, pp. 782–795, Oct. 2003.
- [17] D. Silva and F. R. Kschischang, "On metrics for error correction in network coding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 55, no. 12, pp. 5479–5490, Dec. 2009.
- [18] R. W. Nóbrega, B. F. Uchôa-Filho, and D. Silva, "On the capacity of multiplicative finite-field matrix channels," in *Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT'11)*, Saint Petersburg, Russia, Jul. 2011, pp. 248–252.
- [19] S. Yang, S.-W. Ho, J. Meng, E.-h. Yang, and R. W. Yeung, "Linear operator channels over finite fields," *Computing Research Repository (CoRR)*, vol. abs/1002.2293, Apr. 2010.
- [20] D. Silva, F. R. Kschischang, and R. Koetter, "Communication over finite-field matrix channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, no. 2, pp. 1296–1305, Mar. 2010.
- [21] M. Jafari Siavoshani, S. Mohajer, C. Fragouli, and S. Diggavi, "On the capacity of non-coherent network coding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 57, no. 2, pp. 1046–1066, Feb. 2011.
- [22] R. W. da Nóbrega, "Códigos de subespaço aplicados a codificação de rede." Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, August 2009.
- [23] H. Imai and S. Hirakawa, "A new multilevel coding method using error-correcting codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 23, no. 3, pp. 371–377, May 1977.
- [24] E. M. Gabidulin, "Theory of codes with maximum rank distance," *Problemy Peredachi Informatsii*, vol. 21, no. 1, pp. 3–16, 1985.
- [25] G. D. Forney Jr., "Concatenated codes," Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, Tech. Rep. 440, Dec. 1965.
- [26] E. L. Blokh and V. V. Zyablov, "Coding of generalized concatenated codes," *Problemy Peredachi Informatsii*, vol. 10, no. 3, pp. 45–50, 1974.
- [27] R. W. Nóbrega and B. F. Uchôa-Filho, "Multishot codes for network coding using rank-metric codes," in *Proceedings of the 3rd IEEE Wireless Network Coding Workshop (WiNC'10)*, Boston, Massachusetts, Jun. 2010.
- [28] S. Yang, J. Meng, and E.-h. Yang, "Coding for linear operator channels over finite fields," in *Proceedings of the 2010 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT'10)*, Austin, Texas, Jun. 2010, pp. 2413–2417.
- [29] S. Yang and R. W. Yeung, "Coding for a network coded fountain," in *Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT'11)*, Saint Petersburg, Russia, Jul. 2011, pp. 2583–2587.
- [30] A. Wachter, V. Sidorenko, M. Bossert, and V. Zyablov, "Partial unit memory codes based on Gabidulin codes," in *Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT'11)*, Saint Petersburg, Russia, Jul. 2011, pp. 2414–2418.