

Processamento Tensorial de Sinais e Geometria da Informação: Novos Caminhos para os Sistemas de Comunicações Digitais

J.C.M.Mota, C.E.R.Fernandes, C.A.R.Fernandes, C.C.Cavalcante, A.L.F.de Almeida, W.C.Freitas Jr

Resumo—Este trabalho apresenta o panorama das novas estratégias lógicas para os sistemas de comunicações digitais baseadas na álgebra multilinear e na geometria da informação, considerando perturbações provocadas por linearidades, não-linearidades e não-estacionaridades presentes no meio de comunicação.

Palavras-Chave—Álgebra multilinear, Comunicações digitais, Geometria da informação, Tensores.

Abstract—This paper presents the scenario of new logical strategies for digital communications on the basis of the multilinear algebra and the information geometry, considering in this framework the perturbations due to linearities, non-linearities and non-stationarities of the communication environment.

Keywords—Digital communications, information geometry, multilinear algebra, tensor decompositions.

I. INTRODUÇÃO

A. Breve histórico

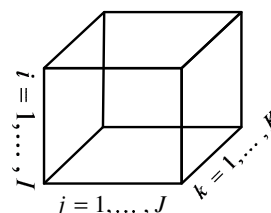
A Álgebra Multilinear amplia os métodos clássicos da álgebra linear. Assim como a álgebra linear é construída sob o conceito de um vetor e desenvolve a teoria de espaços vetoriais, a álgebra multilinear baseia-se no conceito de um tensor e desenvolve a teoria de espaços tensoriais. Este tema tem suas raízes na matemática do século XIX, mais especificamente no cálculo tensorial, tendo sido aplicado posteriormente na teoria da relatividade geral e em geometria diferencial, além de outras áreas conexas da matemática aplicada. As decomposições tensoriais são um ramo importante da álgebra multilinear e têm suas origens em 1927 com o trabalho de Hitchcock [1], [2]. Os primeiros modelos tensoriais multilineares e aplicações foram desenvolvidos e aplicados na área de psicometria [3], [4], [5], [6], e se tornaram extremamente populares na área de quimiometria [7], [8], [9], [10]. É nesta versátil disciplina que se encontram as bases teóricas das decomposições tensoriais, ferramentas com propriedades especiais que permitem uma modelagem completa da estrutura multidimensional de sinais ou informações multivariadas. Propriedades das ferramentas tensoriais como as condições de unicidade, a falta de restrições

de ortogonalidade e os limitantes de posto mais relaxados tornam-nas mais adequadas para o tratamento multi-domínio do que suas contrapartidas matriciais [11].

Nos últimos anos, a comunidade científica mundial testemunhou um grande número de contribuições oriundas da álgebra multilinear e das decomposições tensoriais. De um lado, problemas teóricos relacionados ao tratamento matemático e computacional de tensores. De outro lado, aplicações com ênfase particular em processamento de sinais, que vão de telecomunicações aos problemas de localização e rastreamento, do radar às imagens médicas, de reconhecimento de padrões aos problemas ambientais. O interesse em álgebra multilinear tem, portanto, se expandido para diversas áreas do conhecimento, incluindo a separação cega de fontes [12], [13], [14], [15], a modelagem e processamento de sinais em sistemas de comunicações [16], [17], [18], [19], [20], o processamento de imagens para o reconhecimento de padrões e visão computacional [21], [22], [23], [24]. Outras aplicações incluem a neurociência [25], [26].

B. Tensores e decomposições tensoriais

Um *tensor* pode ser definido como um *array* multidimensional associado a um produto tensorial de N espaços vetoriais, cada um tendo seu próprio sistema de coordenadas. Os tensores generalizam o conceito de escalar, vetor e matriz para dimensões superiores. A ordem do tensor corresponde ao número de dimensões do mesmo, e cada dimensão está associada a um índice. A Figura 1 representa um tensor de terceira ordem. Cada elemento do tensor é acessado por três índices i , j e k . Uma matriz é um tensor de segunda ordem tendo portanto duas dimensões. Já um vetor é um tensor de primeira ordem de dimensão única, e um escalar é um tensor de ordem zero.



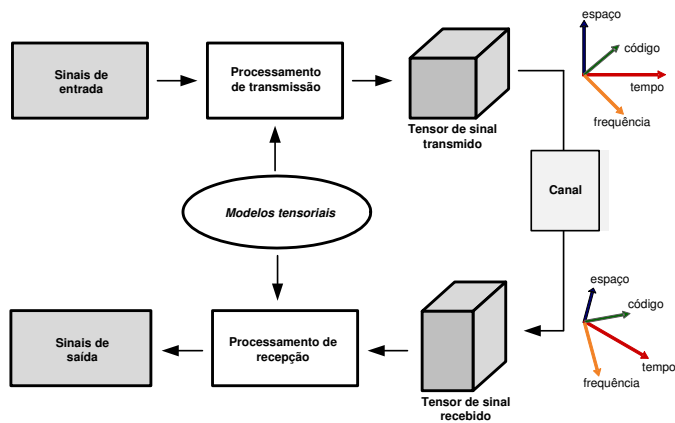
Seja $\mathcal{Y}(I \times J \times K)$ um tensor contendo, por exemplo, amostras de um sinal discreto tridimensional (caso comumente encontrado nas diversas aplicações tratadas neste projeto de

J.C.M.Mota, C.C.Cavalcante, A.L.F.de Almeida, W.C.Freitas Jr, Universidade Federal do Ceará (UFC), Dpto. Eng. Teleinformática, Fortaleza. E-mails: mota@gtel.ufc.br, charles@gtel.ufc.br, andre@gtel.ufc.br, walter@gtel.ufc.br.

C.E.R.Fernandes, Universidade Federal do Ceará (UFC), Centro de Tecnologia, Campus do Pici. E-mail: estevao@ufc.br

C.A.R.Fernandes, Universidade Federal do Ceará (UFC), Campus Sobral. E-mails: alexandrefernandes@ufc.br

Este trabalho foi parcialmente suportado pela Funcap, Programa PPP, contrato FCPC No. CV2153/SUB10.



pesquisa). De forma genérica, este tensor pode ser representado como uma combinação multilinear envolvendo três matrizes \mathbf{A} ($I \times P$), \mathbf{B} ($J \times Q$) e \mathbf{C} ($K \times R$) e um tensor “kernel” \mathcal{X} ($P \times Q \times R$), conforme a equação a seguir:

$$y_{i,j,k} = \sum_{p,q,r} (a_{i,p} b_{j,q} c_{k,r}) x_{p,q,r}.$$

\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} definem conjuntamente as bases do espaço multilinear (tensorial) sobre a qual o tensor de dados é representado, e \mathcal{X} contém os coeficientes do tensor de dados nesta base.

Várias decomposições tensoriais multilineares se enquadram como casos particulares desta representação geral, incluindo naturalmente ferramentas de análise matriciais tais como a análise em componentes principais (PCA, do inglês *principal component analysis*) e a decomposição SVD. Uma das mais populares decomposições tensoriais é a decomposição Parafac (Análise em Fatores Paralelos, [6]) é também chamado de Candecomp (Decomposição Canônica, [5]), e mais recentemente tem sido referenciado (assim como será neste artigo) como decomposição canônica poliádica¹ (CP) [27]. A solução do modelo CP consiste em aproximar um tensor de ordem D (i.e. um conjunto de dados em D dimensões) de posto R , pela soma de R tensores de posto unitário, sendo cada um escrito como o produto externo de D vetores. A unicidade da decomposição CP pode ser assegurada sob condições pouco rígidas [28] e não impõem nenhum tipo de restrição de ortogonalidade. Além disso, o posto do tensor não é limitado por suas dimensões, o que teoricamente permite que se processe modelos de informação sub-determinados, i.e. onde o número de entradas do modelo é maior do que o número de saídas. Além da decomposição CP, pode-se destacar ainda a decomposição de Tucker [] e decomposições híbridas tais como Paratuck [], CONFAC/PARALIND [], as quais combinam as propriedades das decomposições CP e Tucker.

¹ *Poliádico*: (subst. masc.) Mat. Cálculo tensorial. Operador definido pela combinação linear das justaposições dos vetores de uma base. (www.bemfalar.com); soma de duas ou mais poliáda (*dicionarioweb*) *Poliáda*: (subst. fem.) nome genérico que designa o objeto matemático definido pela justaposição de dois ou mais vetores em uma dada ordem (www.bemfalar.com)

C. Processamento tensorial de sinais

A grande parte das estratégias de processamento de sinais em sistemas de comunicações sem fio utilizam modelos de sinais bidimensionais (2D), ou seja, baseados em álgebra linear (matricial). Neste caso, os modelos algébricos matriciais buscam capturar separada ou conjuntamente as transformações exercidas pelo transmissor (codificação, formatação de feixe, pré-filtragem), pelo canal de comunicação (espalhamento temporal, espacial e frequencial), bem como aquelas associadas a estruturas de filtragem no receptor. Entretanto, na maioria dos problemas de processamento de sinais em sistemas de comunicações, em particular em comunicações sem fio, os sinais discretos processados varrem múltiplos domínios nos quais a informação é transmitida, propagada, e recebida. Domínios bastante comuns são o *espaço* e o *tempo*. O domínio do espaço está associado à transmissão dos sinais através de múltiplas antenas e/ou recepção por múltiplas antenas. O domínio do tempo aparece devido a processamento dos sinais em blocos temporais, ou seja, em *slots* de tempo.

Mais especificamente, em sistemas de comunicações digitais, com o advento de sistemas multiusuários, multiporadoras e multiantenas, outros domínios de processamento ganharam importância e foram sendo introduzidos na cadeia de transmissão e recepção, visando adicionar mais graus de liberdade e mecanismos de diversidade no sistema e reduzir os efeitos degradantes da interferência de múltiplo acesso e do desvanecimento seletivo em frequência. Além dos domínios espaço e tempo, em sistemas de múltiplo acesso por divisão de código (CDMA, do inglês *code division multiple access*) [29], o domínio do *código* é adicionado. Já em sistemas que utilizam multiplexação por divisão em frequências ortogonais (OFDM, do inglês *orthogonal frequency division multiplexing*) [30], o domínio da *frequência* também está presente. No caso particular de sistemas híbridos CDMA-OFDM recentemente estudados na literatura, podemos indentificar quatro domínios espaço, tempo, código e frequência estão simultaneamente presentes.

Do ponto de vista do processamento do sinal, uma primeira abordagem consiste em fundar ou combinar dois ou mais domínios de forma que se possa utilizar modelos algébricos matriciais para a manipulação dos sinais ao nível do transmissor e do receptor. Esta tem sido a abordagem mais utilizada na literatura. A segunda abordagem, a qual exploramos neste trabalho, consiste em preservar a natureza algébrica multidimensional dos sinais, ou ainda, a das estatísticas lançando mão da álgebra multilinear. Neste caso, as decomposições tensoriais podem ser utilizadas para modelar o sinal recebido, estabelecendo-se uma associação direta entre os parâmetros que caracterizam a decomposição tensorial e os parâmetros físicos do enlace de comunicação (símbolos transmitidos, coeficientes de atenuação do canal, comprimento de resposta ao impulso do canal, coeficientes do codificador, etc) [20]. Cada domínio da informação é mapeado em uma dimensão do tensor, a dimensionalidade do mesmo depende de parâmetros físicos do sistema (número de antenas transmissoras e receptoras, tamanho do bloco de dados recebidos, comprimento do código, número de frequências de transmissão paralelas, etc),

e sua ordem corresponde portanto ao número de domínios considerados no modelo.

O diagrama de blocos da Figura 2 ilustra a aplicação de modelagem tensorial na cadeia transmissor-canal-receptor em um sistema de comunicação com múltiplas antenas transmissoras e receptoras. Os múltiplos domínios dos sinais geralmente presentes no transmissor e receptor são indicados.

Em contraste com métodos baseados em álgebra linear, aqueles baseados em álgebra multilinear levam em consideração a interdependência e redundância existente entre os múltiplos domínios físicos dos sinais mapeados no tensor de dados. Isto traz uma série de benefícios associados ao processamento no transmissor e no receptor [20]:

- No transmissor, os benefícios estão geralmente associados à flexibilidade de projeto de estruturas de transmissão com diferentes níveis de redundância/diversidade nos domínios do espaço, tempo e frequência. Os diferentes níveis de redundância em cada um destes domínios dos sinais podem ser controlados facilmente a partir do ajuste dos parâmetros do modelo multilinear associado;
- No receptor, a recuperação da informação (equalização e separação cega) não necessita o conhecimento prévio do canal e dispensa o uso de sequências de treinamento. Além disso, os algoritmos de estimação multilineares não se baseiam obrigatoriamente na hipótese de independência estatística entre os sinais transmitidos.

A seguir, são detalhadas as principais aplicações da álgebra multilinear e das decomposições tensoriais para o processamento de sinais em comunicações, com um foco maior em trabalhos recentes.

II. APLICAÇÕES EM SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES DIGITAIS: REVISÃO DA LITERATURA

A. Equalização Cega Multiusuário

Em sistemas de comunicações sem fio, o problema da equalização cega multiusuário consiste em detectar e recuperar conjuntamente os sinais transmitidos por múltiplos usuários co-canais (i.e. que compartilham a mesma faixa de frequência) em canais seletivos em frequência. A popularização desta linha de pesquisa é atribuída em grande parte à exploração do domínio espacial do canal de propagação no receptor. Isto é conseguido através do uso de múltiplas antenas receptoras no receptor equipadas de filtros espaciais ou espaço-temporais que buscam combinar construtivamente os sinais recebidos e cujas saídas são estimações dos sinais transmitidos pelos usuários. A motivação para o uso de estratégias cegas, ou não-supervisionadas, para a equalização multiusuário está na melhoria da eficiência espectral, evitando-se o uso de sequências de treinamento, as quais implicam na perda de tempo útil de transmissão de dados. Através da modelagem tensorial do sinal recebido, o objetivo está na exploração eficiente da redundância (diversidade) nos domínios do espaço, do tempo, da frequência e do código. Isto permite adicionar mais graus de liberdade no processo de separação e equalização conjunta dos sinais, tornando possível a detecção de um maior número de usuários, para mesmo número de antenas receptoras, do

que os métodos tradicionais baseados em modelagem algébrica matricial.

Recentemente, diversos trabalhos têm mostrado o potencial de receptores cegos multiusuários baseados em modelagem tensorial. Os trabalhos [16] e [17] foram os primeiros a identificar a ligação existente entre modelagem tensorial e o processamento espacial de sinais em comunicações, no qual destaca-se a equalização multiusuário. O trabalho seminal [16] mostra que, no contexto de sistemas DS-CDMA, o sinal recebido em um arranjo de antenas segue um modelo CP trilinear. Baseado nesta modelagem, é proposto um receptor cego determinístico para a separação e equalização multiusuário capaz de operar sem o conhecimento do canais e dos códigos de espalhamento dos usuários. A partir daí, uma série de outras abordagens multilineares tem sido desenvolvidas utilizando diferentes modelos tensoriais, que podem ser vistos como generalizações do modelo CP.

O problema de equalização multiusuário em sistemas DS-CDMA com desvanecimento seletivo em frequência é abordado em [31], [32], [19], [33], [34]. Já em [35], um receptor cego baseado no modelo CP é proposto para a estimação conjunta do canal e do desvio de frequência em sistemas OFDM. Em [36], [37], um receptor cego baseado em um modelo CP com restrições é proposto para sistemas que utilizam superamostragem no receptor. Em particular, o trabalho [19] desenvolve um modelo tensorial unificado para sistemas de comunicações sem fio baseados em superamostragem, DS-CDMA, e OFDM. O trabalho propõe um receptor tensorial baseado no algoritmo ALS (do inglês, *Alternating Least Squares*) para a separação dos usuários. As abordagens propostas em [33], [34], voltadas para sistemas DS-CDMA, fazem uso de modelos tensoriais em bloco e apresentam condições de unicidade que garantem a estimação cega do canal e dos símbolos. Utilizando a decomposição tensorial Tucker com restrições, o problema de equalização multiusuário é ainda abordado em [38] levando-se em consideração diferentes cenários de propagação.

B. Modelagem de Transceptores MIMO

Por outro lado, arquiteturas de transmissão e recepção MIMO baseadas no uso de múltiplas antenas transmissoras e receptoras, desempenham papel fundamental na definição das tecnologias a serem implementadas na quarta geração dos sistemas de telecomunicações digitais e, em particular, dos sistemas de comunicações móveis [39]. É sabido que a importância dos sistemas MIMO neste cenário está fortemente ligada aos ganhos teóricos de capacidade e eficiência espectral sem precedentes que os mesmos podem oferecer, uma vez que a capacidade do canal é aumentada linearmente com o aumento do número de antenas empregadas no transmissor ou no receptor [40], [41], [42]. Para permitir a extração dos ganhos teóricos de capacidade e eficiência espectral em ambientes de propagação sem fio realistas, caracterizados por forte interferência de múltiplos usuários e seletividade em frequência do canal, técnicas de processamento de sinais eficientes e modelos de transceptores MIMO facilmente configuráveis desempenham papel fundamental.

Do ponto de vista do receptor, a maioria das estruturas de recepção existentes assumem o conhecimento prévio do canal no processo de detecção. Os indicadores de desempenho geralmente assumem uma estimação perfeita (sem erros) do canal no receptor, o que é uma consideração irrealista na prática. Além disso, as soluções propostas se baseiam no uso de estruturas sub-ótimas de filtragem linear e não-linear sensíveis ao ruído e à propagação de erro. No projeto de um modelo de transceptor MIMO, duas questões de projeto devem ser levadas em conta, às quais estão ligadas ao processamento do sinal no transmissor e no receptor, respectivamente:

- Como projetar arquiteturas de transmissão híbridas que combinem ganhos de diversidade e de multiplexação em diferentes proporções, e que seja flexível no sentido de oferecer diferentes modos de transmissão adaptáveis ao estado do canal ?
- Como projetar um receptor que realize conjuntamente as operações de estimação do canal e decodificação, mesmo em situações adversas de forte interferência?

Em diversas contribuições recentes, nós temos demonstrado que o uso de álgebra multilinear é uma alternativa promissora que atende às questões levantadas acima [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52]. Neste trabalhos, decomposições tensoriais foram desenvolvidas e utilizadas na modelagem de transceptores MIMO. Em [43], as propriedades de unicidade da decomposição CP são exploradas na concepção de um esquema de codificação espaço-temporal que possibilita a detecção cega dos símbolos transmitidos. Através do uso de uma decomposição CP com restrições, uma estrutura de precodificação linear combinando espalhamento e multiplexagem espaço-temporal é desenvolvida [44]. Uma extensão deste trabalho para sistemas OFDM é apresentada em [45]. Em trabalhos subsequentes [46], [47], a decomposição CP com restrições é explorada no projeto de um transceptores MIMO com espalhamento espaço-temporal em blocos. O foco da contribuição [46] está na codificação espaço-temporal em sistemas MIMO múltiplo acesso, enquanto que em [47] aborda mais especificamente o cenário *downlink*.

Uma versão generalizada da decomposição CP, chamada CONFAC (do inglês, *Constrained Factors*) é proposta em [50], [48] e aplicada no projeto de transceptores MIMO baseados em codificação ortogonal espaço-temporal no transmissor e detecção cega no receptor. No transmissor, a estrutura do tensor núcleo da decomposição CONFAC define o padrão de alocação de símbolos e códigos às antenas transmissoras. No receptor, um algoritmo é proposto para a estimação conjunta do canal e dos símbolos. Em uma outra contribuição recente [52], é proposta uma estrutura de espalhamento e multiplexação espaço-temporal baseada na decomposição Paratuck [9]. Este trabalho faz uso dos fatores da decomposição Paratuck na alocação temporal dos símbolos, adicionando um grau de liberdade em relação à abordagem proposta em [48].

Outros resultados mais recentemente demonstram o potencial da modelagem tensorial na exploração da redundância da informação nos diferentes domínios do sinal tais como espaço, tempo, frequência e/ou código [53], [54], [55], [56], [57]. Isto se traduz em um processamento mais flexível no

transmissor além de um processamento cego mais robusto à interferência no receptor. Em [58] é mostrado ainda que o problema de modelagem e estimação conjunta de canal MIMO pode ser abordado através de modelagem tensorial, possibilitando a estimação conjunta das amplitudes, atrasos, e ângulos de chegada e de partida dos multipercursos em ambiguidades.

C. Canais de Comunicação Não-Lineares

Outra interessante aplicação de decomposições tensoriais é no desenvolvimento de técnicas de processamento de sinais para canais de comunicações não-lineares. Diversas são as fontes de distorções não-lineares em sistemas de comunicações. Pode-se citar, por exemplo sistemas do tipo *radio over fiber* (ROF) [59], onde o conversor elétrico-óptico pode introduzir distorções não-lineares importantes. Os amplificadores de potência também constituem fontes importantes de distorções não-lineares em sistemas de comunicação satelitários [60], WCDMA [61] e OFDM [62]. Diversas técnicas de processamento tensorial de sinais visando recuperação da informação em enlaces físicos não-lineares foram propostas nos últimos anos.

Técnicas de estimação de canal e cancelamento de interferências em canais MIMO não-lineares foram desenvolvidas nos últimos anos, tendo como base a utilização de tensores construídos a partir dos sinais recebidos [63], [64], [65], bem como a partir de estatísticas de segunda ordem destes sinais [63], [66], [64], [67]. Estas abordagens provêm condições de unicidade mais suaves que as do caso matricial, permitindo um tratamento com um número reduzido de antenas receptoras. Além disso, a abordagem tensorial possibilita a estimação conjunta de diversos parâmetros de sistema. Uma das técnicas desenvolvidas em [63] pode ser vista como uma extensão da técnica proposta em [68] para o caso de canais não-lineares.

A modelagem tensorial de canais não-lineares também foi usada para a determinação da estrutura e estimação dos parâmetros de canais SISO bloco-estruturados, tais como canais do tipo Wiener, Hammerstein e Wiener-Hammerstein [69], [70], [71].

D. Comunicações Cooperativas

Outra vertente de pesquisa recentemente explorada por alguns autores é o uso de ferramentas matemáticas tensoriais aplicadas a sistemas de comunicações ou redes sem-fio cooperativas [72], [73], [74]. A idéia fundamental de redes cooperativas é a de que os nós funcionem como retransmissores (em inglês, *relays*) do sinal de uma dada fonte, emulando um arranjo de antenas e explorando os benefícios da diversidade espacial distribuída. Em um sistema de comunicação sem-fio cooperativo, qualquer usuário licenciado dentro da área de cobertura pode funcionar como um nó retransmissor. Assim, as comunicações cooperativas podem ser vistas como um sistema MIMO distribuído, onde as múltiplas antenas são emuladas através de vários dispositivos com uma única antena.

Recentemente, alguns autores utilizaram ferramentas de álgebra multilinear para resolver problemas associados a sistemas de comunicação cooperativos. Em [75], uma técnica de

estimação de canal baseada em tensores foi proposta para sistemas *amplify-and-forward* (AF) MIMO com *two-way relaying*, que dependem de um modelo Tucker para o sinal recebido. Em [76], um algoritmo distribuído baseado em tensores foi proposto para estimação de canal e dos sinais transmitidos em um sistema com codificação cooperativa. Ao contrário dos trabalhos anteriormente citados, em [76] a dimensão espacial é explorada de forma distribuída, através da colaboração dos vários nós da rede.

Ainda no contexto das comunicações cooperativas, outra vertente de pesquisa recentemente explorada é o uso de tensores que exploram explicitamente a diversidade de cooperação incorporando os canais cooperativos como uma dimensão do tensor. Visto que muitas das técnicas que são baseadas em decomposições tensoriais tratam os sinais recebidos como variáveis multidimensionais, as diversas portadoras ou o *slots* de tempo usados pelos nós retransmissores podem formar uma das dimensões do tensor. O primeiro trabalho sobre este tema foi desenvolvido recentemente em [77], em que um receptor foi proposto. Neste contexto, a abordagem tensorial permite o tratamento dos sinais recebidos de forma a se explorar conjuntamente as diversidades temporal, espacial e de cooperação, além de outras possíveis fontes de diversidade existentes. Em aplicações envolvendo processamento distribuído em redes de sensores cooperativas, trabalhos recentes têm corroborado a aplicabilidade do processamento tensorial distribuído em sistemas sem fio cooperativos [78].

E. Identificação de sistemas e momentos de ordem superior

A modelagem e a estimação paramétricas de canais em sistemas de comunicação digitais são operações de importância primária. A identificação do modelo de canal pode ser usada no projeto de equalizadores para desconvoluir os sinais recebidos e recuperar a informação transmitida. Os atuais sistemas de comunicação sem-fio tipicamente realizam a identificação e equalização de canal de forma *supervisionada*, ou seja, usando símbolos piloto. Nesta abordagem, seqüências conhecidas *a priori* pelo receptor introduzem uma sobrecarga no sistema de transmissão, reduzindo a vazão efetiva de dados. Por outro lado, as abordagens ditas *não-supervisionadas* utilizam apenas os sinais na saída do canal e possivelmente o conhecimento de alguma hipótese sobre os sinais de entrada. Neste contexto, bem como em diversas aplicações que envolvem a recuperação *cega* da informação, estatísticas de segunda-ordem (ESO) e de ordem superior (EOS) são ferramentas utilizadas há bastante tempo e desempenham papel crucial no processamento de sinais em campos que vão das telecomunicações ao processamento de voz e imagens e às aplicações geofísicas, de múltiplas antenas. Algoritmos baseados em EOS necessitam de um número importante de amostras para se obter boas estimativas das estatísticas do sinal [79].

Quando os sinais de entrada são complexos, as ESO podem não ser capazes de recuperar a informação de fase do sistema, caso ele seja de fase não-mínima, e o uso de EOS torna-se necessário² para a identificação cega de canais de resposta im-

pulsional finita. Além disso, métodos de identificação baseados em ESO são mais robustos ao ruído Gaussiano aditivo, visto que os cumulantes de ordem superior a dois são todos nulos para processos Gaussianos [79]. Estes cumulantes podem ser vistos como tensores que apresentam alta simetria em sua estrutura [80].

Dentre os primeiros resultados que exploram as simetrias e redundâncias dos cumulantes com um formalismo tensorial contam a introdução do conceito de estrutura de autovalores (*autoestrutura*) do tensor de cumulantes de 4^a-ordem [81], [82], onde a propriedade de unicidade da decomposição do tensor de cumulantes já era utilizada como uma vantagem sobre a decomposição em valores singulares (SVD). No entanto, o uso de operações de pré-branqueamento ainda se fazia necessário. A falta de restrição de ortogonalidade da decomposição CP é uma das razões pelas quais este tipo de modelo é frequentemente escolhido para evitar o uso de operações de pré-branqueamento em métodos baseados em EOS e que exploram toda a natureza multidimensional dos tensores de cumulantes de ordem superior a dois [83].

Em outra abordagem, técnicas de fatoração simultânea de matrizes têm sido exploradas juntamente com ESO e EOS desde a introdução do algoritmo de diagonalização aproximadamente conjunta de *automatrizes* (JADE, de inglês: *joint approximate diagonalization of eigenmatrices*) [84] usado para estimar canais de múltiplas-entradas e múltiplas saídas (MIMO) em aplicações de formatação de feixes. A técnica de diagonalização conjunta tornou-se popular desde seu uso no célebre algoritmo SOBI (do inglês: *second-order blind identification*) [85] que se baseia na fatoração aproximadamente simultânea de um conjunto de matrizes de correlação permitindo assim a separação de fontes com diferentes conteúdos espectrais, também no contexto de canais MIMO instantâneos.

Mais recentemente, um vínculo formal com a decomposição CP e técnicas de diagonalização conjunta foi estabelecido [86], [87], [88], [89]. Algoritmos sujeitos a condições de unicidade menos severas foram então propostos, explorando a estrutura da matriz de quadricovariância, como os algoritmos FOBI [90] e ICAR [91], para os casos sub- e sobredeterminados, respectivamente. Neste último caso, o princípio foi estendido para estaísticas de ordem superior à 4^a de forma a considerar o caso de misturas subdeterminadas [92], [93]. Estas técnicas não realizam o pré-branqueamento da forma clássica, mas mantêm a estratégia de dividir o problema em duas etapas de otimização distintas, onde os coeficientes do canal são estimados a partir de uma pré-inicialização com base em uma transformação obtida por decomposição em autovalores (EVD).

Em [83] propõe-se uma discussão mais profunda sobre abordagens recentes usando a decomposição CP para explorar as simetrias dos cumulantes de 4^a ordem, eliminando o uso do pré-branqueamento no caso SISO e, tanto no caso SISO como MIMO, apontando soluções para o problema de identificação cega pela otimização de uma única função de custo, no sentido dos mínimos quadrados. Ressalte-se ainda que a decomposição CP permite que se considere o caso subdeterminado, mesmo restrita a condições quanto à quantidade de fontes tratáveis. Este problema tem recebido significativa atenção da comuni-

² Neste caso o uso de EOS é obrigatório, a menos que informações adicionais sobre a entrada sejam conhecidas, como no caso de fontes ciclo-estacionárias, comuns em sistemas de comunicações digitais

dade científica na forma de diferentes abordagens tensoriais que incluem: a decomposição de quânticos em somas de potências de formas lineares [94]; o uso de transformações congruentes [93] explorando o conceito de *arranjo virtual* [95], [96]; e o uso de derivadas de ordem elevada da função característica multivariada [97]. Além disso, o problema de identificação de sistemas MIMO usando a decomposição CP também tem sido abordado em um contexto que envolve técnicas no domínio da frequência usando tensores de EOS [98]. Estas abordagens também incluem o caso subdeterminado [99], [100], [101].

F. Geometria da Informação

Embora a representação geométrica seja uma constante no desenvolvimento de métodos de processamento de sinais, a consideração formal de tais aspectos no processo de síntese e análise é raramente observada nos trabalhos atuais. Uma vez que a geometria, quer seja do processo de transmissão/recepção quer seja da própria unidade de informação, porta uma grande quantidade de características inerentes aos sistemas, é importante que tais aspectos sejam considerados na maior plenitude possível. Além disso, uma característica importante é que, a informação, de acordo com Shannon [102] é definida em função da probabilidade de ocorrência do evento associado. Isto leva a uma profunda necessidade de compreensão e avaliação da estrutura probabilística envolvida como maneira de aumentar/melhorar o desempenho do mesmo.

Uma das maneiras mais comuns utilizadas nos projetos de sistemas de informação, devido a sua simplicidade de cálculo e análise, é o uso de métricas desenvolvidas nos espaços euclidianos, que são aproximações, na maioria das vezes grosseiras, do comportamento dos espaços probabilísticos que estão em espaços não-euclidianos (e.g. riemannianos). O tratamento de tais aspectos envolve então a necessidade de cálculos em superfícies curvas e probabilísticos, não estudados normalmente em problemas típicos de engenharia. A área que estuda tais mecanismos é chamada de *geometria diferencial*.

Nos últimos anos, a aplicação das técnicas de geometria diferencial no projeto de algoritmos em sistemas de comunicações e processamento de sinais atraiu a atenção de alguns pesquisadores, em particular em variedades de Grassmann ou de Stieffel. Talvez os exemplos os mais usuais sejam a derivação de métodos de otimização para funções de matrizes unitárias [103], [104], a análise dos métodos cegos de separação das fontes [105], a utilização de conceitos de álgebra de Lie em análise de componentes independentes [106], o projeto de códigos espaço-temporais para os sistemas não-coerentes [107], [108] bem como o projeto de modulações digitais em espaços curvos [109].

Em muitos problemas práticos, nós estamos interessados em encontrar uma matriz unitária que minimize uma função de custo dada. Por exemplo, em [107] é mostrado que os “bons” códigos espaço-temporais estão relacionados às matrizes unitárias, onde se calculou a capacidade assintótica de canais multiantenas com desvanecimento rápido em um regime de alta relação sinal ruído (SNR) em função do tempo de coerência e número de antenas transmissoras e receptoras. A

expressão da capacidade tem uma interpretação geométrica como um empacotamento de esferas na variedade de Grassmann. Outra aplicação diz respeito a projeto de vetores formatadores de feixe em canais com desvanecimento Rayleigh e que pode também ser relacionada com o problema Grassmanniano de empacotamento [110]. Assim, pode-se encontrar bons códigos encontrando a matriz unitária que minimiza a probabilidade de erro. Em outros problemas, busca-se a melhor distribuição dos símbolos de uma constelação de modulação digital, levando em conta a curvatura do espaço de transmissão dos sinais de tal maneira a minimizar os impactos da presença de erros de detecção [109].

Além destes, os métodos de separação cega de fontes são caracterizados pela busca de uma transformação, na maioria das vezes linear, que possa remover o efeito da combinação das fontes. Tal problema de otimização pode ser altamente complexo de ser resolvido em um espaço euclidiano, dependendo das características das fontes (voz, dados biomédicos, imagem, etc.) de forma que outros espaços métricos devem ser considerados para fornecer melhores desempenhos [111], [112], [106]. Adicionalmente, mesmo se considerando espaços lineares (planos) é possível se obter ganhos caso a otimização seja realizada por meio de algoritmos que levem em conta a geometria da superfície da função custo, melhorando assim o desempenho [113].

Muitas estruturas importantes em probabilidade, teoria da informação e estatística podem ser tratadas por métodos próprios da geometria diferencial. Como exemplo, um espaço de distribuições de probabilidade pode ser modelado por uma variedade riemanniana. Este é o caso da medida intrínseca do total de informações para estimadores estatísticos proposta por R. Fisher. A matriz de informação de Fisher, segundo H. Cramer e C. Rao [114], define uma métrica riemanniana em um espaço de probabilidades apropriado [115, cap. 2]. Para tal métrica, há várias noções de paralelismo ditas pelas conexões e -afim e m -afim, as quais geometrizam a esperança e a maximização, além da α -conexão de Amari [115]. A linguagem geométrica permite tratar modelos não-lineares em termos de objetos invariantes por sistemas de coordenadas, tais como curvatura e geodésicas. Uma aplicação na área, é a determinação de limitantes de desempenho de estimadores, considerando a curvatura dos espaços das distribuições dos sinais envolvidos, generalizando o limitante de Cramer-Rao para estimadores não-polarizados [104]. Adicionalmente, as métricas de comparação utilizadas precisam estar adequadas aos cenários envolvidos, nestes casos, divergências estatísticas capazes de generalizar métricas como a de Kullback-Leibler são extremamente importantes [116].

Além destes, a separação cega de fontes é altamente relacionada ao processamento estatístico de sinais, dada a necessidade de alguma estimação das funções da densidade da probabilidade das fontes [117]. Assim, as métricas são definidas para comparar as distribuições dos dados recebidos com as suposições sobre distribuição das fontes [118]. Em estratégias clássicas, projeções da distribuição são feitas a fim permitir processar em espaços euclidianos tais como o espaço dos dados. Entretanto, pode ser difícil representar a situação real quando as suposições para as fontes têm um modelo muito

diferente do modelo real [118].

Também, processamento de sinais com restrições, tal como formatação linear de feixes, pode ser visto como uma busca em uma variedade diferenciável cuja dimensão seja dada pelas restrições [119], [120]. Naqueles casos, a Geometria Diferencial ou a Geometria Riemanniana podem ser usadas para fornecer um processamento mais eficiente [121], [122].

Especificamente, quando tentamos avaliar as variedades formadas a partir de espaços de probabilidade, nós estamos no campo da geometria da informação, o qual resulta da aplicação da geometria diferencial na probabilidade, caso de interesse em separação cega de fontes.

Finalmente, a geometria diferencial fornece também ferramentas úteis para as aplicações onde muitas matrizes fornecem uma solução aceitável. Este é o caso, por exemplo, com separação cega de fontes, onde as mesmas podem ser separadas em toda a ordem, ou com qualquer ganho complexo, o que é previsto na geometria diferencial como movimento rígido [123]. Isto acontece também em comunicações sem fio não-coerentes. Neste caso, devido à falta do conhecimento do canal, nós podemos somente estimar o subespaço a que o sinal transmitido pertence, não o próprio sinal [107]. Assim, todas as matrizes que medem o mesmo subespaço fornecem uma solução aceitável. Nos casos como estes, o jogo de soluções aceitáveis pode ser tratado como um único objeto, chamado classe de equivalência. Estas classes de equivalência encontram-se em um espaço de Riemann [124], assim torna-se uma necessidade usar conceitos da geometria diferencial a estes problemas.

Outro aspecto que leva em conta, de forma importante, a geometria do processos envolvidos está relacionada à localização espacial dos nós de um sistema de comunicações móveis, quer seja uma WSN ou uma rede com cooperação através de vários *relays*. Em tais redes de comunicação, principalmente em sistemas sem fio, as características temporais em diferentes escalas (evolução e dinâmica de tráfego, taxa de comunicação, espalhamento de atraso e tempo de coerência, etc) bem como suas características espaciais (distribuição geográfica dos componentes número de antenas transmissoras e receptoras, número de vizinhos mais próximos, etc) possuem um papel fundamental na determinação e análise de desempenho das mesmas.

Entretanto, quando as redes se tornam densas e, principalmente, heterogêneas, a determinação dos padrões de desempenho se tornam difíceis de se conseguir através de análise mais clássicas, devido ao fato de existirem diferentes padrões de propagação, tráfego, distribuição espacial, número de antenas transmissoras/receptoras, recursos disponíveis, etc. Com isso, a utilização de ferramentas que usem métricas capazes de representar o comportamento médio dos usuários na rede, levando-se em conta suas particularidades e características espaciais, no tocante a aspectos de distribuição geográfica e/ou concentração de serviços.

A geometria estocástica (GE) [125], [126] provê métodos e técnicas para a análise de redes de comunicação, tomando como base média de demanda, densidade de usuários (distribuição média dos mesmos), média de utilização dos recursos disponíveis. A GE proporciona a avaliação do de-

sempenho de um protocolo ou dispositivo de comunicação na rede para: diferentes distribuições de usuários, não conhecidas *a priori*; comportamento diversos dos usuários, modelados por algum tipo de distribuição de probabilidade; possibilidade de generalizar várias topologias da rede (completamente ou parcialmente conectada, etc). Desta forma, como modelo geral, pode-se utilizando suas métricas de otimização, para uma dada distribuição (dos usuários, tráfego, concentração de serviços, etc) otimizar caso a caso levando-se em conta as características espaciais do modelo adotado, fato especialmente importante em sistemas MIMO wireless.

III. CAMINHOS E TENDÊNCIAS PARA OS NOVOS SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES DIGITAIS

- Grandes perspectivas se abrem na direção do desenvolvimento de algoritmos eficientes de decomposição tensorial, com capacidade em particular para o rastreamento adaptativo dos fatores da decomposição CP.
- A implementação física (intra-chip) destas novidades e a avaliação de seus impactos tecnológicos também devem ganhar em importância nos próximos anos.
- Algumas pistas ainda relativamente descampadas incluem áreas como a de telecomunicações aeroespaciais, onde recentes avanços nas técnicas de radares MIMO apontam para a grande potencialidade das ferramentas multilíneas no setor.
- Nestes últimos anos, as pesquisas em sistemas de comunicação e redes sem fio têm sido norteadas em parte pela inclusão dos aspectos cognitivos e cooperativos, sob alegações que vão desde a economia de recursos, melhores desempenhos, menor consumo de energia e outros fatores potencialmente capazes de dar um caráter mais sustentável às tecnologias de comunicação. A modelagem tensorial também desempenha um papel importante no tocante a este aspecto, mas direções mais claras ainda precisam ser apontadas para que se possa avaliar melhor os ganhos reais do uso de ferramentas tensoriais no contexto das “comunicações verdes”.
- Considerando-se especificamente as aplicações de tensores sem sistemas cooperativos, pode considerar que os resultados obtidos em [76] e [77] são ainda preliminares, porém bastante promissores. Na linha seguida em [76], acredita-se que novas ferramentas tensoriais para a codificação e decodificação cooperativa precisam ainda ser desenvolvidas, levando-se em consideração cenários mais realistas. Já na linha seguida em [77], a incorporação de outros protocolos de retransmissão, bem como modelos de canais mais realistas são interessantes vertentes de pesquisa a serem seguidos.
- No que diz respeito aos sistemas de comunicações com canais não-lineares, acredita-se que aplicações de ferramentas da álgebra multilinear em sistemas OFDM com amplificadores de potência não-lineares podem fornecer resultados bastante promissores.
- A utilização de métricas não-euclidianas pode permitir ganhos de desempenho com uma complexidade reduzida uma vez que as restrições impostas aos sistemas

de comunicações têm sido cada vez maiores, favorecendo trabalhar em espaços topológicos com restrição, se adequando definitivamente aos conceitos de geometria diferencial e suas aplicações.

- Consideração de novas estratégias de derivação de algoritmos e cálculo de limitantes, nos quais a geometria (do critério, distribuição de probabilidade ou posição geográfica) são levadas em conta indicam um caminho rico de contribuições para os sistemas em consideração comercial.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e à FUNCAP pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

- [1] F. L. Hitchcock, "The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products," *J. Math. Phys. Camb.*, no. 6, pp. 164–189, 1927.
- [2] —, "Multiple invariants and generalized rank of a p-way matrix or tensor," *J. Math. Phys. Camb.*, no. 7, pp. 39–70, 1927.
- [3] R. B. Cattell, "Parallel proportional profiles and other principles for determining the choice of factors by rotation," *Psychometrika*, no. 9, pp. 267–283, 1944.
- [4] L. R. Tucker, "Some mathematical notes on three-mode factor analysis," *Psychometrika*, vol. 31, pp. 279–311, 1966.
- [5] J. D. Carroll and J. Chang, "Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N -way generalization of "eckart-young" decomposition," *Psychometrika*, vol. 35, no. 3, pp. 283–319, 1970.
- [6] R. A. Harshman, "Foundations of the PARAFAC procedure: model and conditions for an "explanatory" multi-mode factor analysis," *UCLA Working papers in phonetics*, vol. 16, no. 1, pp. 1–84, 1970.
- [7] S. Leurgans and R. R. T., "Multilinear models: Applications in spectroscopy," *Stat. Sci.*, no. 7, pp. 289–310, 1992.
- [8] R. Bro, "PARAFAC: Tutorial and applications," *Chemometrics Intell. Lab. Syst.*, vol. 38, pp. 149–171, 1997.
- [9] —, "Multi-way analysis in the food industry: Models, algorithms and applications," Ph.D. dissertation, University of Amsterdam, Amsterdam, 1998.
- [10] A. Smilde, R. Bro, and P. Geladi, *Multi-way Analysis. Applications in the Chemical Sciences*. Chichester, U.K.: John Wiley and Sons, 2004.
- [11] R. Bro, "Multi-way analysis in the food industry, models algorithms, and applications," Ph.D. dissertation, Department of Dairy and Food Science, Royal Veterinary and Agricultural University, Denmark, 1998.
- [12] L. De Lathauwer and B. De Moor, *From matrix to tensor: Multilinear algebra and signal processing*, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 1997, tech. Report ESAT-SISTA/TR 1997-58.
- [13] L. De Lathauwer, "Signal processing based on multilinear algebra," Ph.D. dissertation, Katholieke Univ. Leuven, Leuven, Belgium, 1997.
- [14] P. Comon, "Tensor decompositions: State of the art and applications," in *IMA Conf. Mathematics in Signal Process.*, Warwick, UK, Dec. 18–20 2000.
- [15] D. FitzGerald, M. Cranitch, and E. Coyle, "Non-negative tensor factorisation for sound source separation," *IEE Conference Publications*, vol. 2005, no. CP511, pp. 8–12, 2005. [Online]. Available: <http://link.aip.org/link/abstract/IEECPS/v2005/iCP511/p8/s1>
- [16] N. D. Sidiropoulos, G. B. Giannakis, and R. Bro, "Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 48, no. 3, pp. 810–822, March 2000.
- [17] N. D. Sidiropoulos, R. Bro, and G. B. Giannakis, "Parallel factor analysis in sensor array processing," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 48, no. 8, pp. 2377–2388, Aug. 2000.
- [18] N. D. Sidiropoulos, "Low-rank decomposition of multi-way arrays: A signal processing perspective," in *Invited plenary lecture at IEEE SAM*, Barcelona, Spain, July 2004.
- [19] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and J. C. M. Mota, "PARAFAC-based unified tensor modeling for wireless communication systems with application to blind multiuser equalization," *Signal Processing*, vol. 87, no. 2, pp. 337–351, Feb. 2007.
- [20] A. L. F. de Almeida, "Tensor modeling and signal processing for wireless communication systems," Ph.D. dissertation, University of Nice Sophia-Antipolis, 2008.
- [21] M. Vasilescu and D. Terzopoulos, "Multilinear image analysis for facial recognition," vol. 2, 2002, pp. 511–514 vol.2.
- [22] —, "Multilinear subspace analysis of image ensembles," vol. 2, June 2003, pp. II–93–9 vol.2.
- [23] H. Wang and N. Ahuja, "Facial expression decomposition," Oct. 2003, pp. 958–965 vol.2.
- [24] D. Vlasic, M. Brand, H. Pfister, and J. Popović, "Face transfer with multilinear models," *ACM Trans. Graph.*, vol. 24, no. 3, pp. 426–433, 2005.
- [25] C. Beckmann and S. M. Smith, "Tensorial extensions of independent component analysis for multisubject fMRI analysis," *NeuroImage*, vol. 25, no. 1, pp. 294–311, 2005.
- [26] M. Morup, L. K. Hansen, C. S. Herrmann, J. Parnas, and S. M. Arnfred, "Parallel factor analysis as an exploratory tool for wavelet transformed event-related EEG," *NeuroImage*, vol. 29, no. 1, pp. 938–947, 2006.
- [27] P. Comon, "When tensor decomposition meets compressed sensing," Saint Malo, France, Sep. 27–30 2010, 9th Int. Conf. Latent Variable Analysis, invited keynote.
- [28] J. B. Kruskal, "Three way arrays: rank and uniqueness of trilinear decompositions with applications to arithmetic complexity and statistics," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 18, pp. 95–138, 1977.
- [29] J. G. Proakis, *Digital Communications*. New York: McGraw-Hill, 2001.
- [30] R. D. van Nee and R. Prasad, *OFDM for wireless multimedia communications*. Artech House, 2000.
- [31] N. D. Sidiropoulos and G. Z. Dimic, "Blind multiuser detection in WCDMA systems with large delay spread," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 8, no. 3, pp. 87–89, Mar. 2001.
- [32] A. de Baynast and L. De Lathauwer, "Détection autodidacte pour des systèmes à accès multiple basée sur l'analyse PARAFAC," in *Proc. of XIX GRETSI Symp. Sig. Image Proc.*, Paris, France, Sep. 2003.
- [33] L. de Lathauwer and A. de Baynast, "Blind deconvolution of DS-CDMA signals by means of decomposition in rank-(1,L,L) terms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 4, pp. 1562–1571, 2008.
- [34] D. Nion and L. de Lathauwer, "A block component model-based blind DS-CDMA receiver," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 11, pp. 5567–5579, 2008.
- [35] T. Jiang and N. D. Sidiropoulos, "A direct semi-blind receiver for SIMO and MIMO OFDM systems subject to frequency offset," in *Proc. SPAWC*, Rome, Italy, June 2003.
- [36] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and J. C. M. Mota, "PARAFAC models for wireless communication systems," in *Int. Conf. on Physics in Signal and Image processing (PSIP)*, Toulouse, France, Jan. 31 - Feb. 2 2005.
- [37] —, "PARAFAC receiver for blind multiuser equalization in wireless communication systems with temporal oversampling," in *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Antalya, Turkey, September 4–8 2005.
- [38] —, "Constrained tucker-3 model for blind beamforming," *Elsevier Signal Processing*, submitted, 2007.
- [39] A. J. Paulraj, D. A. Gore, R. U. Nabar, and H. Bolcskei, "An overview of MIMO communications: A key to gigabit wireless," *Proc. of IEEE*, vol. 92, no. 2, pp. 198–218, Feb. 2004.
- [40] G. J. Foschini and M. J. Gans, "On limits of wireless communications when using multiple antennas," *Wireless Pers. Commun.*, vol. 6, no. 3, pp. 311–335, 1998.
- [41] I. E. Telatar, "Capacity of multi-antenna gaussian channels," *European Trans. on Telecomm.*, vol. 10, no. 6, pp. 585–595, Nov. 1999.
- [42] A. Goldsmith, S. A. Jafar, N. Jindal, and S. Vishwanath, "Capacity limits of MIMO channels," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 21, no. 5, pp. 684–702, Jun. 2003.
- [43] N. D. Sidiropoulos and R. Budampati, "Khatri-Rao space-time codes," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 50, no. 10, pp. 2377–2388, 2002.
- [44] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and J. C. M. Mota, "Space-time multiplexing codes: A tensor modeling approach," in *IEEE 7th Workshop on Sig. Proc. Advances in Wireless Commun. (SPAWC)*, Cannes, France, July 2006.
- [45] —, "Tensor-based space-time multiplexing codes for MIMO-OFDM systems with blind detection," in *Proc. IEEE Symp. Pers. Ind. Mob. Radio Commun. (PIMRC)*, Helsinki, Finland, September 2006.
- [46] —, "Multiuser MIMO system using block space-time spreading and tensor modeling," *Elsevier Signal Processing*, vol. 88, no. 10, pp. 2388–2402, October 2008.

- [47] —, “Space-time spreading MIMO-CDMA downlink system using constrained tensor modeling,” *Elsevier Signal Processing*, vol. 88, no. 10, pp. 2403–2416, October 2008.
- [48] —, “A constrained factor decomposition with application to MIMO antenna systems,” *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 56, no. 6, pp. 2429–2442, June 2008.
- [49] —, “Constrained space-time spreading for MIMO-CDMA systems: Tensor modeling and blind detection,” in *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Poznan, Poland, September 2007.
- [50] —, “Constrained tensor modeling approach to blind multiple-antenna CDMA schemes,” *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 56, no. 6, pp. 2417–2428, June 2008.
- [51] —, “Space-time spreading MIMO system using canonical precoding tensor model,” in *Asilomar Conference Sig. Syst. Comp.*, Pacific Grove, CA, November 4-7 2007.
- [52] —, “Space-time spreading-multiplexing for MIMO wireless communication systems using the PARATUCK-2 tensor model,” *Signal Processing*, vol. 89, no. 11, pp. 2103–2116, 2009.
- [53] —, “A trilinear decomposition approach to space-time-frequency multiple-access wireless systems,” in *IEEE Int. Workshop on Sig. Proc. Advances in Wireless Commun. (SPAWC)*, Helsinki, Finland, June 2007.
- [54] —, *Multiuser MIMO Systems Using Space-Time-Frequency Multiple-Access PARAFAC Tensor Modeling*, F. R. P. Cavalcanti and S. Andersson, Eds. Springer, 2009.
- [55] I. L. J. Da Silva, A. L. F. De Almeida, F. R. P. Cavalcanti, R. Baldemair, and S. Falahati, “Improved Data-Aided Channel Estimation in LTE PUCCH Using a Tensor Modeling Approach,” in the *IEEE International Conference on Communications (ICC'10)*, Cape Town, South Africa, May 2010, pp. 1–5.
- [56] —, “A Multi-User Receiver for PUCCH LTE Format 1,” in the *11th IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC'10)*, Marrakech, Morocco, June 2010.
- [57] —, “A Multi-user Receiver for PUCCH LTE in Non-Cooperative Multi-cell Architectures,” in the *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC Fall'10)*, Ottawa, Canada, September 2010.
- [58] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and d. L. R. L. Mota, J. C. M., “Estimation of frequency-selective block-fading MIMO channels using PARAFAC modeling and alternating least squares,” in *Asilomar Conference Sig. Syst. Comp.*, Pacific Grove, CA, October 29 - November 1 2006.
- [59] X. N. Fernando and A. B. Sesay, “A Hammerstein-type equalizer for concatenated fiber-wireless uplink,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 54, no. 6, pp. 1980–1991, 2005.
- [60] S. Benedetto and E. Biglieri, “Nonlinear equalization of digital satellite channels,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 1, no. 1, pp. 57–62, Jan. 1983.
- [61] A. J. Redfern and G. T. Zhou, “Blind zero forcing equalization of multichannel nonlinear CDMA systems,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 10, pp. 2363–2371, Oct. 2001.
- [62] P. Banelli and S. Ciofari, “Theoretical analysis and performance of OFDM signals in nonlinear AWGN channels,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 48, no. 3, pp. 430–441, Mar. 2000.
- [63] C. A. R. Fernandes, G. Favier, and J. C. M. Mota, “PARAFAC-based channel estimation and data recovery in nonlinear MIMO spread spectrum communication systems,” *Signal Processing*, vol. 91, no. 2, pp. 311–322, Feb. 2011.
- [64] C. A. R. Fernandes, “Nonlinear mimo communication systems: Channel estimation and information recovery using volterra models,” Ph.D. dissertation, University of Nice - Sophia Antipolis, France & Federal University of Ceará, Brazil, Jul. 2009.
- [65] C. A. R. Fernandes, G. Favier, and J. C. M. Mota, “Tensor based receivers for nonlinear radio over fiber uplinks in multiuser CDMA systems,” in *IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, Cannes, France, Sep. 2008.
- [66] —, “Blind identification of multiuser nonlinear channels using tensor decomposition and precoding,” *Signal Processing*, vol. 89, no. 12, pp. 2644–2656, Dec. 2009.
- [67] —, “Blind estimation of nonlinear instantaneous channels in multiuser CDMA systems with PSK inputs,” in *IEEE Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC) workshop*, Recife, Brazil, Jul. 2008.
- [68] N. D. Sidiropoulos, G. B. Giannakis, and R. Bro, “Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 3, pp. 810–823, Mar. 2000.
- [69] A. Y. Kibangou and G. Favier, “Tensor analysis-based model structure determination and parameter estimation for block-oriented nonlinear systems,” *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, Special Issue on Model Order Selection in Signal Processing Systems*, vol. 4, no. 3, pp. 514–525, Jun. 2010.
- [70] —, “Blind equalization of nonlinear channels using a tensor decomposition with code/space/time diversities,” *Signal Processing*, vol. 89, no. 2, pp. 133–143, Feb. 2009.
- [71] —, “Wiener-Hammerstein systems modeling using diagonal Volterra kernels coefficients,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 13, no. 6, pp. 381–384, Jun. 2006.
- [72] A. Sendonaris, E. Erkip, and B. Aazhang, “User cooperation diversity - part I: system description,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 11, pp. 1927–1938, Nov. 2003.
- [73] —, “User cooperation diversity - part II: implementation aspects and performance analysis,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 11, pp. 1939–1948, Nov. 2003.
- [74] J. N. Laneman, D. N. C. Tse, and G. W. Wornell, “Cooperative diversity in wireless networks: efficient protocols and outage behavior,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 50, no. 12, pp. 3062–3080, Dec. 2004.
- [75] F. Roemer and M. Haardt, “Tensor-based channel estimation and iterative refinements for two-way relaying with multiple antennas and spatial reuse,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 11, pp. 5720–5735, Nov. 2010.
- [76] A. Y. Kibangou and A. L. F. de Almeida, “Distributed PARAFAC based DS-CDMA blind receiver for wireless sensor networks,” in *IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, Marrakesh, Morocco, Jun. 2010.
- [77] C. A. R. Fernandes, A. L. F. de Almeida, and D. B. da Costa, “Blind receiver for amplify-and-forward cooperative diversity scheme,” in *IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, San Francisco, USA, Jun. 2011.
- [78] A. Y. Kibangu and A. L. F. de Almeida, “Distributed PARAFAC based DS-CDMA blind receiver for wireless sensor networks,” in *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications, (SPAWC'10)*, vol. 1, Marrakech, Morocco, June 2010, pp. 1–5.
- [79] J. M. Mendel, “Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and systems theory: theoretical results and some applications,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, no. 3, pp. 278–305, mar. 1991.
- [80] P. McCullagh, “Tensor methods in statistics,” in *Monographs on Statistics and Applied Probability*. London: Chapman and Hall, 1987.
- [81] J.-F. Cardoso, “Eigen-structure of the fourth-order cumulant tensor with application to the blind source separation problem,” in *Proc. of IEEE ICASSP*, 1990, pp. 2655–2658.
- [82] —, “Super-symmetric decomposition of the fourth-order cumulant tensor. Blind identification of more sources than sensors,” in *Proc. ICASSP*, Toronto, Canada, 1991, pp. 3109–3112.
- [83] C. E. R. Fernandes, “High-order statistical methods for blind channel identification and source detection with applications to wireless communications,” PhD Thesis, Univ. Nice Sophia Antipolis (France) and Federal Univ. Ceará (Brazil), Sophia Antipolis, France, May 2008.
- [84] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, “Blind beamforming for non gaussian signals,” *IEE Proceedings-F*, vol. 140, no. 6, pp. 362–370, dec. 1993.
- [85] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso, and E. Moulines, “A blind source separation technique using second-order statistics,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 434–444, feb. 1997.
- [86] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, “Independent component analysis and (simultaneous) third-order tensor diagonalization,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 10, pp. 2262–2271, oct 2001.
- [87] E. Moreau, “A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 3, pp. 530–541, mar 2001.
- [88] L. De Lathauwer, B. De Moor, J. Vandewalle, and J.-F. Cardoso, “Independent component analysis of largely underdetermined mixtures,” in *Proc. 4th Int. Symp. on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA 2003)*, Nara, Japan, apr. 2003, pp. 29–34.
- [89] L. De Lathauwer, “A link between the canonical decomposition in multilinear algebra and simultaneous matrix diagonalization,” *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 28, no. 3, pp. 642–666, 2006.
- [90] L. De Lathauwer, J. Castaing, and J.-F. Cardoso, “Fourth-order cumulant-based blind identification of underdetermined mixtures,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 55, no. 6, pp. 2965–2973, jun. 2007.
- [91] L. Albera, A. Ferréol, P. Chevalier, and P. Comon, “ICAR, a tool for blind source separation using fourth order statistics only,” *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 53, no. 10, pp. 3633–3643, oct. 2005, part I.

- [92] L. Albera, A. Ferréol, P. Comon, and P. Chevalier, "Sixth order blind identification of under-determined mixtures - BIRTH," in *Proc. ICA'03, 4th Int. Symp. on Indep. Comp. Anal. and Blind Sig. Sep.*, Nara, Japan, apr. 2003, pp. 909–914.
- [93] L. Albera, A. Ferréol, P. Comon, and P. Chevalier, "Blind identification of overcomplete mixtures of sources (BIOME)," *Linear Algebra Applications*, vol. 391C, pp. 3–30, nov 2004.
- [94] P. Comon, "Blind identification and source separation in 2×3 under-determined mixtures," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 1, no. 52, pp. 11–22, jan. 2004.
- [95] P. Chevalier and A. Ferréol, "On the virtual array concept for fourth order direction finding problem," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, no. 9, pp. 2592–2595, sep. 1999.
- [96] P. Chevalier, L. Albera, A. Ferréol, and P. Comon, "On the virtual array concept for higher order array processing," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1254–1271, apr. 2005.
- [97] P. Comon and M. Rajih, "Blind identification of under-determined mixtures based on the characteristic function," *Signal Processing Elsevier*, vol. 86, no. 9, pp. 2271–2281, sep 2006.
- [98] B. Chen and A. Petropulu, "Frequency domain blind MIMO system identification based on second- and higher order statistics," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 8, pp. 1677–1688, aug. 2001.
- [99] Y. Yu and A. Petropulu, "Robust PARAFAC based blind estimation of MIMO systems with possibly more inputs than outputs," in *Proc. ICASSP*, Toulouse, France, may. 2006, pp. 133–136.
- [100] T. Acar, Y. Yu, and A. P. Petropulu, "Blind MIMO system estimation based on PARAFAC decomposition of higher order output tensors," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 54, no. 11, pp. 4156–4168, nov. 2006.
- [101] Y. Yu and A. P. Petropulu, "PARAFAC based blind estimation of possibly under-determined convolutive MIMO systems," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 56, no. 1, pp. 111–124, jan. 2008.
- [102] C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication," *Bell Systems Technical Journal*, vol. Vol. 27, pp. 379–423, 623–656, July 1948.
- [103] J. H. Manton, "Optimization Algorithms Exploiting Unitary Constraints," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 3, pp. 635–650, March 2002.
- [104] S. T. Smith, "Covariance, Subspace, and Intrinsic Crámer-Rao Bounds," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1610–1630, May 2005.
- [105] J. Xavier, "Blind Identification of MIMO Channels Based on 2nd Order Statistics and Colored Inputs," Ph.D. dissertation, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2002.
- [106] M. D. Plumbley, "Geometrical methods for non-negative ica: Manifolds, lie groups and toral subalgebras," *Neurocomputing*, vol. 67, pp. 161–197, August 2005.
- [107] L. Zheng and D. N. C. Tse, "Communication on the Grassmann Manifold: A Geometric Approach to the Noncoherent Multiple-Antenna Channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 2, pp. 359–383, February 2002.
- [108] J. Xavier and V. Barroso, "Geodesic Lower Bound for Parametric Estimation with Constraints," in *Proceedings of the Fifth IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC2004)*, Lisboa, Portugal, July 11-14 2004.
- [109] R. G. Cavalcante, "Uma Análise da Influência da Curvatura do Espaço em Sistemas de Comunicações," Ph.D. dissertation, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) - Departamento de Telemática, Campinas-SP, Maio 2008.
- [110] D. Love, J. Heath, R.W., and T. Strohmer, "Grassmannian beamforming for multiple-input multiple-output wireless systems," in *Communications, 2003. ICC '03. IEEE International Conference on*, vol. 4, may 2003, pp. 2618 – 2622 vol.4.
- [111] A. Srivastava, "A Bayesian Approach to Geometric Subspace Estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 5, pp. 1390–1400, May 2000.
- [112] A. Manikas, A. Sleiman, and I. Dacos, "Manifold Studies of Nonlinear Antenna Array Geometries," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 3, pp. 497–506, March 2001.
- [113] M. D. Plumbley, "Geometry and Manifolds for Independent Component Analysis," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP2007)*, vol. 4, Honolulu, Hawaii, April 2007, pp. IV–1397–IV–1400.
- [114] M. K. Murray and J. W. Rice, *Differential Geometry and Statistics*, ser. (Monographs on Statistics and Applied Probability). Chapman & Hall, 1993, no. 48.
- [115] S.-I. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, ser. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 2001.
- [116] R. F. Vigelis, "On Musielak-Orlicz Function Spaces and Applications to Information Geometry," Ph.D. dissertation, Departamento de Engenharia de Teleinformática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE, Junho 2011.
- [117] J. M. T. Romano, R. R. de Faissol Attux, C. C. Cavalcante, and R. Suyama, *Unsupervised Signal Processing: Channel Equalization and Source Separation*. CRC Press / Taylor & Francis Group, 2010.
- [118] C. C. Cavalcante, "Sobre Separação Cega de Fontes: Proposições e Análise de Estratégias para Processamento multiusuário," Ph.D. dissertation, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) – DECOM, Campinas, SP - Brasil, Abril 2004.
- [119] S. T. Smith, "Geometric Optimization Methods for Adaptive Filtering," Ph.D. dissertation, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 1993.
- [120] —, "Optimization Techniques on Riemannian Manifolds," *Fields Institute Communications*, vol. 3, pp. 113–146, 1994.
- [121] S. ichi Amari, "Information Geometry on Hierarchy of Probability Distributions," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, no. 5, pp. 1701–1711, July 2001.
- [122] W. Kuhnel, *Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds*. American Mathematical Society, 2002.
- [123] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, ser. Textos Universitários. Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [124] —, *Geometria Riemanniana*, 2nd ed., ser. Projeto Euclides. Rio de Janeiro, Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1998.
- [125] O. E. Barndorff-Nielsen, W. S. Kendall, and M. N. M. van Lieshout, Eds., *Stochastic Geometry: Likelihood and Computation*. Chapman and Hall/CRC, 1998.
- [126] D. Stoyan and W. S. Kendall, *Stochastic Geometry and its Applications*, 2nd ed. Wiley, 2008.