

Alocação de Potência em Redes CDMA: Aspectos de Implementação via Modelos de Verhulst e Perron-Frobenius

Fábio Engel de Camargo; Mario Lemes Proença Jr; Taufik Abrão

Resumo—Neste trabalho, o modelo de Verhulst e o teorema de Perron-Frobenius são aplicados ao problema de controle de potência em redes de comunicação de múltiplo acesso móveis limitadas por interferência. Analisa-se o compromisso desempenho-complexidade de ambos os algoritmos de alocação de potência (PCA - *power control algorithm*), bem como são enfatizados aspectos relativos aos custos computacionais inerentes à possibilidade de implementação desses dois métodos no modo distribuído (DPCA - *distributed PCA*). Como prova-de-conceito, a implementação dos algoritmos é realizada em uma plataforma DSP comercial de ponto flutuante e os resultados em termos de número de ciclos e tempo de processamento indicam a) viabilidade de implementação do PCA-Verhulst em sistemas celulares 2G e 3G; b) elevado custo computacional para o PCA-Perron-Frobenius.

Palavras-Chave—PCA, controle de potência, DSP, Perron-Frobenius, Verhulst.

Abstract—In this work, the Verhulst model and the Perron-Frobenius theorem are applied to the power control problem which is a concern in multiple access communication networks due to the multiple access interference. This paper deals with the performance versus complexity tradeoff of both power control algorithms (PCA), as well as highlights the computational cost aspects regarding the implementability of distributed PCA (DPCA) version for both algorithms. As a proof-of-concept the DPCA implementation is carried out deploying a commercial point-floating DSP platform. Numerical results in terms of DSP cycles and computational time as well indicate a) feasibility of implementing the PCA-Verhulst model in 2G and 3G cellular systems; b) high computational cost for the PCA-Perron-Frobenius model.

Keywords—PCA, Power Control, DSP, Perron-Frobenius, Verhulst.

I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho são consideradas redes de comunicação de múltiplo acesso limitadas por interferência uniportadoras, i.e., sistemas do tipo DS/CDMA (*direct sequence / code division multiple access*). O CDMA é uma técnica de acesso múltiplo de compartilhamento do espectro de frequências baseada no espalhamento espectral dos sinais, ou seja, é um sistema que permite aos usuários transmitirem informações no mesmo intervalo de tempo e compartilharem simultaneamente o mesmo espectro de frequências.

Ao compartilhar o espectro de frequências no mesmo instante, os usuários do sistema CDMA são expostos ao problema conhecido como efeito *near-far*. Este efeito ocorre quando a unidade receptora recebe um sinal com alto nível de potência impossibilitando a detecção de um outro sinal de menor intensidade vindo de uma unidade que se encontra distante. Assim,

para se ter garantias de que todos os sinais cheguem à unidade receptora com o mesmo nível de potência, os transmissores mais distantes são obrigados a elevar seus níveis de potência, contribuindo para um aumento geral do nível de consumo de potência do sistema. Para contornar este problema, os sistemas e redes CDMA requerem a implementação de um rigoroso controle de potência.

No contexto do enlace reverso, o objetivo principal do controle de potência consiste em estabelecer níveis de potências, de tal forma que a relação sinal interferência mais ruído (SINR - *signal-to-interference plus noise ratio*) de cada usuário atinja um limite necessário para um desempenho aceitável. Este limite pode variar, dependendo do nível de desempenho (máxima taxa de erro tolerável) e qualidade de serviço (mínima QoS) requeridos.

Considerando ainda a mobilidade dos usuários e as mudanças das condições de canal, espera-se que o controle de potência seja realizado frequentemente¹. Para isto, técnicas de controle de potência eficientes e de baixo custo computacional são necessárias. Neste trabalho, dois modelos de controle de potência foram avaliados através da implementação em plataforma DSP de ponto flutuante. O primeiro deles, baseado em um método analítico, pode ser caracterizado por uma condição imposta pelo teorema de Perron-Frobenius [1], [2]. O segundo, é um algoritmo iterativo, baseado no modelo populacional de Verhulst [3], [4].

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: A fundamentação matemática do modelo de controle de potência é introduzida na Seção II. Na Seção III e IV são enunciados os problema de controle de potência na forma analítica e através do modelo de Verhulst, respectivamente. Os resultados numéricos são descritos na Seção V, e na Seção VI é analisada a complexidade dos PCAs propostos. Finalmente, as conclusões são feitas na Seção VII.

II. MODELO DE SISTEMA E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE DE POTÊNCIA

Para a construção de cenários típicos em redes CDMA, foi considerado um ambiente com n transmissores e n receptores, classificados de $1, \dots, n$, capazes de transmitir níveis de potência diferente de zero, $P_1, \dots, P_n \in [P_{\min}; P_{\max}]$, os quais são consideradas as variáveis do problema de controle de potência; P_{\max} indica o nível máximo de potência que pode operar cada transmissor. Cada receptor i recebe o sinal enviado pelo respectivo transmissor i . Entretanto, transmissor e

Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, Brasil, E-mails: fabioengel@gmail.com, {proenca,taufik}@uel.br.

¹Em intervalos menores que o tempo de coerência do canal. Nos padrões DS/CDMA 2G, a taxa de atualização do controle de potência é de 800 vezes/seg. Enquanto que para DS/CDMA 3G, esta taxa é dobrada.

receptor não necessitam ser transmissores e receptores físicos; eles podem, por exemplo, fazer referência ao mesmo receptor físico, no entanto, com diferentes canais em frequência, em tempo, códigos ou feixe em uma antena. Neste trabalho, serão consideradas redes operando com única antena no transmissor e receptor (SISO), bem como diferentes códigos de espalhamento, cada um identificando um único usuário móvel ativo.

Definindo $|h_{ij}|$ como o módulo do ganho de canal entre o j -ésimo transmissor para o i -ésimo receptor, a energia do sinal no i -ésimo receptor é $T|h_{ii}|^2P_i$ e a energia de interferência de múltiplo acesso (MAI - *multiple access interference*) no i -ésimo receptor é definida pelo somatório dos sinais interferentes:

$$T \sum_{k \neq i} |h_{ik}|^2 P_k \quad (1)$$

sendo T o período de símbolo ou quadro no qual estão sendo avaliados os sinais de todos os usuários ativos simultaneamente, ocupando a mesma banda do espectro eletromagnético, \mathcal{W} em [Hz]. Adicionalmente, a potência do ruído AWGN (*Additive White Gaussian noise*) inerente ao sistema de comunicação é denotada por $\sigma_i^2 = N_0\mathcal{W}$ [W], sendo N_0 a densidade espectral de potência unilateral de ruído. Isto nos possibilita definir a relação sinal-interferência mais ruído (SINR - *signal to interference plus noise ratio*) para o i -ésimo par receptor/transmissor:

$$\gamma_i = F_i \frac{|h_{ii}|^2 P_i}{\sigma_i^2 + \sum_{k \neq i} |h_{ik}|^2 P_k}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

sendo $F_i = T/T_c$ o ganho de processamento do i -ésimo usuário e T_c o período de chip do sistema DS/CDMA.

Para uma adequada formulação do problema de otimização de potência, faz-se necessário a definição de uma SINR de limiar, γ_i^{th} , a qual garante a mínima SINR para o estabelecimento da comunicação com a mínima qualidade de serviço (QoS - *quality of service*) aceitável, i.e., máxima taxa de erro de bit (ou símbolo, ou ainda quadro) tolerável, entre outros parâmetros que caracterizam a QoS. Sendo assim, a seguinte condição deve ser garantida:

$$\gamma_i = F_i \frac{|h_{ii}|^2 P_i}{\sigma_i^2 + \sum_{k \neq i} |h_{ik}|^2 P_k} \geq \gamma_i^{th}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Em particular, para sistemas CDMA com portadora única, o vetor de potência ótimo, que minimiza a soma total de potência transmitida, será aquele o qual tornará as desigualdades de (3) em igualdades [5]. Esta conclusão é válida também para redes de múltiplo acesso multiportadoras, como por exemplo redes de comunicação baseadas no princípio de multiplexação por divisão de frequência ortogonal (OFDM), combinado ao DS/CDMA, gerando o sistema MC-CDMA [6]. No entanto, por simplicidade de exposição, neste trabalho será considerado apenas redes CDMA uniportadoras. Porém, ressalte-se que em ambos os tipos de redes, uni ou multiportadora, o teorema de Perron-Frobenius torna-se de grande importância a fim de comprovar as condições de existência e unicidade da solução ótima para o problema do controle de potência a ser considerado.

III. MODELO ANALÍTICO PARA O PROBLEMA DO CONTROLE DE POTÊNCIA

De modo conveniente, podemos adequar as inequações de (3) em um formato matricial, a fim de determinar o vetor de potência ótimo de modo analítico. Para isto, estabelecemos

$$G_{ij} = \begin{cases} \frac{|h_{ij}|^2}{F_i |h_{ii}|^2} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}, \quad q_i = \frac{\sigma_i^2}{F_i |h_{ii}|^2}$$

e substituímos em (3). Desta maneira, o problema primordial de alocação de potência pode ser escrito na forma matricial como [7]:

$$\Gamma(\mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{q}) \leq \mathbf{P} \quad (4)$$

$$\text{com } \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1^{th} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n^{th} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & G_{1n} \\ & \ddots & \\ G_{n1} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}, \quad \text{e } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}. \text{ Assumindo } \mathbf{A} = \Gamma\mathbf{G} \text{ e } \Gamma\mathbf{q} = \mathbf{b}, \text{ então temos}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} \geq \mathbf{b} \quad (5)$$

Por definição temos que o vetor de potência que transforma as n inequações de (3) em igualdades também minimiza a soma das potências transmitidas. Isto nos permite calcular a potência ótima:

$$\mathbf{p}_o = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \quad (6)$$

com \mathbf{A} consistindo em uma matriz regular não negativa com a diagonal principal igual a zero. A existência de uma solução positiva \mathbf{p} , para cada \mathbf{b} , estará condicionada ao fato de que todos os elementos da inversa de $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ sejam positivos para todo $\mathbf{A} \geq 0$, i.e.:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geq 0 \quad (7)$$

Do teorema de Perron-Frobenius [1], [2] segue que (7) será verdadeiro se e somente se o módulo do raio espectral de \mathbf{A} , definido aqui por $\rho(\mathbf{A})$, for estritamente menor que 1:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geq 0 \text{ se e somente se } \rho(\mathbf{A}) = |\lambda_{\max}(\mathbf{A})| < 1 \quad (8)$$

Entretanto, o procedimento de verificação de (8), através da determinação dos autovalores de \mathbf{A} , torna-se custoso à medida que cresce o grau do polinômio característico da matriz em questão. Por este motivo, optou-se neste trabalho pelo uso do Método da Potência (MP) [8]. O MP consiste em aproximações sucessivas sobre o maior autovalor em módulo de uma matriz quadrada, desprezando o cômputos dos demais autovalores, desnecessários para o nosso problema.

Portanto, adicionalmente ao método analítico aplicado ao problema de controle de potência, têm-se o custo empregado na determinação da viabilidade do método, uma vez que as condições impostas, como o estado momentâneo do canal e a γ_i^{th} , podem inviabilizar a determinação de um vetor de potência ótimo em (6). Como alternativa, tem-se os métodos iterativos, como por exemplo, o modelo de controle de potência de Verhulst [3], os quais buscam uma aproximação do vetor de potência que satisfaz o problema em questão.

IV. MODELO DE CONTROLE DE POTÊNCIA DE VERHULST

O modelo descrito por Verhulst permite que se possa fazer previsões bastante precisas sobre a evolução temporal do número de indivíduos de uma determinada espécie [4]. O modelo de Verhulst é dado por:

$$\dot{p} = z(p) = p \left(1 - \frac{p}{p^*} \right) \quad (9)$$

As condições impostas pelo ambiente natural, como disponibilidade de espaço físico e alimentos consideradas no termo p^* , impedem que uma espécie em um dado instante, denotado por $p(t)$ tenha um crescimento ilimitado.

Este modelo foi adaptado de forma a se tornar aplicável ao controle de potência em redes de comunicação de múltiplo acesso móveis [3]. Para isto, basta integrar (9) analiticamente, obtendo-se:

$$p(t) = \frac{\exp(t)p(0)p^*}{p^* + p(0)[\exp(t) - 1]} \quad (10)$$

No qual o comportamento assintótico é dado por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p^* \quad \forall p(0) > 0 \quad (11)$$

Neste caso, se a condição inicial $p(0)$ for maior que p^* , a primeira derivada de (10) p será sempre negativa, e então $p(t)$ decrescerá. Caso contrário, onde $p(0)$ é menor p^* , a primeira derivada de (10) será positiva e $p(t)$ crescerá em direção ao seu valor assintótico [4].

Supondo a necessidade da análise simultânea de diversas espécies, no nosso caso, o controle de potência de todos os usuários, podemos reescrever (9) na forma matricial:

$$\dot{\mathbf{p}} = z(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{p} \oslash \mathbf{p}^*) \quad (12)$$

sendo \otimes e \oslash operadores matriciais ponto-a-ponto de multiplicação e divisão, respectivamente, com $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_U]^T$, $\mathbf{u} = [1, 1, \dots, 1]^T$ e $\mathbf{p}^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_U^*]^T$ e U o número de usuários. Assumindo que o vetor de potência evolui da mesma forma que no modelo biológico original de Verhulst, e que \mathbf{p} estará suficientemente próximo de \mathbf{p}^* após n iterações seguidas, então podemos reescrever a partir de (5)

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p}^* = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b} \quad (13)$$

Aplicando (13) em (12) obtemos

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \otimes [\mathbf{u} - \mathbf{p} \oslash (\mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b})], \quad (14)$$

Portanto, a função $z(\cdot)$ resulta em:

$$z(-(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} + \mathbf{b}) = \mathbf{p} \otimes [\mathbf{u} - \mathbf{p} \oslash (\mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b})] \quad (15)$$

Deste modo, o formato de $z(\cdot)$ dependerá da matriz \mathbf{A} e do vetor \mathbf{b} . A fim de discretizar a equação (14), aplica-se o método de integração numérica de Euler, obtendo-se [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(k+1) &= \mathbf{H}(\mathbf{p}[k]) \\ &= \alpha \mathbf{p}[k] \otimes \{\mathbf{u} - \mathbf{p}[k] \oslash [\mathbf{A}\mathbf{p}[k] + \mathbf{b}]\} \end{aligned} \quad (16)$$

sendo $\mathbf{H}(\cdot) = [H_1(\cdot) H_2(\cdot) \dots H_U(\cdot)]$ as funções de mapeamento, na formato vetorial, dimensão U , nas quais, aplicando-se a cada um dos K termos do vetor de equações em (14), resulta:

$$\begin{aligned} H_i(\mathbf{p}[k]) &= (1 + \alpha)p_i[k] - \frac{\alpha}{\gamma_i^{th}} \mu_i(\mathbf{p}) p_i^2, \\ &= (1 + \alpha)p_i[k] - \alpha \left[\frac{\gamma_i[k]}{\gamma_i^{th}} \right] p_i[k] \end{aligned} \quad (17)$$

com $\mu_i(\mathbf{p}) = \frac{|h_{ii}|^2}{\sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} |h_{ij}|^2 p_j}$. A equação matricial em (16) é equivalente ao seguinte conjunto de equações escalares [3]

$$p_i(k+1) = (1 + \alpha)p_i[k] - \alpha \left[\frac{\gamma_i[k]}{\gamma_i^{th}} \right] p_i[k], \quad i = 1, \dots, U \quad (18)$$

sendo $p_i[k]$ e $p_i(k+1)$ as potências do i -ésimo usuário nas iterações k e $k+1$, respectivamente; $\gamma_i[k]$ é a SINR do usuário na k -ésima iteração; γ_i^{th} é a mínima condição de SINR para o usuário i , a qual garante a mínima qualidade de serviço. O coeficiente de aceleração, $\alpha \in [0, 1]$, fixo ou adaptativo [3], é responsável pela taxa de convergência do algoritmo. Adotando-se um fator α adaptativo obtém-se uma aceleração na taxa de convergência do algoritmo às custas de um incremento marginal de complexidade.

V. RESULTADOS NUMÉRICOS

A. Parâmetros de Simulação

Para a construção do cenário de simulação, considerou-se um ambiente de comunicação unicelular com geometria de célula circular, de área $\mathcal{A} = 2 \times 2 \text{ Km}^2$, com a BS posicionada no centro da célula e os usuários móveis distribuídos uniformemente ao redor da BS, sendo d_i a distância Euclidiana entre o i -ésimo usuário móvel e a BS. Neste cenário foram ignoradas o sombreamento e as interferências das células adjacentes. O termo de atenuação de pequena escala do canal, denominado desvanecimento, foi assumido plano e sem linha de visada (Rayleigh plano), o qual pode caracterizado por um processo gaussiano complexo:

$$h_{ij} = (\nu_{ij} + g_{ij}\sqrt{-1}) / \sqrt{2} \quad (19)$$

sendo ν_{ij} e g_{ij} processos Gaussianos independentes e identicamente distribuídos, isto é, ambos seguem uma distribuição $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, de média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = d_{ij}$, sendo d_{ij} a distância Euclidiana entre o receptor i e o transmissor j . Ademais, nas simulações, a SINR mínima a ser garantida foi pré-determinada para diferentes faixas de usuários. Tabela I exhibe os valores adotados e demais parâmetros utilizados nas simulações computacionais, tendo em vista analisar o desempenho e a complexidade de ambos os PCAs iterativos, baseados nos modelos de Verhulst e no Método da Potência.

B. Simulação na Plataforma DSP TMS320C6713

Tendo como objetivo a implementação dos dois modelos na plataforma DSP, optou-se por emular as condições de canal a partir da ferramenta MATLAB instalada em um computador pessoal. No DSP, ocorreu o processamento dos algoritmos de controle de potência sob análise. Desta forma, a cada nova realização, as condições de canal são atualizadas (amostras) seguindo a distribuição estatística em (19), para cada usuário ativo. Esta nova condição de canal é então enviada para a plataforma DSP, que por sua vez, realiza os cálculos e retorna ao MATLAB o resultado do vetor de potência ótimo obtido pelo algoritmo. Ressalte-se que as mesmas condições de canal foram aplicadas aos dois algoritmos.

TABELA I
 PARÂMETROS DE MODELO, SISTEMA E CANAL UTILIZADOS

Parâmetro	Valores
DS-CDMA	
SINR mínima de 2 a 5 usuários	$\gamma^{th} = 3, 16 \approx 5(dB)$
SINR mínima de 6 a 10 usuários	$\gamma^{th} = 1, 60 \approx 2(dB)$
SINR mínima de 11 a 14 usuários	$\gamma^{th} = 1, 12 \approx 0.5(dB)$
Faixa de Potência de Transmissão	$P_{\min} = 0; P_{\max} = 600$ [mW]
Potência de ruído	$\sigma_i^2 = 2 \times 10^{-13}$ [mW], $\forall i$
Ganho de processamento	$F_i = 15, i = 1, \dots, U$
Distância máxima entre BS e MT	$d_{max} = 1000$ m
Tipo de Canal	NLOS: Rayleigh plano
Modelo de Verhulst	
Coefficiente de aceleração	$\alpha = 0.8$
Número máximo de iterações	$\mathcal{I}_{\max}^v \in [0; 150]$
Modelo Analítico – Método da Potência	
Tolerância para convergência	$\epsilon = 10^{-5}$
Número máximo de iterações	$\mathcal{I}_{\max} = 15$

Devido às restrições de processamento no DSP, que podem resultar em perda do sincronismo na troca de informações com o MATLAB, optou-se por realizar 100 realizações para cada cenário sob análise. Para avaliar a qualidade das soluções do PCA de Verhulst, utilizou-se a figura de mérito erro quadrático médio normalizado (NMSE – *normalized mean square error*):

$$NMSE_v[k] = \left\langle \frac{\|p_v[k] - p_o[k]\|^2}{\|p_o[k]\|^2} \right\rangle, \quad k = 1, \dots, \mathcal{I}_{\max}$$

sendo p_v a potência estimada pelo algoritmo Verhulst e p_o a potência ótima, obtida analiticamente via (6), admitindo-se que o problema de alocação de potência apresenta solução; $\|\cdot\|^2$ representa a distância Euclidiana quadrática; $\langle \cdot \rangle$ é o operador média temporal. Resultados para o NMSE de Verhulst, considerando $U \in [2; 14]$, distintos SINR mínimo, γ^{th} (por faixa de número de usuários) e número de iterações na faixa de $k \in [0; 150]$ são mostrados na Fig. 1.

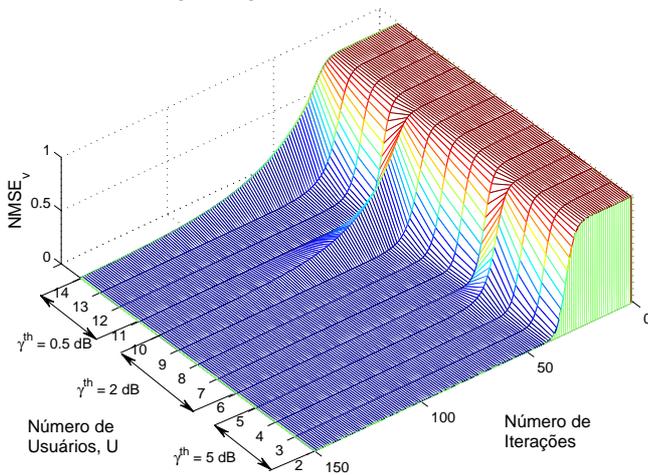


Fig. 1. NMSE para PCA de Verhulst em função do número de usuários e do número de iterações.

Da Fig. 1, verifica-se que o número de iterações na faixa de $\mathcal{I} \in [40; 150]$ é suficiente para que o PCA de Verhulst atinja qualidade na convergência para a faixa de usuários $U \in [2; 14]$, sendo \mathcal{I} crescente em função do incremento do número de usuários (MAI).

VI. ANÁLISE DE COMPLEXIDADE

A análise da complexidade computacional dos algoritmos em questão foi realizada em função do número total de operações de ponto flutuante (*floating-point operations ou flop*). Assim, foi possível expressar a complexidade como uma função em relação ao número de usuários do sistema. Para isto, foi utilizado a definição de flop em [9], onde cada flop representa uma operação de soma, subtração, multiplicação ou divisão entre dois números de ponto flutuante. Adicionalmente, foi incluída a complexidade da versão do algoritmo Analítico, baseado em (6), porém desconsiderando a complexidade introduzida pelo Método da Potência (MP) na determinação da existência da solução ótima (Analítico). Este procedimento foi adotado para se avaliar o impacto da complexidade computacional necessária para se garantir a existência e unicidade do vetor de potência ótimo. A Tab. II resume a complexidade de cada algoritmo.

 TABELA II
 COMPLEXIDADE EM TERMOS DE flops.

Algoritmo	Complexidade
Analítico	$5u^3 - u^2 + 4u + 2 \sum_{i=1}^u i^2$
Analítico + MP	$5u^3 + (4\mathcal{I}_{\max} - 1)u^2 + (7 + 6\mathcal{I}_{\max})u + 2 \sum_{i=1}^u i^2$
Verhulst	$2(\mathcal{I}_{\max}^v - 1)u^2 + 9(\mathcal{I}_{\max}^v - 1)u$

u : número de usuários

A Fig. 2 exibe o comportamento dos algoritmos em função do número de usuários do sistema. Observa-se que para um número pequeno de usuários, $U \leq 16$, o PCA-Verhulst apresenta um custo computacional superior ao analítico. No entanto, ao aumentar o número de usuários, a sua utilização é justificada por apresentar ordem de complexidade menor, $\mathcal{O}(n^2)$, enquanto que o método Analítico é limitado assintoticamente por $\mathcal{O}(n^3)$. Isto se deve ao alto custo envolvido na multiplicação e na inversão de matrizes, sendo aqui utilizado o método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial [10] para a inversão de matrizes, cuja ordem de complexidade resulta $\mathcal{O}(n^3)$ para ambas as operações.

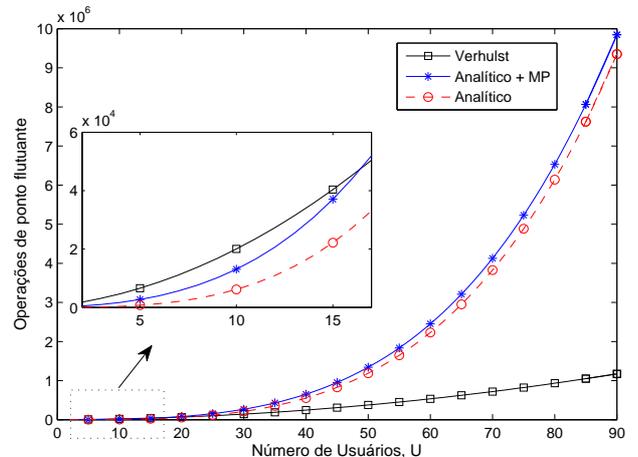


Fig. 2. Operações de ponto flutuante

Adicionalmente, foram obtidas as médias de ciclos realizados no DSP durante a execução dos algoritmos. O resultado é exibido na Fig. 3, considerando número de usuários $U \leq 14$. Novamente, observa-se a mesma tendência do aumento de

complexidade em função do número de usuários do sistema. Desta forma, por meio da ferramenta `cftool` do MATLAB, obteve-se por *fitting* uma equação polinomial para cada algoritmo, a qual descreve o crescimento da complexidade, em termos de número de ciclos executados pelos algoritmos, em função do número de usuários u . As equações obtidas encontram-se na Tab. III.

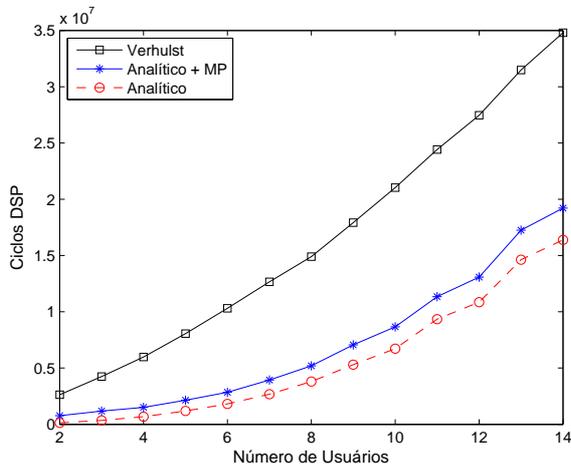


Fig. 3. Ciclos realizados em função do número de usuários

TABELA III
EQUAÇÕES DE NÚMERO DE CICLOS

Algoritmo	Equação
Analítico	$2237u^3 + 74250u^2 - 318300u + 539800$
Analítico + MP	$1925u^3 + 90440u^2 - 327600u + 1179000$
Verhulst	$100600u^2 + 1088000u + 57340$

Para se ter um controle de potência efetivo, sistemas CDMA da segunda geração (IS-95) utilizam uma taxa de atualização na malha de controle de potência igual a 800 atualizações/segundo, o equivalente a uma atualização a cada 1,25 ms. Já em sistemas CDMA de terceira geração (WCDMA) [11], essa taxa de atualização é dobrada, exigindo uma atualização a cada 0,625 ms. A fim de verificar a viabilidade de implementação dos PCAs em plataformas DSP, estimou-se o tempo médio de execução de cada algoritmo $T_{\text{DSP}} = \frac{\# \text{ ciclos}}{f_{\text{clk}}}$. Assim, foi possível obter uma estimativa sobre a possibilidade de uso de um DSP, ou um hardware equivalente, em realizar o controle de potência em sistemas 2G e 3G CDMA. Verifica-se através da Fig. 4 que apesar dos tempos de execução dos dois algoritmos serem ligeiramente superiores aos tempos máximos estabelecidos pelos $T_{\text{atual}}-2\text{G}$ e $T_{\text{atual}}-3\text{G}$, os resultados indicam que o tempo de execução do algoritmo de PCA-Verhulst tem um crescimento polinomial quadrático com o número de usuários, o que torna factível a implementação da solução de controle de potência empregando-se plataforma DSP de mesma arquitetura, no entanto, com um poder/velocidade de processamento superior ao oferecido pela plataforma DSP utilizada neste trabalho. Observa-se ainda comportamento semelhante ao da Fig. 2, no entanto, com a inversão do custo computacional ocorrendo com um número superior de usuários (≈ 30 us.). Isto se deve ao fato do método de contagem de flops adotado [9], o qual não difere multiplicações de adições e subtrações, bem como também por desconsiderar o custo computacional das

outras operações realizadas pelos algoritmos, como atribuições e alocação de memória.

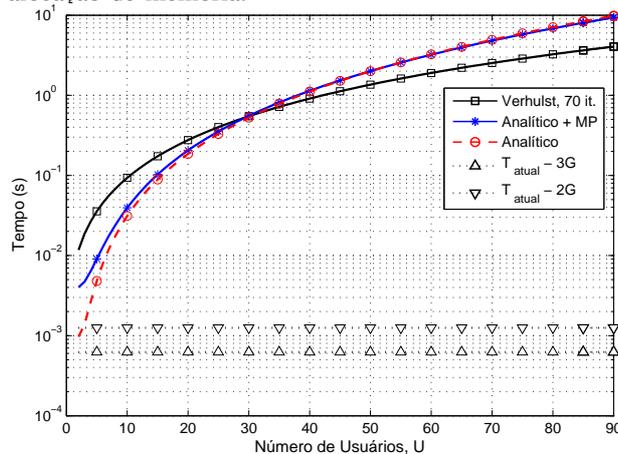


Fig. 4. Tempo de execução dos PCAs em função do número de usuários. Limites de atualização do controle de potência no padrões CDMA 2G e 3G.

VII. CONCLUSÕES

Analisa-se a viabilidade de implementação de dois algoritmos de controle de potência em sistemas DS/CDMA comerciais 2G e 3G. Como prova-de-conceito quantifica-se o número de ciclos DSP e o tempo de execução dos PCAs, para um número crescente de usuários, necessários para se atingir o equilíbrio do controle de potência. Resultados numéricos indicam factibilidade de implementação do PCA-Verhulst empregando-se uma plataforma DSP com poder de processamento marginalmente superior àquela empregada neste trabalho, porém sendo suficiente uma plataforma de mesma arquitetura. Através da análise de complexidade, demonstra-se também o elevado custo de implementação do método analítico para cenários de aplicação realistas, exigindo assim métodos alternativos (Verhulst) capazes de obter versões aproximadas para o vetor de potência ótimo do sistema.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Seneta, *Non-negative Matrices and Markov Chains (Springer Series in Statistics)*. Springer, 2006.
- [2] R. Bapat and T. Raghavan, *Non-negative matrices and applications*. Cambridge Univ. Press, 1997.
- [3] T. J. Gross, T. Abrão, and P. J. E. Jeszensky, "Distributed power control algorithm for multiple access systems based on verhulst model," in *AEU - Intern. Jour. of Electr. and Commun.*, vol. 1, pp. 1–12, 2010.
- [4] P. F. Verhulst, "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement," in *Correspondance mathématique et physique*, vol. 10, pp. 113–121, 1838.
- [5] S. Ulukus and R. Yates, "Stochastic power control for cellular radio systems," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 784 – 798, jun 1998.
- [6] V. Chakravarthy, A. Nunez, J. Stephens, A. Shaw, and M. Temple, "Tdc, ofdm, and mc-cdma: a brief tutorial," *Communications Magazine, IEEE*, vol. 43, pp. S11 – S16, Setembro 2005.
- [7] S. Pillai, T. Suel, and S. Cha, "The perron-frobenius theorem: some of its applications," *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 22, pp. 62 – 75, march 2005.
- [8] D. K. Salkuyeh and F. Toutounian, "Optimal iterate of the power and inverse iteration methods," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 59, no. 7, pp. 1537 – 1548, 2009.
- [9] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [10] T. Pang, *An Introduction to Computational Physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [11] M. Baker and T. Mouslsley, "Power control in umts release '99," in *First Intern. Confer. on 3G Mobile Commun. Tech.*, pp. 36 –40, 2000.