

# Desempenho do Receptor MRC para Modulação $\theta$ -QAM sob Desvanecimento Generalizado

Wamberto J. L. Queiroz, F. Madeiro, Waslon T. A. Lopes e Marcelo S. Alencar

**Resumo**—Este artigo apresenta expressões matemáticas para a avaliação da probabilidade de erro de símbolo (SEP) do esquema de modulação  $\theta$ -QAM com receptor de razão máxima de combinação (MRC) e sob desvanecimento generalizado. As expressões da SEP são obtidas em termos de integrais definidas da função geratriz de momentos (MGF) da relação sinal ruído (SNR) na entrada do receptor MRC. A avaliação numérica das expressões obtidas é então feita para as distribuições  $\eta - \mu$ , que engloba as distribuições de Hoyt, Nakagami- $m$ , Rayleigh e gaussiana unilateral, e  $\kappa - \mu$ , que engloba as distribuições de Rice, Nakagami- $m$ , Rayleigh e gaussiana unilateral.

**Palavras-Chave**—Probabilidade de erro de bit, Desvanecimento generalizado, Modulação QAM paramétrica, Receptor MRC.

**Abstract**—This paper presents closed-form expressions for the symbol error probability (SEP) of  $\theta$ -QAM modulation with maximum ratio combining receiver (MRC) under generalized fading. The SEP expressions are presented in terms of definite integrals of the moment generating function (MGF) of the signal to noise ratio (SNR) at the input of the MRC receiver. The numerical evaluation of the expressions is carried out for the  $\eta - \mu$  distribution, which includes, as special cases, important distributions, such as Hoyt, Nakagami- $m$ , Rayleigh and one-sided Gaussian, as well as for the  $\kappa - \mu$ , which includes, as special cases, Rice, Nakagami- $m$ , Rayleigh and one-sided Gaussian distributions.

**Keywords**—Bit error probability, generalized fading, parametric QAM modulation, MRC receiver.

## I. INTRODUÇÃO

Constelações bidimensionais de sinais, como é o caso das constelações dos esquemas QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) são amplamente utilizadas em sistemas de comunicações. Dentre as aplicações, podem se citadas modems com transmissão assíncrona e sistemas de TV digital.

Na avaliação de estruturas de recepção para esquemas de modulação QAM, um dos principais parâmetros considerados é a probabilidade de erro de bit. Antes de 2002, a avaliação dos efeitos do desvanecimento na recepção de esquemas  $M$ -QAM era ser realizada com expressões matemáticas aproximadas. Somente em 2002, após a publicação de Cho e Yoon [1], quando expressões exatas para a probabilidade de erro de símbolo (SEP) de esquemas QAM sob ruído branco aditivo foram apresentadas, é que a avaliação do desempenho de estruturas como o receptor de razão máxima de combinação (MRC) com esquemas  $M$ -QAM pôde ser descrita por expressões exatas. O receptor MRC tem sido proposto em esquemas de demodulação coerente em ambientes com desvanecimento Rayleigh e Nakagami [2], [3], [4]. Uma análise unificada

da probabilidade de erro de símbolo (SEP) de esquemas de modulação coerente, sob diferentes formas de desvanecimento, foi apresentada em [5].

Com o objetivo de melhorar a robustez ao ruído de constelações QAM quadradas, Sung-Joon introduziu em 2008 [6] as constelações  $\theta$ -QAM que são extensões do conceito de constelação triangulares (TQAM) em que é relaxada a condição de simetria dos símbolos em relação ao centro da constelação, mantendo a disposição dos símbolos nos vértices dos triângulos equiláteros e rotacionando a constelação obtida de um ângulo  $\theta$  arbitrário.

A obtenção de expressões exatas para a SEP de um esquema de modulação sob ruído gaussiano branco aditivo permite, em muitos casos, que essas expressões sejam ponderadas pela função densidade de probabilidade da relação sinal ruído para uma determinada categoria de desvanecimento. A expressão obtida fornece a probabilidade de erro de bit ou de erro de símbolos sob o desvanecimento especificado. Uma das estruturas mais usadas para avaliar a SEP de esquemas QAM sob diferentes categorias de desvanecimento é a estrutura do receptor MRC. Em [7], por exemplo, essa estrutura foi usada na análise da BEP dos esquemas MQAM quadrado e do RQAM para diferentes tipos de desvanecimento, modelados por diferentes distribuições.

Neste artigo é proposto o uso do receptor MRC em conjunto com o esquema de modulação  $\theta$ -QAM e são apresentadas expressões matemáticas exatas para a SEP sob desvanecimento generalizado, modelado pelas distribuições  $\kappa - \mu$  e  $\eta - \mu$ . O uso de diversidade espacial, por meio do receptor MRC, fornece um grau de liberdade a mais para o controle do desempenho do sistema e as funções densidade de probabilidade usadas para modelar o desvanecimento possibilitam a unificação da análise matemática. A principal contribuição do trabalho são as expressões exatas para o cálculo da SEP, escritas em termos da função geratriz de momentos da SNR por ramo do receptor MRC.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção II é realizado o cálculo da SEP para um receptor MRC com  $N$  ramos, sob a consideração de desvanecimento generalizado. Na Seção III é feita a adequação da função geratriz de momentos da SNR por ramo do receptor MRC para o problema tratado. Na Seção IV é apresentado o cálculo da probabilidade de erro de bit. Na Seção V são apresentados alguns grupos de curvas de SEP para diferentes conjuntos de parâmetros e na Seção VI são apresentadas as conclusões.

## II. CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO

Na família parametrizada de esquemas de modulação em amplitude e quadratura  $\theta$ -QAM, apresentada em [8], os autores obtiveram a expressão dada em (1) para a avaliação da SEP sob ruído aditivo gaussiano branco. Em (1) os parâmetros  $c_1$ ,  $c_2$ ,

Wamberto J. L. Queiroz, Waslon T. A. Lopes e Marcelo S. Alencar, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, Brasil, e Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), Campina Grande, Brasil. Francisco Madeiro, Escola Politécnica de Pernambuco, Universidade de Pernambuco, Recife, PB, Brasil. E-mails: {wamberto, madeiro, waslon, malencar}@iecom.org.br.

$$\begin{aligned}
 P_s(\gamma, \theta, M) = & c_1 c_2 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} \exp(-\gamma \delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi)) d\phi + c_1 c_3^2 \int_{\theta}^{\pi-\theta} \exp(-\gamma \delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi)) \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}^2(\theta) d\phi \\
 & + c_1 c_4 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\pi} \exp(-\gamma \delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi)) d\phi + c_1 c_5 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+2\theta}{2}} \exp(-\gamma \delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi)) d\phi \\
 & + c_1 c_6 \int_{2\theta}^{\pi} \exp(-4\gamma \delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi) \operatorname{sen}^2(\theta)) d\phi.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$c_3, c_4, c_5$  e  $c_6$  estão relacionados à geometria da constelação  $\theta$ -QAM e são dados por

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{1}{2\pi M} & c_2 &= 4(\sqrt{M}-2)(\sqrt{M}-1) \\
 c_3 &= \sqrt{2}(\sqrt{M}-1) & c_4 &= 5(\sqrt{M}-2)+6 \\
 c_5 &= 3(\sqrt{M}-2)+2 & c_6 &= \sqrt{M}
 \end{aligned}, \tag{2}$$

em que  $M$  representa a quantidade de símbolos da constelação  $\theta$ -QAM, cujas coordenadas  $(x_m, y_n)$  são dadas por

$$\begin{aligned}
 x_m &= \left[2(n-1)+1-\sqrt{M}\right]d + \left[2\operatorname{mod}(m,2)-1\right]\frac{a}{2} \\
 y_n &= -\left[2(m-1)+1-\sqrt{M}\right]\frac{b}{2},
 \end{aligned} \tag{3}$$

com  $m = 1, \dots, \sqrt{M}$ ,  $n = 1, \dots, \sqrt{M}$ ,  $a = 2d \cos \theta$  e  $b = 2d \operatorname{sen} \theta$ . A metade da distância euclidiana entre símbolos adjacentes da constelação é dada por

$$d = \frac{\sqrt{6E_{av}}}{\sqrt{3M+(4-M)\cos(2\theta)}} \tag{4}$$

e  $\operatorname{mod}(x, y)$  denota a operação módulo após a divisão de  $x$  por  $y$ . O parâmetro  $\delta$  se relaciona à energia média por símbolo,  $E_{av}$ , por

$$\delta = \frac{d}{\sqrt{E_{av}}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3M+(4-M)\cos(2\theta)}}. \tag{5}$$

Para calcular a probabilidade de erro de símbolo desse esquema de modulação, sob desvanecimento generalizado, para um receptor com razão máxima de combinação, é necessário calcular a probabilidade de erro de símbolos, sob ruído gaussiano branco aditivo, condicionada à relação sinal ruído  $\gamma$  na sua saída,  $P(E|\gamma = \sum_{k=1}^N \gamma_k)$ .

Se as variáveis  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$  forem independentes, a probabilidade  $P_s$  pode ser escrita como

$$P\left(E|\gamma = \sum_{k=1}^N \gamma_k\right) = P_S\left(\gamma = \sum_{k=1}^N \gamma_k, \theta, M\right). \tag{6}$$

A partir (6) e de (1) a probabilidade  $P_S\left(\gamma = \sum_{k=1}^N \gamma_k, \theta, M\right)$  pode ser escrita conforme apresentado em (7).

Substituindo (7) em (6), pode-se escrever a probabilidade  $P_s$  como mostrado em (8), em que foi considerada a independência das variáveis  $\gamma_k$ , permitindo que  $N$  integrais múltiplas impróprias fossem reescritas como um produto de

$N$  integrais simples. Sabendo que, para uma variável aleatória positiva, sua função geratriz de momentos (MGF) é dada por  $M_X(s) = \int_0^\infty e^{-sX} p_X(x) dx$ , pode-se reescrever  $P_s$  usando a MGF de  $\gamma_k$ ,

$$\begin{aligned}
 P_s = & c_1 c_2 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} [M_\gamma(\delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi))]^N d\phi \\
 & + c_1 c_3^2 \int_{\theta}^{\pi-\theta} \left[ M_\gamma\left(\delta^2 \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{cosec}^2(\phi)\right) \right]^N d\phi \\
 & + c_1 c_4 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\pi} [M_\gamma(\delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi))]^N d\phi \\
 & + c_1 c_5 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+2\theta}{2}} [M_\gamma(\delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi))]^N d\phi \\
 & + c_1 c_6 \int_{2\theta}^{\pi} [M_\gamma(4\delta^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{cosec}^2(\phi))]^N d\phi.
 \end{aligned} \tag{8}$$

na qual foi considerado que as variáveis  $\gamma_k$  são identicamente distribuídas com MFG  $M_\gamma(s)$ .

### III. CÁLCULO DA SEP SOB DESVANECIMENTO GENERALIZADO

Nesta seção, a expressão em (8) é avaliada para os modelos de desvanecimento caracterizados pelas distribuições  $\eta - \mu$  e  $\kappa - \mu$ . As distribuições  $\eta - \mu$  e  $\kappa - \mu$  são completamente caracterizadas em termos de parâmetros físicos mensuráveis. A distribuição  $\kappa - \mu$  inclui as distribuições de Rice, Nakagami- $m$ , Rayleigh e gaussiana unilateral como casos especiais. A distribuição  $\eta - \mu$  inclui as distribuições de Hoyt, Nakagami- $m$ , Rayleigh e gaussiana unilateral. Para o modelo  $\eta - \mu$ , a fdp da SNR foi apresentada em [9] e pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 f_{\gamma_{\eta-\mu}}(x) = & \frac{2\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu x^{\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}\bar{\gamma}^{\mu+\frac{1}{2}}} \\
 & \cdot \exp\left(-\frac{2\mu x h}{\bar{\gamma}}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\mu H x}{\bar{\gamma}}\right),
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 P_s(\gamma, \theta, M) = & c_1 c_2 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} \prod_{k=1}^N \exp(-\delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi) \gamma_k) d\phi + c_1 c_3 \int_{\theta}^{\pi-\theta} \prod_{k=1}^N \exp\left(-\delta^2 \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{cosec}^2(\phi) \gamma_k\right) d\phi \\
 & + c_1 c_4 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\pi} \prod_{k=1}^N \exp(-\delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi) \gamma_k) d\phi + c_1 c_5 \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+2\theta}{2}} \prod_{k=1}^N \exp(-\delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi) \gamma_k) d\phi \\
 & + c_1 c_6 \int_{2\theta}^{\pi} \prod_{k=1}^N \exp(-4\delta^2 \operatorname{sen}^{\theta} \operatorname{cosec}^2(\phi) \gamma_k) d\phi.
 \end{aligned} \tag{7}$$

em que  $\mu = \frac{E^2[\gamma]}{2\operatorname{Var}[\gamma]} \left[1 + \left(\frac{H}{h}\right)^2\right]$ . Os parâmetros  $H$  e  $h$  são especificados para os Formatos I e II da distribuição  $\eta - \mu$  [9] como

$$\begin{cases} \text{I: } H = \frac{\eta}{1-\eta^2} & h = \frac{1}{4}(2 + \eta^{-1} + \eta) & 0 < \eta < \infty \\ \text{II: } H = \frac{\eta}{1-\eta^2} & h = \frac{1}{1-\eta^2} & -1 < \eta < 1 \end{cases} \tag{10}$$

Para o modelo de desvanecimento  $\kappa - \mu$ , a fdp da SNR apresentada em [9] é dada por

$$\begin{aligned}
 f_{\gamma_{\kappa-\mu}}(x) = & \frac{\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}} x^{\frac{\mu-1}{2}}}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa) \bar{\gamma}^{\frac{\mu+1}{2}}} \exp\left(-\frac{\mu(1+\kappa)x}{\bar{\gamma}}\right) \\
 & \cdot I_{\mu-1}\left(2\mu\sqrt{\frac{\kappa(1+\kappa)x}{\bar{\gamma}}}\right),
 \end{aligned} \tag{11}$$

em que  $\kappa > 0$  é a razão entre a potência total dos componentes de visada direta e a potência dos componentes provenientes da propagação por múltiplos percursos e  $\mu = \frac{E^2[\gamma]}{\operatorname{Var}[\gamma]} \frac{1+2\kappa}{(1+\kappa)^2}$ . As funções geratrizes de momentos dessas duas distribuições foram apresentadas inicialmente em [10] e em ambos os cenários de desvanecimentos foram escritas em termos de uma soma ponderada infinita de funções-G de Meijer [11]. Em 2008, mostra-se em [12] que é possível reescrever  $M_{\gamma_{\eta-\mu}}$  e  $M_{\gamma_{\kappa-\mu}}$  de forma mais compacta, apresentada em (12) e (13),

$$M_{\gamma_{\eta-\mu}}(s) = \left( \frac{4\mu^2 h}{(2(h-H)\mu + s\bar{\gamma})(2(h+H)\mu + s\bar{\gamma})} \right)^{\mu}. \tag{12}$$

$$M_{\gamma_{\kappa-\mu}}(s) = \left( \frac{\mu(1+\kappa)}{\mu(1+\kappa) + s\bar{\gamma}} \right)^{\mu} \exp\left( \frac{\mu^2 \kappa(1+\kappa)}{\mu(1+\kappa) + s\bar{\gamma}} - \mu\kappa \right). \tag{13}$$

Para avaliar a probabilidade de erro de símbolo representada em (8), é necessário calcular  $M_{\gamma}(s)$  para  $s$  igual a  $\delta^2 \operatorname{cosec}^2(\phi)$ ,  $\delta^2 \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{cosec}^2(\phi)$  e  $4\delta^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{cosec}^2(\phi)$ . Para o desvanecimento  $\eta - \mu$ , a função característica  $M_{\gamma_{\eta-\mu}}(s)$  pode ser escrita, a partir de (12), chegando a (14). Para o desvanecimento  $\kappa - \mu$ , a função característica  $M_{\gamma_{\kappa-\mu}}(s)$  pode ser escrita como (15). Como a distribuição Nakagami- $m$  pode ser obtida a partir da distribuição  $\kappa - \mu$  para  $\kappa \rightarrow 0$  e  $\mu = m$ , nota-se que a função característica  $M_{\kappa-\mu}(s)$  coincide com a expressão da função característica do desvanecimento Nakagami- $m$  implícita em [8]. Nesse caso, em que  $\kappa \rightarrow 0$  e  $\mu = m$ , a expressão da SEP coincide com a Expressão 13 de [8]. A distribuição  $\kappa - \mu$  também fornece a distribuição de Rice para  $\mu = 1$  e  $\kappa = k$ . Desse modo, a distribuição de Rayleigh pode ser obtida da

distribuição  $\kappa - \mu$  fazendo  $\kappa = 0$  e  $\mu = 1$ . Se esses valores de  $\kappa$  e  $\mu$  são substituídos em (15), pode-se obter a função característica da relação sinal ruído  $\gamma$  no receptor MRC para diferentes tipos de desvanecimento.

A distribuição  $\eta - \mu$  é uma distribuição geral que pode ser usada para melhor caracterizar variações em pequena escala de sinais sob desvanecimento em enlaces sem linha de visada. A distribuição Nakagami- $m$  pode ser obtida da distribuição  $\eta - \mu$  para  $\mu = m$  e  $\eta \rightarrow 0$  no formato 1 ou  $\eta \rightarrow \pm 1$  no formato 2. Do mesmo modo, ela pode ser obtida fazendo  $\mu = m/2$  e  $\eta \rightarrow 1$  no formato 1 ou  $\eta \rightarrow 0$  no formato 2. Dado que a distribuição Nakagami- $m$  tenha sido obtida, a distribuição de Rayleigh pode ser obtida fazendo  $m = 1$ .

Com um procedimento similar, a distribuição de Hoyt pode ser obtida da distribuição  $\eta - \mu$  fazendo  $\mu = 0,5$ . Nesse caso, o parâmetro  $q$  de Hoyt é relacionado a  $\eta$  por  $q^2 = \eta$  no formato 1 ou por  $q^2 = (1-\eta)/(1+\eta)$  no formato 2. A distribuição de Rayleigh pode ser obtida desse resultado fazendo  $\mu = 0,5$  e  $\eta = 1$  no formato 1 ou  $\eta = 0$  no formato 2.

#### IV. CÁLCULO DA BEP SOB DESVANECIMENTO GENERALIZADO

A família  $\theta$ -QAM incorpora as constelações TQAM e SQAM como casos especiais e, dessa forma, o mapeamento Gray ótimo de bits não é possível para essas estruturas porque a maioria dos símbolos tem mais de quatro vizinhos. Desse modo, surge uma penalidade de mapeamento Gray que tem sido denotada por  $G_p$ . Em [13] foi mostrado que a relação entre a penalidade de mapeamento  $G_p$ , a probabilidade de erro de símbolo  $P_s$  e a probabilidade de erro de bit é

$$P_b = \frac{G_p}{\log_2 M} P_s, \tag{16}$$

em que  $M$  é a ordem da constelação  $\theta$ -QAM e  $G_p$ , para constelações quadradas e triangulares, é dada por [13]

$$G_p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( \frac{\sum_{j=1}^{N(S_i)} B_d(S_i, S_j)}{N(S_i)} \right), \tag{17}$$

em que  $N(S_i)$  é o número de símbolos vizinhos mais próximos do símbolo  $S_i$  e  $B_d(S_i, S_j)$  é a quantidade de bits diferentes entre  $S_i$  e  $S_j$ . Infelizmente, essa expressão não pode ser usada no cálculo da penalidade  $G_p$  para um ângulo  $\theta$  qualquer da constelação  $\theta$ -QAM porque os símbolos, para um  $\theta$  qualquer e diferente de  $\pi/3$  (TQAM) e  $\pi/2$  (SQAM) não contribuiriam da mesma forma para o valor de  $G_p$ .

$$M_{\gamma_{\eta-\mu}}(s) = \begin{cases} \left( \frac{4\mu^2 h \text{sen}^4(\phi)}{(2(h-H)\mu \text{sen}^2(\phi) + \delta^2 \overline{\gamma})(2(h+H)\mu \text{sen}^2(\phi) + \delta^2 \overline{\gamma})} \right)^\mu & s = \delta^2 \text{cosec}^2(\phi) \\ \left( \frac{4\mu^2 h \text{sen}^4(\phi)}{(2(h-H)\mu \text{sen}^2(\phi) + \delta^2 \sec^2(\frac{\theta}{2}) \text{sen}^2(\theta) \overline{\gamma})(2(h+H)\mu \text{sen}^2(\phi) + \delta^2 \sec^2(\frac{\theta}{2}) \text{sen}^2(\theta) \overline{\gamma})} \right)^\mu & s = \delta^2 \sec^2(\frac{\theta}{2}) \text{sen}^2(\theta) \text{cosec}^2(\phi) \\ \left( \frac{4\mu^2 h \text{sen}^4(\phi)}{(2(h-H)\mu \text{sen}^2(\phi) + 4\delta^2 \text{sen}^2(\theta) \overline{\gamma})(2(h+H)\mu \text{sen}^2(\phi) + 4\delta^2 \text{sen}^2(\theta) \overline{\gamma})} \right)^\mu & s = 4\delta^2 \text{sen}^2(\theta) \text{cosec}^2(\phi) \end{cases} \quad (14)$$

$$M_{\gamma_{\kappa-\mu}}(s) = \begin{cases} \left( \frac{\mu(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi)}{\mu(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi) + \delta^2 \overline{\gamma}} \right)^\mu \exp\left( \frac{\mu^2 \kappa(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi)}{\mu(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi) + \delta^2 \overline{\gamma}} - \mu \kappa \right) & s = \delta^2 \text{cosec}^2(\phi) \\ \left( \frac{\mu(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi)}{\mu(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi) + \delta^2 \sec^2(\frac{\theta}{2}) \text{sen}^2(\theta) \overline{\gamma}} \right)^\mu \times \\ \exp\left( \frac{\mu^2 \kappa(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi)}{\mu(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi) + \delta^2 \sec^2(\frac{\theta}{2}) \text{sen}^2(\theta) \overline{\gamma}} - \mu \kappa \right) & s = \delta^2 \sec^2(\frac{\theta}{2}) \text{sen}^2(\theta) \text{cosec}^2(\phi) \\ \left( \frac{\mu(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi)}{\mu(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi) + 4\delta^2 \text{sen}^2(\theta) \overline{\gamma}} \right)^\mu \exp\left( \frac{\mu^2 \kappa(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi)}{\mu(1+\kappa) \text{sen}^2(\phi) + 4\delta^2 \text{sen}^2(\theta) \overline{\gamma}} - \mu \kappa \right) & s = 4\delta^2 \text{sen}^2(\theta) \text{cosec}^2(\phi) \end{cases} \quad (15)$$

Em [8] o cálculo da BEP é feito de forma aproximada, para valores elevados de SNR (SNR > 15 dB). Nessa faixa de valores, os erros cometidos pela estrutura de recepção ocorreriam muito próximos dos limiares das regiões de decisão delimitadas em volta dos símbolos da constelação. Sob essa consideração a BEP pode ser calculada pela usando (8) com os coeficientes  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  e  $c_6$  dados por

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\pi M \log_2 M} & c_2 &= 4(\sqrt{M} - 2)(\sqrt{M} - 1) \\ c_3 &= 2(\sqrt{M} - 1) & c_4 &= 5(\sqrt{M} - 2) + 6 \\ c_5 &= 3(\sqrt{M} - 2) + 2 & c_6 &= 2\sqrt{M} \end{aligned} \quad (18)$$

## V. RESULTADOS

Nesta seção são apresentadas algumas curvas de SEP do esquema de modulação  $\theta - QAM$  sob desvanecimento  $\kappa - \mu$  e  $\eta - \mu$  para diferentes conjuntos de parâmetros. Nas Figuras 1 e 2, são ilustradas as curvas da SEP do esquema  $\theta - QAM$  sob desvanecimento  $\kappa - \mu$  com  $\kappa = 0$  e  $\mu = m$ , respectivamente para ordens de diversidade  $N$  iguais a 1 e 2. O caso em que  $\kappa = 0, \mu = 3.0$  e  $N = 1$  corresponde ao desvanecimento Nakagami e pode-se perceber que as curvas apresentadas na Figura 1 coincidem exatamente com as curvas apresentadas na Figura 6 em [8].

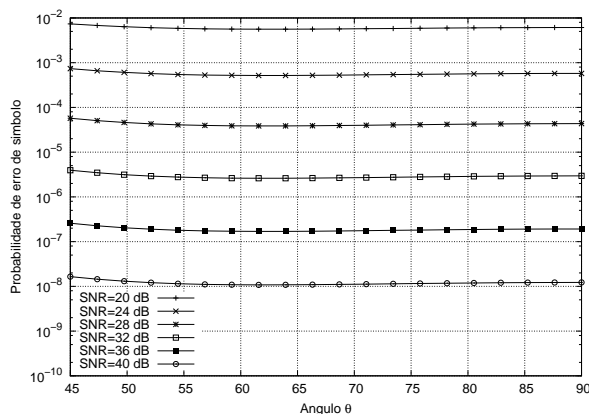


Fig. 1. Gráficos da SEP do esquema  $\theta - QAM$  com  $M = 16$  sob desvanecimento  $\kappa - \mu$  com  $\kappa = 0, \mu = 3.0$ , ordem de diversidade  $N = 1$  e diferentes valores de SNR.

Como se pode perceber pela Figura 2, a diversidade espacial proporcionada pelo receptor MRC tem mais influência na SEP que o ângulo  $\theta$  ótimo no qual as curvas atingem valor mínimo. Esse comportamento é vantajoso porque não é possível realizar mapeamento Gray ótimo para qualquer valor de  $\theta$ .

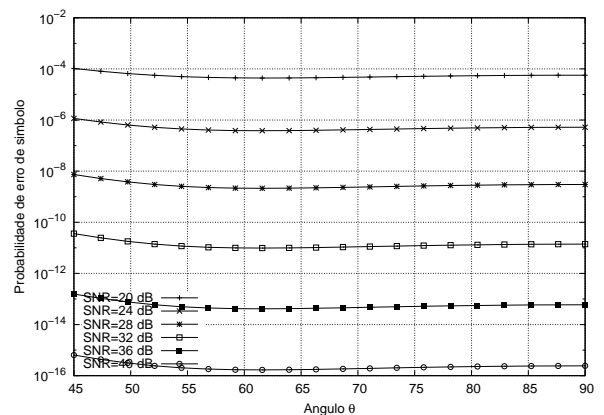


Fig. 2. Gráficos da SEP do esquema  $\theta - QAM$  com  $M = 16$  sob desvanecimento  $\kappa - \mu$  com  $\kappa = 0, \mu = 3.0$ , ordem de diversidade  $N = 2$  e diferentes valores de SNR.

Na Figura 3 são apresentadas curvas da SEP do esquema  $\theta - QAM$  sob desvanecimento  $\kappa - \mu$  e  $\eta - \mu$  para valores de SNR menores. É importante mencionar que as curvas da Figura 3 foram obtidas respectivamente a partir do desvanecimento  $\kappa - \mu$  e do desvanecimento  $\eta - \mu$ . A distribuição  $\eta - \mu$  possui dois formatos [9] e foi usado o formato 2 na avaliação numérica. Nesse formato os parâmetros  $h$  e  $H$  são dados por (10) e o desvanecimento Nakagami pode ser obtido do desvanecimento  $\eta - \mu$  fazendo  $\eta = 0$  e  $\mu = m/2$ . Se for necessário gerar desvanecimento Nakagami com  $m = 3.0$ , por exemplo, deve-se estabelecer  $\eta = 0$  e  $\mu = 3/2$ . A SEP sob as outras categorias de desvanecimento pode ser avaliada conforme descrito na Seção III.

A Figura 3 apresenta o comportamento da SEP sob desvanecimento Nakagami, obtido a partir das distribuições  $\kappa - \mu$ . O caso em que a ordem de diversidade espacial é igual a 2 é mostrado nas Figuras 4 e 5 para as mesmas condições dos parâmetros  $\kappa, \eta$  e  $\mu$ .

Percebe-se mais uma vez pelas Figuras 4 e 5 que aumentar



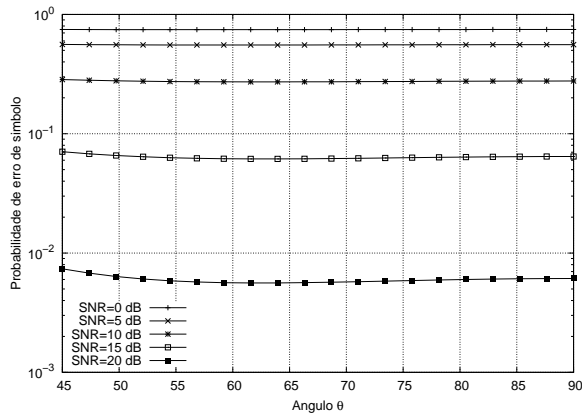


Fig. 3. Gráficos da SEP do esquema  $\theta$ -QAM com  $M = 16$  sob desvanecimento  $\kappa - \mu$  com  $\kappa = 0$ ,  $\mu = 3.0$ , ordem de diversidade  $N = 1$  e diferentes valores de SNR.

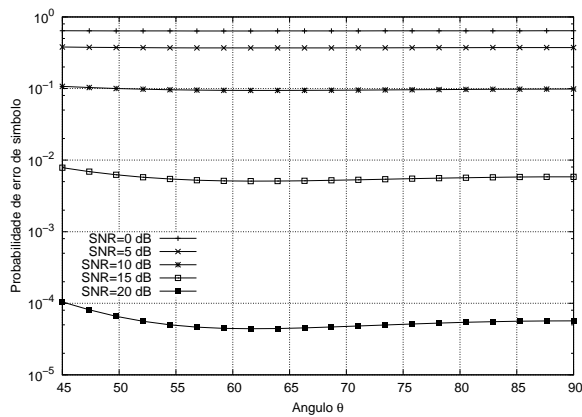


Fig. 4. Gráficos da SEP do esquema  $\theta$ -QAM com  $M = 16$  sob desvanecimento  $\kappa - \mu$  com  $\kappa = 0$ ,  $\mu = 3.0$ , ordem de diversidade  $N = 2$  e diferentes valores de SNR.

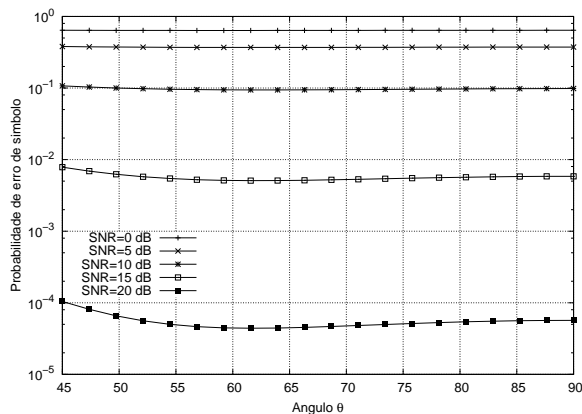


Fig. 5. Gráficos da SEP do esquema  $\theta$ -QAM com  $M = 16$  sob desvanecimento  $\eta - \mu$  com  $\eta = 0$ ,  $\mu = 1.5$ , ordem de diversidade  $N = 2$  e diferentes valores de SNR.

em um grau a diversidade espacial, por meio do acréscimo de um ramo ao receptor MRC, tem mais influência na diminuição da SEP que transmitir os símbolos com o ângulo  $\theta$  ótimo.

## VI. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta expressões exatas e inéditas para o cálculo da SEP do esquema de modulação  $\theta$ -QAM, com receptor MRC e sob desvanecimento generalizado, caracterizado estatisticamente pelas distribuições  $\eta - \mu$  e  $\kappa - \mu$ . A vantagem de usar as distribuições  $\kappa - \mu$  e  $\eta - \mu$  é que ela propiciam uma análise unificada da influência, no desempenho do sistema, de diferentes categorias de desvanecimento. As expressões obtidas para a SEP também podem ser estendidas para o cálculo da probabilidade de erro de bit e podem ser escritas em termos de uma soma ponderada de integrais definidas da relação sinal ruído por ramo do receptor. As curvas obtidas mostram que, em algumas configurações de parâmetros das distribuições, é possível obter ganhos consideráveis de desempenho com acréscimos de um ou dois ramos no receptor MRC.

## REFERÊNCIAS

- [1] K. Cho and D. Yoon, "On the general BER expression of one and two dimensional amplitude modulations," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 7, pp. 1074–1080, 2002.
- [2] C. Kim, Y. Kim, G. Jeong, and H. Lee, "BER analysis of QAM with MRC space diversity in Rayleigh fading channels," in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Communications (PIMRC'95)*, Toronto, ON, Canada, September 1995, pp. 482–485.
- [3] J. Lu, T. T. Tjhung, and C. C. Chai, "Error probability performance of  $L$ -branch diversity reception of MQAM in Rayleigh fading," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, pp. 179–181, February 1998.
- [4] G. Femenias and I. Furió, "Dual MRC diversity reception of TCM-MPSK signals over Nakagami fading channels," *Electronics Letters*, vol. 32, pp. 1752–1754, September 1996.
- [5] M. S. Alouini and A. J. Goldsmith, "A unified approach for calculating error rates of linearly modulated signals over generalized fading channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 9, pp. 1324–1334, September 1999.
- [6] S.-J. Park and M.-K. Byeon, "Irregularly distributed triangular quadrature amplitude modulation," in *Proceedings of the 19th Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC'08)*, Cannes, September 2008, pp. 1–5.
- [7] W. J. L. de Queiroz, M. S. de Alencar, W. T. A. Lopes, and F. Madeiro, "Error probability in multichannel reception with M-QAM, M-PAM and R-QAM schemes under generalized fading," *IEICE Transactions on Communications*, no. 10, pp. 2677–2687, October 2010.
- [8] K. N. Pappi, A. S. Lioumpas, and G. K. Karagiannidis, " $\theta$ -QAM: A parametric quadrature amplitude modulation family and its performance in AWGN and fading channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 58, no. 4, pp. 1014–1019, April 2010.
- [9] M. D. Yacoub, "The  $\kappa - \mu$  distribution and the  $\eta - \mu$  distribution," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 49, no. 1, pp. 68–81, February 2007.
- [10] D. B. da Costa and M. D. Yacoub, "Moment generating functions of generalized fading distributions and applications," *IEEE Communications Letters*, vol. 12, no. 2, pp. 112–114, February 2008.
- [11] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover publications, Inc., 1970.
- [12] N. Y. Ermolova, "Moment generating functions of the generalized  $\eta - \mu$  and  $\kappa - \mu$  distributions and their applications to performance evaluations of communication systems," *IEEE Communications Letters*, vol. 12, no. 7, pp. 502–504, July 2008.
- [13] S.-J. Park, "Bit mapping of triangular quadrature amplitude modulation," in *Proceedings of the 18th Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC'07)*, Athens, Greece, September 2007.