

Considerações sobre o Projeto de Filtros com Especificações Simultâneas de Magnitude e Fase

Ciro André Pitz, Sidnei Noceti Filho e Aurencio Sanczszak Farias

Resumo—Neste trabalho é apresentada uma forma simplificada de determinação das funções de filtros com requisitos simultâneos de magnitude e fase. Para tal, funções de aproximação que atendam requisitos de magnitude são colocadas em cascata com etapas equalizadoras de segunda ordem, buscando melhorar a linearidade de fase. A etapa equalizadora é obtida através de um processo de otimização no qual, a partir de uma nova estratégia de determinação de condições iniciais aqui proposta, a convergência é atingida em todos os casos. Diversos exemplos são apresentados, atestando a validade da estratégia proposta e evidenciando que a melhor solução do ponto de vista da ordem total do sistema deve ser obtida através do estudo particular de cada caso. O programa de equalização utilizado neste trabalho está disponível para *download*.

Palavras-chave—*Equalização de fase, otimização irrestrita, projeto de equalizadores, projeto de filtros seletores.*

Abstract—This paper presents a simplified method for determining filter functions with simultaneous magnitude and phase specifications. For this, the approximation functions that attend magnitude requirements are cascaded with second-order equalizing steps, improving phase linearity. The equalizing steps are obtained through an optimization process in which convergence is achieved in all cases, from a new proposed strategy for determining initial conditions. Several examples are presented, confirming the validity of the proposed strategy and indicating that the best solution in terms of the total order of the system should be obtained from the study of each particular case. The equalization program used in this work is available for *download*.

Keywords—*Phase equalization, unconstrained optimization, equalizers project, selectors filters project.*

I. INTRODUÇÃO

Em sistemas físicos, a fase $\theta(\omega)$ é uma função arco-tangente. Como consequência, os sistemas provocam atrasos de tempo diferentes para os componentes dos sinais o que interfere na resposta transitória e provoca distorções em imagens e no formato de pulsos que são tratados. O efeito da distorção em pulsos em sistemas de telecomunicações é chamado de interferência intersimbólica [1]. No caso de sinais de áudio, a percepção do efeito da distorção da fase foi amplamente discutida na literatura, como, por exemplo, em [2]-[4]. É mostrado que, sob certas condições, essa distorção é percebida em menor ou maior grau por alguns indivíduos. Isso

Ciro André Pitz, Sidnei Noceti Filho e Aurencio Sanczszak Farias, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Depto. de Eng. Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil. E-mails: {ciropitz, sidnei, aurencio}@linse.ufsc.br

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

não chega a ser uma surpresa no sentido em que diferentes pessoas apresentam diferentes sensibilidades também a distorções harmônicas e a variações de frequências.

Um problema de filtragem, que envolve requisitos simultâneos de magnitude e fase, pode não ter solução através do uso de filtros clássicos ou até mesmo do uso de filtros transicionais [5]. As funções desses filtros são de fase mínima, sendo a fase e a magnitude relacionadas pela Transformada de Hilbert.

Considerando uma mesma ordem e uma mesma atenuação no limite da banda de passagem A_{\max} , funções polinomiais mais seletivas apresentam piores características de fase. Essa afirmativa está baseada no fato que a maior seletividade é obtida à custa de pólos com um maior fator de qualidade Q . Isso provoca uma variação mais abrupta da fase e, conseqüentemente, uma menor linearidade. No entanto, se a função apresenta zeros finitos sobre o eixo $j\omega$ fora da banda de passagem, a questão deixa de ser trivial devido à possibilidade de maior seletividade por conta da existência desses zeros. Neste trabalho, são discutidos vários casos envolvendo diversos tipos de funções.

No projeto de filtros em que há necessidade de se considerar ambas as características, magnitude e fase, podem-se utilizar dois procedimentos:

i) Projeto do filtro através de um processo de otimização simultânea das características de magnitude e fase. A desvantagem é que essa solução pode demandar um elevado custo computacional e o sucesso (ou não) de tal estratégia depende fortemente da escolha da estimativa inicial, do tipo de algoritmo de busca dos coeficientes da função de transferência desejada e da extensão do espaço de busca considerado.

ii) Projeto do filtro considerando a cascata de um filtro de fase mínima que atende os requisitos de seletividade com um filtro passa-tudo (equalizador) [6] [7] para equalizar a fase dentro das especificações requeridas de projeto. O processo de encontrar somente a função passa-tudo em um processo de otimização é relativamente menos complexo que o caso anterior.

O principal problema que surge utilizando este último procedimento é a determinação da melhor solução sob o ponto de vista da ordem total (filtro original + equalizador de fase). A solução desse problema não é trivial e exige do projetista um extenso estudo de casos devido ao fato de estarem envolvidas diversas variáveis, que são:

- a) As ordens das funções.
- b) O tipo da função de aproximação. Elas apresentam diferentes comportamentos na banda de passagem (monotônico ou com *ripple*) e na banda de rejeição, monotônico para funções polinomiais ou com *ripple* para funções com zeros sobre $j\omega$.

- c) Os valores de A_{\max} , no caso de funções polinomiais.
- d) Os valores de A_{\max} e da mínima atenuação permitida na banda de rejeição A_{\min} , no caso de funções não polinomiais.
- e) O tipo de filtro seletor (passa-baixa, passa-alta, passa-faixa ou Rejeita-faixa).

f) Se as funções são do tipo que, com o aumento da ordem, a linearidade da fase aumenta (por exemplo: Bessel (BS), Gauss (GS) e *Sync Tuned* (ST) [8]). Para essas funções passa-baixa, um aumento da ordem implica um aumento de linearidade da fase. Mas essa característica não é preservada quando uma transformação em frequência é aplicada. Funções GS, BS e ST são próprias para uso em filtros passa-baixa com características de magnitude pouco seletivas.

g) Se as funções são do tipo que, com o aumento da ordem, a linearidade da fase piora (por exemplo: Butterworth (BT), Chebyshev (CB) e Cauer CA).

h) Das ondulações em torno da reta representativa do atraso de fase ou de grupo obtida por regressão linear [6]. Como consequência, um filtro que apresenta um valor do erro do atraso menor pode precisar de mais etapas equalizadoras se muitas ondulações ocorrerem em torno dessa reta.

Buscando estudar e exemplificar as diferentes soluções através de simulações numéricas, é desenvolvido um programa que determina uma função passa-tudo a ser acoplada em cascata com a função de aproximação fornecida pelo usuário. O método utilizado pelo programa é detalhado ao longo do trabalho.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Na seção II, é mostrado o critério utilizado para avaliar a linearidade da fase. Na Seção III, é apresentada a estratégia de determinação de funções equalizadoras passa-tudo desenvolvida pelos autores. Na seção IV, são feitos estudos de casos de equalizações de diversos tipos de filtros com o intuito de investigar qual a melhor solução sob o ponto de vista da ordem total (filtro original + equalizador de fase). Na seção V, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

II. AVALIAÇÃO DA LINEARIDADE DE FASE

Neste trabalho, a linearidade da fase é avaliada pelo erro quadrático no atraso de fase $\epsilon_{\tau_{pF}}$ definido por

$$\epsilon_{\tau_{pF}} = \sum_{l=0}^{L-1} \left[\tau_p(\omega_i + \Delta\omega \cdot l) - \tau_{pmed} \right]^2 \Delta\omega \quad (1)$$

onde $\Delta\omega = (\omega_f - \omega_i) / (L-1)$ é o passo de amostragem (diferença entre duas amostras consecutivas), ω_i e ω_f são as frequências inicial e final da banda de interesse, respectivamente; L é o número de amostras, igualmente espaçadas no domínio da frequência, e τ_{pmed} é o atraso de fase médio na banda de interesse, dado por

$$\tau_{pmed} = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tau_p(\omega_i + \Delta\omega \cdot l). \quad (2)$$

Se a fase fosse linear ($\theta(\omega) = -\omega T_0$), com inclinação $-T_0$, o atraso de fase seria constante $\tau_p = -\theta(\omega) / \omega = T_0$ e $\epsilon_{\tau_{pF}} = 0$.

Para avaliar a remoção percentual do erro do filtro original $\epsilon_{\tau_{pF}}$, os resultados das equalizações são avaliados pela figura de mérito denominada eficiência $\eta(\%)$, dada por

$$\eta(\%) = \frac{\epsilon_{\tau_{pF}} - \epsilon_{\tau_{pFE}}}{\epsilon_{\tau_{pF}}} \times 100\% \quad (3)$$

onde $\epsilon_{\tau_{pFE}}$ é o erro do filtro equalizado.

Outra importante figura de mérito utilizada é o ganho marginal $G_M(\%)$, que é a diferença entre o η atual e o η da etapa anterior,

$$G_M(\%) = \eta_{\text{ANTERIOR}}(\%) - \eta_{\text{ATUAL}}(\%) \quad (4)$$

que informa ao projetista o ganho obtido com a aplicação de mais uma etapa de equalização.

III. ESTRATÉGIA DE DETERMINAÇÃO DE FUNÇÕES PASSA-TUDO

O método proposto consiste na determinação de funções de equalização de ordem n formadas a partir de $n/2$ blocos de segunda ordem, representados na seguinte forma:

$$T_{2i}(s) = \frac{s^2 - (\omega_{0i}/Q_i)s + \omega_{0i}^2}{s^2 + (\omega_{0i}/Q_i)s + \omega_{0i}^2} \quad (5)$$

onde ω_{0i} e Q_i são a frequência e o fator de qualidade das i -ésimas singularidades, respectivamente. Após a construção do bloco equalizador com a ordem requerida, um processo de otimização determina os parâmetros ω_{0i} e Q_i (para $\forall i$) que minimizam $\epsilon_{\tau_{pF}}$.

Quando o equalizador é composto por uma única etapa de segunda ordem, o processo de otimização é relativamente simples. No entanto, à medida que a ordem de equalização requerida aumenta, o adequado ajuste das condições iniciais dos parâmetros se torna fundamental para o encontro do mínimo global da função custo resultante.

Buscando encontrar as condições iniciais dos parâmetros, inicialmente, o bloco equalizador é construído gradativamente por etapas de segunda ordem individualmente otimizadas a partir de condições iniciais fixas. Após alcançar a ordem de equalização requerida, inicia-se efetivamente o processo de otimização onde os parâmetros obtidos nas etapas de segunda ordem são agora as condições iniciais dos parâmetros do equalizador de ordem n . Por exemplo, se requerido um bloco equalizador de ordem $n=4$, primeiramente, encontra-se os parâmetros ótimos de um bloco de segunda ordem que, em seguida, é acoplado ao filtro original para a determinação do próximo bloco. Os parâmetros obtidos em cada uma das duas etapas são as condições iniciais dos parâmetros do equalizador de ordem $n=4$. No caso do aumento do equalizador para $n=6$, o equalizador anterior é acoplado ao filtro original e uma nova etapa de segunda ordem é obtida. Os parâmetros do equalizador de ordem $n=4$, em conjunto com a nova etapa de segunda ordem, formam as condições iniciais do equalizador de ordem $n=6$. A mesma ideia pode ser estendida para o equalizador de ordem $n=8$. As condições iniciais primárias de cada etapa de segunda ordem são fixadas em $\omega_0 = 0,5$ rad/s e $Q = 0,5$.

É importante mencionar que, em casos onde as singularidades σ_{01} e σ_{02} de uma seção equalizadora forem reais, então ω_{0i} é a média geométrica das singularidades, ou seja, $\omega_{0i} = (\sigma_{01}\sigma_{02})^{1/2}$. Para esses casos, quando uma dada

etapa de segunda ordem apresentar o valor de ω_0 elevado, $Q_i < 0,5$ e $\sigma_{01} \geq 10\sigma_{02}$, uma seção de primeira ordem com a função de transferência dada por

$$T_{1i}(s) = \frac{s - \sigma_{01}}{s + \sigma_{01}} \quad (6)$$

substitui a função de segunda ordem original.

O programa que implementa o método proposto para equalizadores de até oitava ordem pode ser obtido em [9]. Para a execução do programa, é necessária a instalação do Matlab® 7.10 (ou posterior) ou então o Matlab® Compiler Runtime versão 7.13 em sistemas operacionais de 32 bits.

IV. ESTUDO DE CASOS

A. Exemplo 1

Nesta seção, é mostrada a comparação entre os resultados obtidos com a equalização de três filtros (BT, CB e CA) que satisfazem os requisitos de seletividade $A_{max} = 1\text{dB}$, $A_{min} = 61\text{dB}$ e $\omega_s = 6\text{rad/s}$. As Figs. 1(a), 1(b) e 1(c) mostram os atrasos de fase das três funções equalizadas com filtros passa-tudo de ordem 4. Os erros ϵ_{τ_p} , a eficiência $\eta(\%)$ e o ganho marginal $G_M(\%)$, apresentados pelos filtros originais e os filtros equalizados são mostrados na Tabela I.

TABELA I Erros $\epsilon_{\tau_{pf}}$, $\eta(\%)$ e $G_M(\%)$ obtidos com os filtros originais e com os filtros em cascata com equalizadores (Exemplo 1)

Tipo de Filtro	Ordem Total	ϵ_{τ_p} ($\times 10^{-5}$)	$\eta(\%)$	$G_M(\%)$
BT	5	1.628,95	0	0
BT + Eq. com $n=2$	7	3,83846	99,764	99,764
BT + Eq. com $n=4$	9	0,010757	99,999	0,235
CB	4	10.213,00	0	0
CB + Eq. com $n=2$	6	1.049,4	89,725	89,725
CB + Eq. com $n=4$	8	158,32	98,45	8.725
CA	3	1.712,47	0	0
CA + Eq. com $n=2$	5	33,29	98.056	98.056
CA + Eq. com $n=4$	7	0,753636	99,956	1,9

Os resultados da Tabela I mostram que a função original que apresenta o menor erro $\epsilon_{\tau_{pf}}$ é o BT ($n=5$), seguido pelo CA ($n=3$) e, por último, o maior erro é apresentado pelo CB ($n=4$). Isso mostra que, atendendo as mesmas características de seletividade, o filtro CA com $n=3$ apresentou melhor linearidade de fase do que o filtro CB com $n=4$. Por outro lado, o filtro BT com $n=5$ também apresentou melhor linearidade de fase do que o filtro CB com $n=4$. Nesse caso, as mesmas conclusões podem ser tiradas para os filtros equalizados com filtros passa-tudo de ordem $n=2$ e $n=4$.

Podem ser observados também que para o BT, com apenas uma seção equalizadora, foi obtido um rendimento de 99,764% e, com duas seções, o ganho marginal obtido foi de apenas 0,235%. Já para o CB, mesmo com um erro inicial muito maior, com uma seção passa-tudo, o rendimento foi de apenas 89,725%. Mas agora, com duas seções, o ganho marginal foi

relativamente mais alto (8,725%). Em relação ao CA, nesse caso, por ser de ordem baixa, as conclusões são semelhantes às aquelas feitas para o BT.

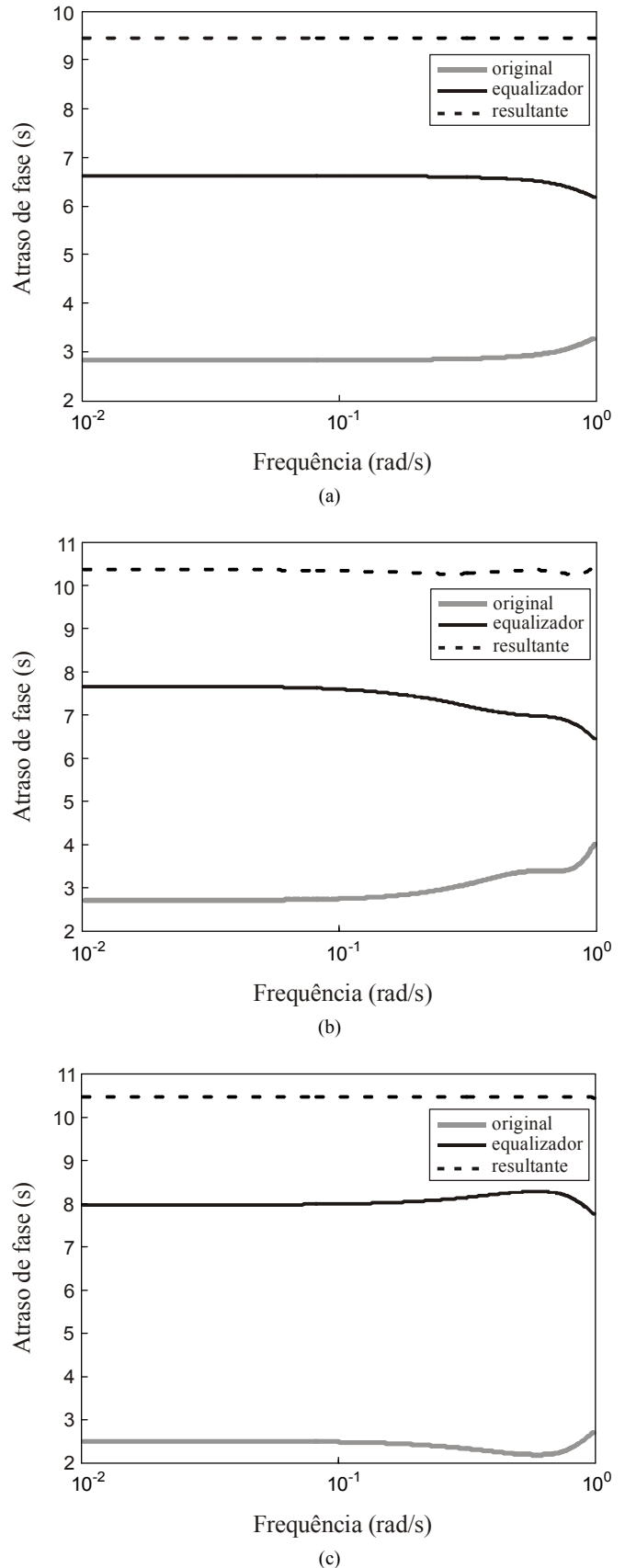


Fig. 1. Atraso de fase das três funções equalizadas com filtros passa-tudo ($n=4$): (a) BT ($n=3$), (b) CB ($n=4$) e (c) CA ($n=3$). (Exemplo 1).

O programa utilizado [9] para determinação das seções equalizadoras mostra, para o projetista, o ω_{0i} e Q_i das seções. No caso da equalização do CB, a seção de ordem 2 apresentou $\omega_{01} = 33,31$ rad/s e $Q_1 = 0,0207$. Como $Q_1 < 0,5$ significa que as singularidades são reais (σ_1 e σ_2) [8]. O fato de $\omega_{01} \gg 1$ rad/s implica que as singularidades estão distantes ($\sigma_1 \ll \sigma_2$), uma vez que ω_{01} é a média geométrica de σ_1 e σ_2 . O cálculo das singularidades é dado por (7).

$$\sigma_2, \sigma_1 = \frac{\omega_{01}}{2} \left(\frac{1}{Q_1} \pm \sqrt{\frac{1}{Q_1^2} - 4} \right) \quad (7)$$

Neste exemplo, os valores encontrados foram $\sigma_1 = 0,5869$ rad/s e $\sigma_2 = 1608,38$ rad/s. Então, nesse caso, a primeira seção equalizadora pode ser considerada uma seção de ordem 1 com função de transferência dada por (8).

$$T_{11}(s) = \frac{s - 0,5869}{s + 0,5869} \quad (8)$$

B. Exemplo 2

Consideremos um exemplo no qual os requisitos de seletividade são $A_{max} = 1$ dB, $A_{min} = 30$ dB e $\bar{\omega}_s = 1,15$. Esses requisitos são atendidos seja por um filtro CA de ordem 5 ou por um BT de ordem 30. Nesse caso, a fase do BT é menos linear do que a fase do CA (ver Fig. 2 e Tabela II). Apesar desse filtro BT só ter utilidade em filtros digitais (filtros analógicos contínuos são construídos com ordem máxima de onze), mais uma vez é mostrado que o projetista deve tentar diversos tipos de funções, a fim de obter uma solução com menor custo que atenda requisitos simultâneos de magnitude e fase.

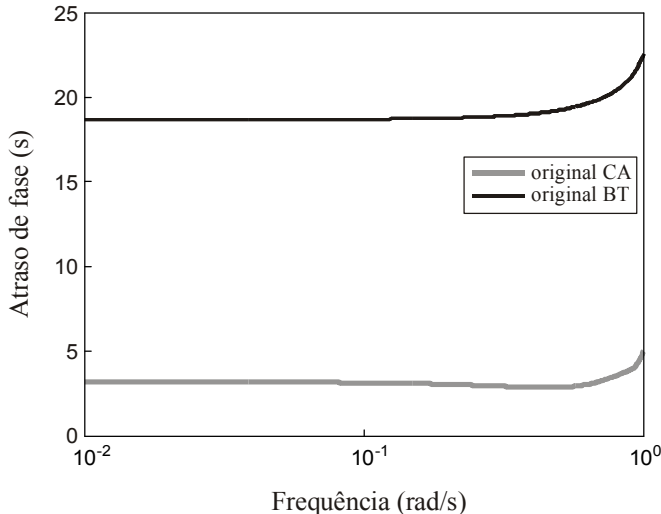


Fig. 2. Atraso de fase de um CA ($n=5$) e de um BT ($n=30$). (Exemplo 2).

TABELA II Erros $\epsilon_{\tau_{PF}}$ obtidos com os filtros BT e CA do Exemplo 2

Filtro	Ordem	$\epsilon_{\tau_{PF}} (\times 10^{-5})$
BT	30	92.311,00
CA	5	19.851,8

C. Exemplo 3

Consideremos outro exemplo onde os requisitos são $A_{max} = 3$ dB, $A_{min} = 50$ dB e $\bar{\omega}_s = 1,5$. Esses requisitos são atendidos seja por um filtro CA de ordem 5, por um Chebyshev Inverso (CI) de ordem 7 e por um BT de ordem 15. Nesse caso, a fase do BT (de maior ordem) é mais linear do

que a fase do CA (de menor ordem). Por outro lado, a fase do CI (de menor ordem) é mais linear do que a fase do BT (de maior ordem) (ver Fig. 3 e Tabela III). As conclusões são as mesmas se os filtros são equalizados com uma seção de ordem 2. O melhor rendimento ($\eta(\%) = 97,145$) foi obtido com o filtro CI.

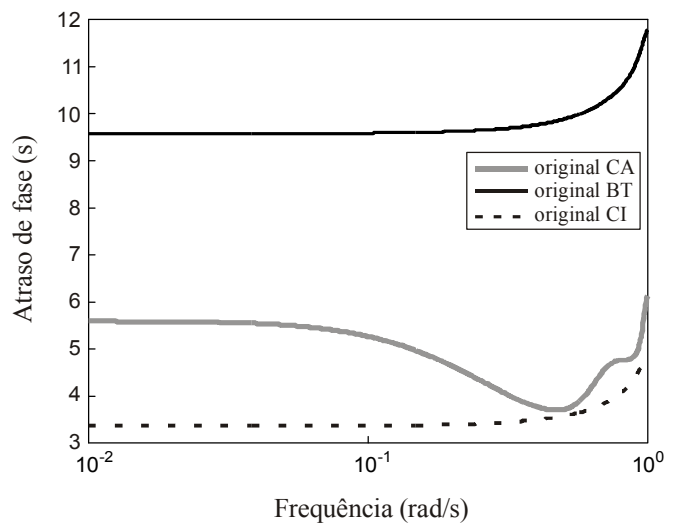


Fig. 3. Atraso de fase de um CA ($n=5$), de um CI ($n=7$) e de um BT ($n=15$). (Exemplo 3).

TABELA III Erros ϵ_{τ_p} , $\eta(\%)$ e $G_M(\%)$ obtidos com os filtros originais e com os filtros em cascata com equalizadores (Exemplo 3)

Filtro	Ordem Total	$\epsilon_{\tau_p} (\times 10^{-5})$	$\eta(\%)$	$G_M(\%)$
BT	15	31.592,9	0	0
BT + Eq. Com $n=2$	17	1.536,36	95,137	95,137
CI	7	15.698,6	0	0
CI + Eq. com $n=2$	5	448,25	97,145	97,145
CA	5	36.337,1	0	0
CA + Eq. com $n=2$	7	2.643,26	92,726	92,726

D. Exemplo 4

Para este exemplo os requisitos de seletividade são dados por $A_{max} = 3$ dB, $A_{min} = 40$ dB e $\bar{\omega}_s = 2$ rad/s. Esses requisitos são atendidos seja por um filtro CA de ordem 3 ou por um BT de ordem 7. Como mostra a Tabela IV, sem equalização, o BT apresenta um erro $\epsilon_{\tau_{PF}} = 0,0792979$ e o CA, um erro $\epsilon_{\tau_{PF}} = 0,140606$. No entanto, ao ser aplicada uma equalização de ordem 2 no filtro CA, o conjunto de ordem total $n=5$ apresentou um erro $\epsilon_{\tau_p} = 0,00620587$. Assim, uma estrutura de ordem 5, atendendo as mesmas especificações de seletividade, apresenta uma fase mais linear que uma estrutura de ordem 7.

TABELA IV Erros $\epsilon_{\tau_{PF}}$ obtidos com os filtros originais e com o filtro CA em cascata com um equalizador de ordem 2 (Exemplo 4)

Filtro	Ordem Total	$\epsilon_{\tau_{PF}} (\times 10^{-5})$
BT	7	7.929,79
CA	3	14.060,6
CA + Eq. com $n=2$	5	620,587

V CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma estratégia de equalização de fase que consiste em determinar as condições iniciais do equalizador requerido a partir de blocos de segunda ordem otimizados com condições iniciais fixas. A partir dos exemplos apresentados, observa-se a considerável redução do erro do atraso de fase proporcionada pelos equalizadores obtidos, comprovando a eficácia do método proposto.

Sobre a questão de qual a melhor solução sob o ponto de vista da ordem total do sistema, tem-se que quanto menores forem as ondulações de $\tau_p(\omega)$ em torno da reta representativa do atraso de fase, obtida por regressão linear, bons resultados são obtidos com uma ou duas seções equalizadoras. É o caso das aproximações monotônicas.

Funções de fase mínima têm a sua magnitude e a fase relacionadas pela Transformada de Hilbert (integral). Por isso, filtros CA e CB, por apresentarem *ripple* na banda de passagem, podem exigir uma seção equalizadora com ordem relativamente maior. No entanto, o uso do filtro CA que sempre apresenta ordem inferior pode ser vantajoso em relação a funções de maior ordem em determinadas situações, exigindo um estudo do projetista.

Consequentemente, um filtro que apresenta uma maior distorção de fase, traduzida por um valor mais elevado do erro de atraso (de fase ou de grupo), pode ser mais simples de equalizar, isto é, exigir uma menor ordem para o equalizador.

A conclusão é que, para cada caso, diversas soluções devem ser avaliadas com o objetivo de minimizar custos e/ou complexidade das etapas.

O ganho adicional na linearidade de fase obtido ao se adicionar mais uma etapa equalizadora diminui à medida que a ordem total do equalizador aumenta. Resultados relativamente bons já são obtidos com equalizadores de segunda e quarta ordens.

REFERÊNCIAS

- [1] A. L. Balan and N. D. Alexandru, "Construction of the new improved nyquist filters using interpolation with polynomial functions," in *Proc. 10th IEEE Int. Symp. Signals, Circuits and Systems*, Iasi, Romania, Jun./Jul. 2011, pp. 1-4.
- [2] S. P. Lipshitz, M. Popocock, and J. Vanderkooy, "On the audibility of midrange phase distortion in audio systems," *Audio Eng. Soc.*, vol. 30, no. 9, pp. 580-595, Sep. 1982.
- [3] J. A. Deer and P. J. Bloom, "Perception of phase distortion in all-pass filters," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 33, no. 10, pp. 782-786, Oct. 1985.
- [4] D. Preis, "Phase distortion and phase equalization in audio signal processing - A tutorial review," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 30, no. 11, pp. 774-794, Nov. 1982.
- [5] G. C. K. Silva e S. Noceti Filho, "Filtros transicionais obtidos por interpolação de pólos - Estudo comparativo," in *Anais do XXIV Congresso Regional de Iniciação Científica e Tecnológica em Engenharia*, Rio Grande, RS, Set./Out. 2010, pp. 1-4.
- [6] A. S. Farias, S. Noceti Filho e Rui Seara, "Implementação de equalizadores de fase online," in *Anais do XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Blumenau, SC, Set./Out. 2009, pp. 1-4.
- [7] K. Zaplatílek, P. Žiska, and K. Hájek, "Practice utilization of algorithms for analog filter group delay optimization," *RadioEngineering*, vol. 16, no. 1, pp. 7-15, Apr. 2007.
- [8] S. Noceti Filho, *Filtros Seletores de Sinais*, 3a. ed. Florianópolis, SC, Editora UFSC, 2010.
- [9] <http://www.linse.ufsc.br/research-public>.