

Codificação analógica via projeções de reticulados

Antonio Campello e Sueli I. R. Costa

Resumo— Neste artigo estudamos uma classe de códigos para transmissão de dados de uma fonte com alfabeto contínuo, discreta no tempo, através de um canal gaussiano. Uma diferença em relação a outras propostas encontradas na literatura, que majoritariamente tratam de fontes contínuas unidimensionais, é que o esquema aqui proposto codifica fontes com suporte k -dimensional transmitidas através de canais n -dimensionais num regime de expansão de largura de banda ($n > k$). Os códigos considerados estão associados a uma função contínua por partes. Descrevemos a geometria destes códigos enfatizando a sua conexão com a busca por boas famílias de projeções do reticulado cúbico \mathbb{Z}^n e, a partir desta relação, desenvolvemos um algoritmo de decodificação eficiente. Algumas construções explícitas com boa performance em termos de simulação são também apresentadas.

Palavras-Chave— Modulação Analógica, Reticulados, Funções Lineares por Partes.

Abstract— In this paper we study a class of codes for the transmission of a discrete-time continuous alphabet source over a Gaussian channel. Our proposal differs from the ones found in the literature, that mostly deal with one dimensional continuous sources, in the sense that the scheme proposed here encodes sources with k -dimensional support to be transmitted over n -dimensional channels in the bandwidth expansion regime ($n > k$). The codes considered are associated to a piecewise continuous application. We describe the geometry of such codes, highlighting their connection with the search for good families of projections of the cubic lattice \mathbb{Z}^n . From this relation, we design an efficient decoding algorithm and exhibit some explicit construction with good simulation performance.

Keywords— Analog Modulation, Lattices, Piecewise Linear Mappings.

I. INTRODUÇÃO

Um fato notável da Teoria de Informação é o de que a maneira ótima de transmissão de uma fonte com alfabeto contínuo e distribuição gaussiana através de um canal gaussiano é o envio do sinal *sem* codificação (aplicando apenas um fator de escala de modo a respeitar a restrição de potência do canal), e.g. [5]. Tal resultado, assumindo uma amostra da fonte por uso do canal e a utilização do erro quadrático médio como medida de distorção, nos mostra que técnicas digitais, apesar de atingirem otimalidade em diversos contextos, nem sempre representam a melhor estratégia de codificação/decodificação em termos de complexidade e *delay*.

O recente interesse em técnicas de codificação analógica deve-se em parte a sua competitividade em termos de *delay*, se contrastadas com as técnicas comuns de transmissão digital, que inevitavelmente incorrem em códigos com blocos arbitrariamente longos. Por outro lado, o estudo de códigos

analógicos levanta interessantes problemas teóricos acerca da construção de curvas com certas propriedades geométricas. De fato, o problema de desenvolver códigos para a transmissão de uma fonte de alfabeto contínuo sobre o canal Gaussiano pode ser visto como o de construção de curvas (aplicações de \mathbb{R} em \mathbb{R}^n) com comprimento grande e com boa distância entre as suas “voltas”, ou segmentos [7]. Neste trabalho estaremos também interessados no caso em que o suporte da fonte não é uni-dimensional, ou seja, na construção de aplicações de \mathbb{R}^k para \mathbb{R}^n com boas propriedades geométricas. Durante todo o trabalho lidamos apenas com o caso de *expansão de largura de banda*, isto é, quando a dimensão k da fonte é estritamente menor que a dimensão n do canal.

Dentre os exemplos de esquemas de codificação analógica encontrados na literatura incluindo análises de codificadores e de decodificadores ótimos, destacamos [6], [3], [10], [9], [8]. Em [10], os autores mostram como a teoria de polinômios ortogonais pode ser utilizada para a construção de curvas com o propósito de minimizar o erro quadrático médio (MSE) na transmissão. Em [9] é estabelecida a conexão entre códigos para fontes de alfabeto contínuo e projeções de reticulado aqui explorada. É apresentado um esquema explícito de codificação com boas propriedades assintóticas baseado em famílias de reticulados projeção com boa densidade de empacotamento (melhores famílias são descritas em [8]). Na maioria dos trabalhos citados acima, os autores consideram apenas fontes com alfabeto uni-dimensional, enquanto aqui consideramos uma generalização para fontes k -dimensionais. Uma exceção é o trabalho [3], em que os autores mostram códigos para fontes 2 e 3-dimensionais no regime de redução de largura de banda e $n = 1$.

O restante deste trabalho está organizado conforme descrito a seguir. Na Seção II descrevemos o modelo de comunicação relacionado às construções propostas e estabelecemos a notação utilizada. Na Seção III mostramos como derivar alguns limitantes fundamentais para o comportamento dos códigos estudados aqui. Na Seção IV estudamos propriedades da aplicação mod-1 e a relação dos nossos códigos com projeções de reticulados. Na Seção V mostramos um algoritmo de decodificação e finalmente na Seção VI o caso de co-dimensão 1 (isto é, quando $k = n - 1$) é discutido com detalhes, incluindo propostas concretas de parâmetros de códigos e simulações.

II. DESCRIÇÃO DO MODELO E NOTAÇÕES

A. Esquema de Comunicação

O esquema de comunicação analisado neste trabalho está ilustrado na Figura 1. Uma amostra \mathbf{x} retirada de uma fonte k -dimensional com alfabeto contínuo e discreta no tempo deve ser transmitida através de um canal Gaussiano n -dimensional,

Antonio Campello e Sueli I. R. Costa, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, E-mails: [campello,sueli]@ime.unicamp.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPESP processos 2011/22044-4, 2012/09167-2 e CNPq 309561/2009-4.

para $n \geq k$, com variância do ruído σ^2 . O objetivo do receptor é recuperar uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ do sinal enviado de forma a minimizar o erro quadrático médio (MSE):

$$\text{MSE} := \frac{1}{k} E \left[\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \right]. \quad (1)$$

Assumindo que o suporte da fonte é \mathcal{S} e a sua função densidade de probabilidade $f(\mathbf{x})$, um código para este sistema é composto por uma função $s: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mapeando símbolos da fonte no espaço do canal e uma função $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}$ mapeando os valores recebidos em estimativas $\hat{\mathbf{x}}$. Assumimos uma restrição de potência média

$$\int_{\mathcal{S}} f(\mathbf{x}) \|\mathbf{s}(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x} \leq P. \quad (2)$$

Nossas análises serão focadas em fontes uniformes e, daqui em diante, assumiremos que $\mathcal{S} = [0, 1)^k$ (isto é, o suporte da fonte é o cubo unitário em \mathbb{R}^k) e $f(\mathbf{x}) = 1$.

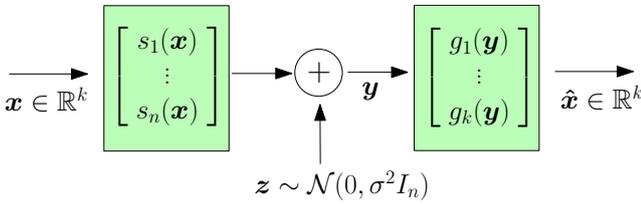


Fig. 1. Modelo de Comunicação

B. Notação

Seja $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ um conjunto de vetores L.I. em \mathbb{R}^n . O conjunto de todas as combinações lineares inteiras $\{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k : \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$ é dito o *reticulado* com base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$. À matriz $A_{n \times k}$ cujas colunas são os vetores \mathbf{a}_i , daremos o nome de *matriz geradora*. O valor $\sqrt{\det A^t A}$ será denominado *volume* do reticulado. A norma mínima λ_1 do reticulado gerado por A é definida como

$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^k \setminus \{\mathbf{0}\}} \|A\mathbf{x}\|,$$

onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo. O espaço-coluna da matriz A será denotado por $\text{span}(A)$ e seu complemento ortogonal por A^\perp . O reticulado \mathbb{Z}^n é o reticulado constituído de todas as n -uplas com entradas inteiras em \mathbb{R}^n . Vetores serão escritos em negrito, e denotaremos por $\lfloor \mathbf{x} \rfloor$ o resultado do arredondamento de cada coordenada do vetor \mathbf{x} . O traço de uma matriz quadrada $A_{n \times n}$ é dado por $\text{tr}(A) := A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}$. (Para mais informações sobre reticulados, sugerimos ao leitor a referência [4]).

III. LIMITANTES FUNDAMENTAIS

A. O Limitante de Cramer-Ráo e o regime de baixo ruído

Utilizando o Limitante de Cramer-Ráo, obtemos a estimativa para o erro quadrático médio do sistema de comunicação [7]:

$$E \left[\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \right] \geq \text{tr}(I(\mathbf{x})^{-1}), \quad (3)$$

onde $I(\mathbf{x})$ é a Matriz de Informação de Fisher [7]

$$[I(\mathbf{x})]_{ij} = E_{\mathbf{x}} \left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{x})}{\partial x_j} \right],$$

e $f(\mathbf{y}; \mathbf{x})$ é a função densidade de probabilidade das observações \mathbf{y} com respeito ao parâmetro enviado \mathbf{x} i.e.:

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{e^{-\|\mathbf{y} - \mathbf{s}(\mathbf{x})\|^2 / 2\sigma^2}}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}. \quad (4)$$

Deste modo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} &= \frac{1}{\sigma^2} \left\langle \mathbf{y} - \mathbf{s}(\mathbf{x}), \left(\frac{\partial s_1(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial s_n(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\ &= z^t [J_s(\mathbf{x})]_i, \end{aligned}$$

em que $[J_s(\mathbf{x})]_i$ representa a i -ésima coluna do jacobiano de s $[J_s(\mathbf{x})]_{ij} = \partial s_i / \partial x_j$. Tomando a esperança de ambos os termos acima, temos

$$[I(\mathbf{x})]_{ij} = \sigma^2 \langle [J_s(\mathbf{x})]_i, [J_s(\mathbf{x})]_j \rangle,$$

o que nos dá o limitante

$$\frac{1}{k} E \left[\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \right] \geq \frac{\sigma^2}{k} \int_{[0,1]^k} \text{tr}((J(\mathbf{x})^t J(\mathbf{x}))^{-1}) d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Quando $k = 1$, essa formula especializa-se para:

$$E[(x - \hat{x})^2] \geq \sigma^2 \int_{\mathcal{S}} \frac{f(x)}{\|\dot{s}(x)\|^2} dx. \quad (6)$$

A Equação (5) acima também pode ser derivada aproximando $s(\mathbf{x})$ pela sua Série de Taylor de primeira ordem e projetando o ruído no espaço tangente a $s(\mathbf{x})$ (em outras palavras, fazendo modulação/de-modulação linear). Em [7] é provado que quando o ruído tende a zero (ou a relação sinal-ruído tende a infinito), o erro quadrático médio torna-se arbitrariamente próximo do limitante de Cramer-Ráo. Assim, para baixos ruídos, a Equação (5) é uma boa aproximação para o comportamento do sistema. É interessante notar que a derivação das fórmulas acima em [7] assume que a aplicação $s(\mathbf{x})$ é contínua e diferenciável, entretanto esta condição pode ser facilmente relaxada para continuidade por partes, sem nenhum prejuízo da análise.

B. O efeito threshold

Como visto na seção anterior, para grandes valores de relação sinal-ruído do canal o comportamento dos códigos analógicos aproxima-se do limitante (5). Entretanto, se o ruído é alto, o erro quadrático médio pode ser muito maior do que este valor. Isto ocorre pois, devido à restrição de potência (e ao fato de que modulação linear tem um ganho bastante limitado com o aumento da relação sinal-ruído), a imagem de $s(\mathbf{x})$ inevitavelmente terá mais do que uma "volta" ou segmento. Neste processo, é possível que um ruído alto incorra em decodificação para a "volta" incorreta do código, causando um erro alto. Este comportamento anômalo está ilustrado na Figura 2 para o caso unidimensional.

Os erros anômalos tornam-se menos frequentes a partir de uma certa relação sinal ruído, o que representa um *threshold* natural para tais esquemas de codificação. O *threshold* dependerá da distância entre as voltas da imagem de $s(\mathbf{x})$, fator que deve ser levado em consideração na construção de códigos analógicos.

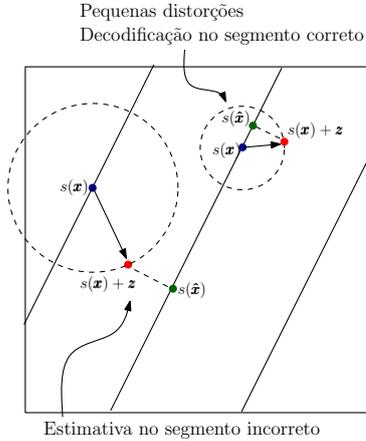


Fig. 2. Possíveis tipos de erro na transmissão. Supondo que a imagem da função de codificação $s(\mathbf{x})$ é o conjunto de segmentos de retas na figura acima, caso a norma do ruído ultrapasse um certo *threshold*, o ponto recebido será decodificado no segmento incorreto, causando grandes erros.

IV. A APLICAÇÃO MOD-1: EXEMPLOS E RELAÇÃO COM PROJEÇÕES DE RETICULADOS.

Seja A uma matriz com entradas inteiras de dimensões n por k . A aplicação mod-1 é definida da seguinte maneira:

$$s_1(\mathbf{x}) = (A(\mathbf{x}))_1 := A\mathbf{x} \pmod{1} = A\mathbf{x} - \lfloor A\mathbf{x} \rfloor. \quad (7)$$

Para $k = 1$, esta função linear por partes leva os pontos do intervalo $[0, 1]$ em um conjunto de segmentos de reta em \mathbb{R}^n conforme a Figura 2 e foi estudada em [9]. Para $k > 2$, analogamente, a imagem de $s_1(\mathbf{x})$ (ou o lugar geométrico do sinal) é um conjunto de “segmentos” de plano em \mathbb{R}^n dentro da caixa $[-1/2, 1/2]^n$. De maneira mais formal, temos:

$$s_1(\mathbb{R}^k) = s_1([0, 1]^k) = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n} (\text{span}(A) + \mathbf{n}) \cap [-1/2, 1/2]^n, \quad (8)$$

onde $\text{span}(A)$ é o espaço-coluna da matriz A . Por simplicidade, trataremos apenas o caso em que a matriz A tem posto completo, isto é, a dimensão de $\text{span}(A)$ é k . Para garantirmos a injetividade da função de codificação $s_1(\mathbf{x})$, precisaremos restringir-nos a uma classe especial de matrizes A , definida a seguir:

Definição 1: Um conjunto de vetores $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset \mathbb{Z}^n$ é dito *primitivo* em \mathbb{Z}^n se o paralelepípedo

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \{\beta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \beta_k \mathbf{a}_k : 0 \leq \beta_i < 1\}$$

não possui nenhum ponto com coordenadas inteiras no seu interior. Alternativamente, um conjunto é primitivo se existem vetores inteiros $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ tais que $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ é uma base para o reticulado \mathbb{Z}^n [2]. Uma matriz é primitiva se as suas colunas formam um conjunto de vetores primitivos.

Se a matriz A é primitiva de acordo com a definição acima, podemos mostrar que $s_1(\mathbf{x})$ é uma função injetiva. Com efeito, se tivéssemos $s_1(\mathbf{x}) = s_1(\tilde{\mathbf{x}})$ para $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in [0, 1]^k$, isso implicaria $A(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) = \lfloor A\tilde{\mathbf{x}} \rfloor - \lfloor A\mathbf{x} \rfloor$, ou seja, haveria um ponto com coordenadas inteiras no interior de $\mathcal{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$. Além disso, também sob estas condições, a projeção do reticulado \mathbb{Z}^n no complemento ortogonal de $\text{span}(A)$ (denotada por $P_{A^\perp}(\mathbb{Z}^n)$) é um reticulado $(n - k)$ -dimensional cujo volume é dado por $\det P_{A^\perp}(\mathbb{Z}^n) = \sqrt{\det(A^t A)^{-1}}$ [4, Ch. 6 Thm. 4].

Para utilizarmos a aplicação mod-1 no contexto de codificação analógica, precisamos garantir a restrição de potência, e estudar a distância entre as “voltas” (ou entre os planos que compõem a imagem de $s_1(\mathbf{x})$). A proposição abaixo nos dá tais propriedades.

Proposição 1: Seja $s_1(\mathbf{x})$ a aplicação definida em (7). Temos então

- 1) A energia média de $s_1(\mathbf{x})$ para \mathbf{x} uniformemente distribuídos no cubo $[0, 1]^k$ é dada por $E[\|s_1(\mathbf{x})\|^2] = n/12$.
- 2) A distância mínima entre os planos que compõem a imagem de $s_1(\mathbf{x})$ é dada pela norma mínima do reticulado $P_{A^\perp}(\mathbb{Z}^n)$.

Demonstração: A primeira propriedade segue como consequência de [9, Sec. IV, Eq. (30)]. Para a segunda propriedade, observe que pela caracterização (8), a distância mínima δ entre dois planos em $s([0, 1]^k)$ pode ser calculada como

$$\delta = \min_{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{n} \notin A^\perp} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^k} \|A\mathbf{x} - \mathbf{n}\|,$$

onde A^\perp denota o complemento ortogonal do espaço-coluna de A . A solução para o mínimo interior é obtida projetando de \mathbf{n} em A^\perp , de modo que

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k} \|A\mathbf{x} - \mathbf{n}\| = \|P_{A^\perp}(\mathbf{n})\|.$$

Temos portanto:

$$\delta = \min_{\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in P_{A^\perp}(\mathbb{Z}^n)} \|\mathbf{y}\|, \quad (9)$$

ou seja, δ é igual ao menor vetor não nulo em $P_{A^\perp}(\mathbb{Z}^n)$, concluindo a demonstração. ■

A proposição acima nos diz que normalizando $s_1(\mathbf{x})$ por um fator $\alpha = 2\sqrt{3P}/\sqrt{n}$, temos que a aplicação $s(\mathbf{x}) = \alpha s_1(\mathbf{x})$ respeita a restrição de potência (2). De agora em diante, consideraremos sempre a aplicação $s(\mathbf{x})$ (normalizada pelo fator α) como função de codificação.

V. DECODIFICAÇÃO

Para o esquema de comunicação considerado, o melhor decodificador em termos do erro quadrático médio (MMSE), dado um vetor recebido \mathbf{y} é dado por [7]:

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = E[\mathbf{x}|\mathbf{y}].$$

Na prática, entretanto, tal decodificador possui grande complexidade de implementação. Focamos, portanto no decodificador de máxima-verossimilhança que, por conta da Equação (4) é dado por

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - s(\mathbf{x})\|,$$

ou seja, pela distância do ponto recebido até a imagem de $s(\mathbf{x})$. Baseado na caracterização da imagem de $s(\mathbf{x})$ dada pela equação (8), desenvolvemos um algoritmo eficiente para a decodificação por máxima verossimilhança, dado em pseudo-código ProjDecod. A ideia do algoritmo é, dado um ponto recebido \mathbf{y} , projetá-lo em A^\perp e efetuar uma decodificação no reticulado $P_{A^\perp}(\mathbb{Z}^n)$ de modo a encontrar o ponto mais próximo do projetado. Por conta de (8), as coordenadas inteiras do ponto mais próximo da projeção dirão exatamente qual das translações de $\text{span}(A)$ minimiza a distância até o vetor recebido. A partir daí, projetamos no plano correspondente e encontramos a coordenada do vetor projetado, que será a estimativa $\hat{\mathbf{x}}$. No pseudo-código abaixo, assumimos que existe um procedimento capaz de executar a decodificação no reticulado $P_{A^\perp}(\mathbb{Z}^n)$. Alguns algoritmos de decodificação podem ser encontrados em [1].

Algorithm 1 Decodificação por projeções

```

1: procedure PROJDECOD( $A, \mathbf{y}, \alpha = 2\sqrt{3P}/n$ )
2:    $P \leftarrow I_n - A(A^t A)^{-1} A^t$ 
3:    $\tilde{\mathbf{y}} \leftarrow P\mathbf{y}/\alpha$ 
4:   Encontre  $\hat{\mathbf{z}} = \arg \min_{\mathbf{z} \in P_{A^\perp}(\mathbb{Z}^n)} \|\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{y}}\|$ 
5:    $\hat{\mathbf{x}} \leftarrow (A^t A)^{-1} A^t (\alpha\hat{\mathbf{z}})$ 
6:    $\hat{\mathbf{x}} \leftarrow \hat{\mathbf{x}} - \lfloor \hat{\mathbf{x}} \rfloor$ 
7: return  $\hat{\mathbf{x}}$ 
8: end procedure

```

A complexidade do algoritmo acima é dominada pela decodificação no reticulado $P_{A^\perp}(\mathbb{Z}^n)$. De maneira geral, decodificar em reticulados arbitrários possui complexidade exponencial [1], apesar de existirem algoritmos aproximados com complexidade polinomial. Excetuando a decodificação, a operação mais cara efetuada é resolução de sistemas linear/inversão de matrizes, cujo custo é de $O(n^3)$ operações aritméticas.

VI. SIMULAÇÕES

Como exemplo, para ilustrarmos a classe de códigos apresentados, realizamos simulações para certos parâmetros de expansão de largura de banda. Para realizarmos simulações, consideramos $k = n - 1$. Neste caso, a dimensão de $\text{span}(A)$ é $(n - 1)$ e portanto os reticulados projeção são unidimensionais (equivalentes ao reticulado \mathbb{Z}^1). Temos portanto

- 1) A distância mínima entre os segmentos que constituem a imagem de $\mathbf{s}([0, 1]^k)$ é dada por $\delta = \det(A^t A)^{-1/2}$, pelo fato de todos os reticulados uni-dimensionais possuírem densidade máxima.
- 2) A decodificação em $P_{A^\perp}(\mathbb{Z}^n)$ é equivalente à encontrar o ponto mais próximo em um reticulado uni-dimensional (\mathbb{Z}^1), que pode ser realizado com apenas 1 operação de arredondamento. Assim, o algoritmo descrito na seção anterior comporta-se de maneira bastante eficiente.

Como mostrado por Ziv em [11], para conseguirmos boa performance utilizando codificação analógica é necessária uma

família de códigos, cujo parâmetro deve ser otimizado de acordo com a relação sinal-ruído do canal. De acordo com o limitante (5), devemos escolher matrizes de modo a minimizar $\text{tr}(A^t A)^{-1}$ (no limite, o traço deve tender a zero). Entretanto, também queremos manter uma boa distância mínima δ no código, o que implica minimizar o determinante. Por argumentos de média aritmética-geométrica, as melhores famílias de matrizes são aquelas às quais os vetores estão próximos de serem ortogonais. Escolhemos para teste, portanto, as matrizes A_w e B_w dadas por

$$A_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \\ 0 & w \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$B_w = \begin{pmatrix} w(w+1) & 1-w \\ w & (w+1)w \\ w+1 & -w \end{pmatrix}. \quad (11)$$

No primeiro caso os vetores possuem mesma norma, mas não são ortogonais (quando $w \rightarrow \infty$, entretanto, a matriz de Gram tende a um múltiplo da identidade e portanto os vetores tendem a serem ortogonais). No segundo caso, os vetores são ortogonais entretanto não possuem mesma norma (as normas são de ordem comparável para grandes valores de w). Em ambos os casos a condição de primitividade pode ser facilmente verificada.

As famílias consideradas nas simulações correspondem a expansão de largura de banda 2 : 3, isto é, $k = 2$ e $n = 3$ dados pelas matrizes acima. Para ambos os esquemas, se utilizarmos limitantes de taxa-versus distorção e o princípio da separação de Shannon, obtemos como limitante superior para altas taxas (e.g., [9]):

$$\text{MSE} \geq \frac{1}{2\pi e(1 + \text{SNR})^{3/2}} := \text{OPTA}$$

O valor OPTA, entretanto, corresponde ao melhor esquema de codificação com *delay*, incluindo codificações digitais com blocos arbitrariamente longos. O esquema aqui proposto ocorre sem *delay*: a cada vetor do \mathbb{R}^2 , um valor codificado é gerado e o erro calculado. Não obstante, as simulações mostram um comportamento próximo da curva ótima. De fato, se w for escolhido de acordo com a relação sinal-ruído, obtemos uma curva paralela à OPTA, indicando que o expoente de decaimento do MSE está próximo do ótimo ($-3/2$). Para diferentes valores de n , se escolhermos matrizes de maneira análoga a A_w , encontramos expoentes próximos do ótimo $\text{SNR}^{-n/(n-1)}$. Cada simulação foi baseada em 15000 amostras independentes e uniformemente distribuídas em $[0, 1]^2$ com valores de sinal-ruído variando entre 1 e 6db em um passo de 0.1. Nas simulações observamos que abaixo do *threshold*, a famílias A_w comporta-se melhor que a família B_w e esse comportamento inverte-se no regime de baixo ruído. Em comparação com o limitante OPTA, a família B_w apresenta um melhor desempenho, sugerindo que é preferível codificarmos com vetores ortogonais.

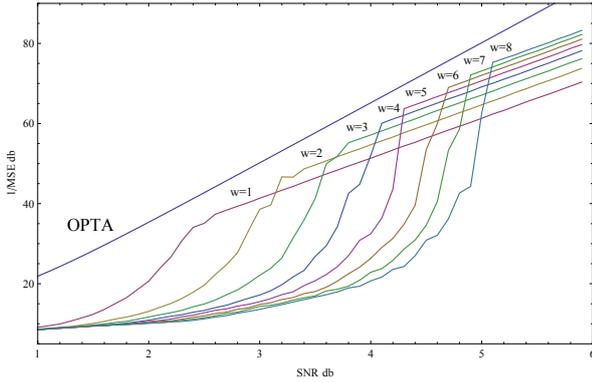


Fig. 3. Simulações para a sequência de matrizes A_w . Acima do *threshold* o sistema se comporta conforme o lado direito da equação (5).

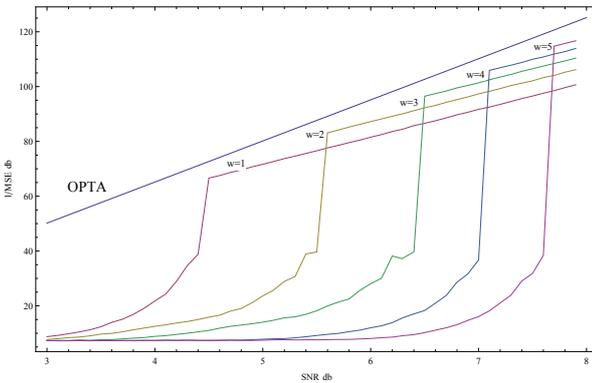


Fig. 4. Simulações para a sequência de matrizes B_w .

VII. CONCLUSÕES

Neste artigo desenvolvemos o estudo de certas classes de códigos analógicos relacionados com projeções de reticulados. Descrevemos propriedades geométricas de tais códigos para a transmissão de uma fonte com suporte k -dimensional através de um canal Gaussiano n -dimensional no caso de expansão de largura de banda ($n > k$). As propriedades derivadas aqui reforçam o papel importante de reticulados e projeções em esquemas de codificação analógico iniciado em [9], estendendo para dimensões maiores o esquema proposto em [9] para $k = 1$. As simulações propostas mostram que à medida que os parâmetros de codificação forem ajustados corretamente, conforme a relação sinal-ruído do canal, bons resultados assintóticos são alcançados. Perspectivas futuras incluem a análise teórica do erro-quadrático médio como função da relação-sinal ruído bem como a possibilidade de uma construção geral de esquemas para qualquer razão de expansão de largura de banda n/k com boas propriedades geométricas. A extensão dos resultados aqui propostos para fontes não-uniformes (e.g., gaussianas) e $k > n$ também é de interesse.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Agrell, T. Eriksson, A. Vardy, and K. Zeger. Closest point search in lattices. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(8):2201–2214, 2002.
- [2] J. W. S. Cassels. *An introduction to the Geometry of Numbers*. Springer-Verlag, 1997.
- [3] S. Chung. *On the construction of some capacity-approaching coding schemes*. Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [4] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere-packings, lattices, and groups*. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1998.
- [5] T. J. Goblick. Theoretical limitations on the transmission of data from analog sources. *IEEE Transactions on Information Theory*, 11(4):558–567, 1965.
- [6] M. Kleiner and B. Rimoldi. A tight bound on the performance of a minimal-delay joint source-channel coding scheme. In *IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings (ISIT)*, pages 136–140, 2010.
- [7] D. J. Sakrison. *Notes on analog communications*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1970.
- [8] N. J. A. Sloane, V. A. Vaishampayan, and S. I. R. Costa. The lifting construction: A general solution for the fat strut problem. In *IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings (ISIT)*, pages 1037–1041, 2010.
- [9] V. A. Vaishampayan and S. I. R. Costa. Curves on a sphere, shift-map dynamics, and error control for continuous alphabet sources. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49:1658–1672, 2003.
- [10] N. Wernersson, M. Skoglund, and T. Ramstad. Polynomial based analog source-channel codes. *IEEE Transactions on Communications*, 57(9):2600–2606, september 2009.
- [11] J. Ziv. The behavior of analog communication systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 16(5):587–594, 1970.