

# Caracterização do Espectro em Sistemas OFDM Considerando os Efeitos do Ruído de Fase

Paulo Ribeiro Lins Júnior e Marcelo Sampaio de Alencar

**Resumo**—A transmissão de múltiplos sinais ortogonais é um esquema utilizado por vários sistemas de comunicações atualmente. No entanto, osciladores reais podem gerar flutuações de fase que provocam alargamento do espectro desses sinais, podendo ocasionar interferência interportadora. Este artigo apresenta uma nova abordagem analítica para a caracterização do espectro do sinal OFDM, considerando o ruído de fase dos osciladores. São deduzidas expressões para a função de autocorrelação e a densidade espectral de potência para três casos, ruído de fase com baixa, média e alta variância, com base na metodologia desenvolvida por Alencar [1]. Simulações são usadas para avaliar os resultados analíticos, considerando formatos diferentes de pulso do sinal modulante.

**Palavras-Chave**—OFDM, Ruído de Fase, Espectro, Análise Estocástica.

**Abstract**—The transmission of multiple signals that are mutually orthogonal is widely used for many communications systems today. However, real oscillators generates phase fluctuations that cause broadening of the spectrum of these signals, causing intercarrier interference. This paper presents a new analytical approach for the characterization of the OFDM subcarriers spectrum, considering the phase noise of oscillators. Expressions are derived for the autocorrelation and power spectral density for three cases, low, medium and high variance of the phase noise, based on the methodology developed by Alencar [1]. Simulations are used to evaluate the analytical results, considering different pulse formats.

**Keywords**—OFDM, Phase Noise, Spectrum, Stochastic Analysis.

## I. INTRODUÇÃO

A multiplexação por divisão em frequência ortogonal (OFDM – *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) é uma técnica de transmissão multiportadora cujas subportadoras são ortogonais. Essa característica faz com que exista a possibilidade de sobreposição dos sinais no domínio da frequência sem causar interferência entre as subportadoras, tornando desnecessário o uso de banda de guarda entre as subportadoras e melhorando a eficiência espectral [2].

O conceito de transmissão de múltiplos sinais ortogonais entre si no domínio do tempo como forma de melhorar a eficiência do sistema foi originalmente proposto por Robert W. Chang em seu artigo seminal intitulado *Synthesis of Band-Limited Orthogonal Signals for Multichannel Data Transmission* [3]. O termo OFDM, no entanto, só foi utilizado pela

Paulo Ribeiro Lins Júnior, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB, Campus Campina Grande – PB, Instituto de Estudos Avançados em Comunicações – Iecom, email: paulo.ribeiro.lins.jr@gmail.com e Marcelo Sampaio de Alencar, Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, Instituto de Estudos Avançados em Comunicações – Iecom, email: malencar@dee.ufcg.edu.br. Os autores agradecem o suporte do CNPq e do Iecom.

primeira vez na patente requerida pelo próprio Chang em 1970 [4].

Em 1969, J. Salz e S.B. Weinstein propuseram o uso de transformada discreta de Fourier (DFT – *Discrete Fourier Transform*) [5] em vez dos então convencionais bancos de geradores senoidais e demoduladores, o que diminuiu consideravelmente a complexidade de implementação dos modems OFDM. O uso do prefixo cíclico foi proposto somente em 1980 [6].

Também em meados da década de 1980, o OFDM começou a ser considerado para aplicações práticas de transmissão sem fio. Em 1985, Cimini apresentou, pela primeira vez, resultados analíticos e experimentais do uso de OFDM, implementado com DFT, para combater os efeitos da interferência co-canal e do multipercurso em um sistema de comunicações móveis digital [7].

A Figura 1 apresenta o esquema de um transmissor OFDM. Nessa arquitetura, um fluxo de dados serial incidente na entrada do transmissor é convertido em  $N$  fluxos paralelos  $c_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ . Os dados são então aplicados a moduladores correspondentes a cada uma das subportadoras.

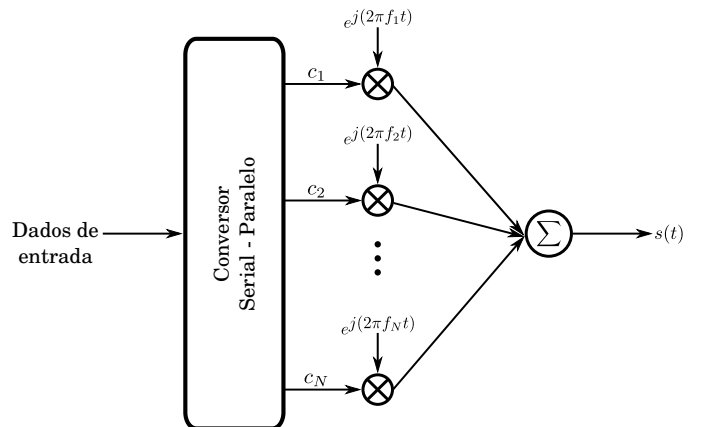


Fig. 1. Diagrama conceitual do transmissor OFDM.

Dessa forma, cada subportadora pode ser representada por [2]

$$s_k(t) = c_k(t) \cdot q(t) \cdot e^{j2\pi f_k t}, \quad (1)$$

em que  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ , sendo  $N$  o número de subportadoras,  $c_k(t)$  é a informação da  $k$ -ésima portadora e  $q(t)$  é a função que representa o formato do pulso.

O sinal na saída do modulador mostrado na Figura 1 é dado por

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N c_k(t) \cdot q(t - mT) \cdot e^{j2\pi f_k(t - mT)}. \quad (2)$$

A condição de ortogonalidade do OFDM é a diferença entre as frequências de duas subportadoras adjacentes  $k$  e  $l$  seja

$$f_k - f_l = n \frac{1}{T_s} \quad k, l \in \{1, 2, 3, \dots, N\}, \quad (3)$$

em que  $T_s$  é o tempo de duração do símbolo OFDM.

A possibilidade de sobreposição das subportadoras no OFDM, idealmente sem interferência interportadora, deixa o sistema susceptível a efeitos de dispersão, que podem acarretar alargamento do espectro das portadoras transmitidas.

Uma das principais causas desse alargamento é o ruído de fase gerado por osciladores. Osciladores práticos não são ideais e, portanto, são susceptíveis ao surgimento de ruído de fase, uma flutuação aleatória da fase da portadora. A literatura apresenta diversos modelos para a caracterização de ruído de fase no sistema OFDM, alguns considerados clássicos e comumente usados no projeto de esquemas de monitoramento ou mitigação do ruído de fase. Pollet *et al.* apresentam um modelo para taxa de erro de *bit* em sistemas OFDM sobre um canal aditivo gaussiano, considerando desvio de frequência e ruído de fase com distribuição de probabilidade de Wiener [8]. Tomba analisa o desempenho no receptor, considerando quatro esquemas de modulação para as subportadoras e ruído gaussiano [9]. Armada apresentou uma análise do desempenho de sistemas OFDM considerando a presença de ruído de fase e estudou a dependência do número de subportadoras na manutenção do desempenho do sistema [10].

Todos esses modelos têm pontos em comum: a aproximação para pequenos sinais, no intuito de simplificar os cálculos e a consideração de que o ruído de fase tem uma distribuição gaussiana. Essa abordagem pode ser útil em alguns casos, mas alguns trabalhos mostram que a consideração sobre a distribuição de probabilidade gaussiana para o ruído de fase responsável pela interferência interportadora não é válida para todos os casos [11]. Além disso, não há garantias físicas de que osciladores gerem apenas flutuações de fase com pequena variância [12].

Este artigo apresenta uma nova abordagem analítica para a caracterização do espectro do sinal OFDM, considerando como significativas as flutuações de fase geradas por osciladores não ideais. São deduzidas expressões para a função de autocorrelação e a densidade espectral de potência usando teoria de processos estocásticos, com base na metodologia proposta por Alencar, originalmente para a caracterização de espectros de sinais modulados em frequência [1]. O modelo considera três casos, ruído de fase com baixa, média e alta variância, e é válido para qualquer distribuição de probabilidade do ruído de fase, sendo, por isso, generalista.

O restante do artigo é arranjado da seguinte forma. A Seção II apresenta o modelo desenvolvido nesse trabalho, mostrando na Subseção II-A as expressões de autocorrelação e densidade espectral de potência para o ruído de fase com baixa variância, na Subseção II-B, para o ruído com média variância e na Subseção II-C para o ruído com alta variância.

A Seção III apresenta resultados de simulação usando Python, e são mostrados gráficos da densidade espectral de potência de uma subportadora para vários formatos de pulso e para os três casos considerados no estudo. Na Seção IV são feitas as considerações finais sobre os resultados obtidos no trabalho e as potencialidades do modelo para diversas aplicações.

## II. MODELO ESTOCÁSTICO PARA O RUÍDO DE FASE EM SISTEMAS OFDM

O sinal na saída do modulador apresentado na Figura 1 para um sistema OFDM com subportadoras moduladas em quadratura é dado por [13]

$$s(t) = \sum_{k=1}^N s_k(t) \quad (4)$$

em que  $s_k(t)$  são sinais aleatórios que podem ser escritos como

$$s_k(t) = b_k(t) \cdot \cos(\omega_k t + \theta(t) + \phi) + d_k(t) \cdot \sin(\omega_k t + \theta(t) + \phi), \quad (5)$$

e  $b_k(t)$  e  $d_k(t)$  são os sinais modulantes, definidos como

$$b_k(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_k \cdot q(t - mT_b) \quad e \quad (6a)$$

$$d_k(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_k \cdot q(t - mT_b), \quad (6b)$$

podendo ser correlacionados ou não,  $\phi$  é a fase inicial, uniformemente distribuída no intervalo  $(0, 2\pi)$  e independente dos sinais modulantes e  $\theta(t)$  representa o ruído de fase, um processo estocástico estacionário no sentido amplo com média zero e independente dos sinais modulantes.

A função de autocorrelação para a subportadora modulada em quadratura  $s_k(t)$  é definida como

$$R_K(\tau) = \mathbb{E}[s_k(t)s_k(t + \tau)]. \quad (7)$$

Substituindo (5) em (7) e seguindo os passos descritos em [13] obtém-se

$$R_K(\tau) = \left( \frac{R_B(\tau) + R_D(\tau)}{2} \right) \cdot \mathbb{E} \left[ \cos(\omega_k \tau + \theta(t + \tau) - \theta(t)) \right] + \left( \frac{R_{BD}(\tau) - R_{DB}(\tau)}{2} \right) \cdot \mathbb{E} \left[ \sin(\omega_k \tau + \theta(t + \tau) - \theta(t)) \right], \quad (8)$$

em que  $R_B(\tau)$  e  $R_D(\tau)$  são as autocorrelações dos sinais  $b_k(t)$  e  $d_k(t)$ , respectivamente e  $R_{BD}(\tau)$  e  $R_{DB}(\tau)$  suas correlações.

Se os sinais  $b_k(t)$  e  $d_k(t)$  forem descorrelacionados, então  $R_{BD}(\tau) = R_{DB}(\tau) = 0$  e, portanto,

$$R_K(\tau) = \left( \frac{R_B(\tau) + R_D(\tau)}{2} \right) \cdot \mathbb{E} \left[ \cos(\omega_k \tau + \theta(t+\tau) - \theta(t)) \right]. \quad (9)$$

Para uma análise completa, deve-se considerar diferentes potências do ruído de fase no laser. Para cada caso, a autocorrelação e a densidade espectral de potência são obtidos a partir da Equação (9), seguindo a metodologia descrita em [1].

#### A. Caso I: Ruído de fase com pequena variância

A função de autocorrelação do sinal  $s_k(t)$ , considerando ruído de fase com baixa variância, pode ser encontrada a partir da expansão do cosseno da Equação (9) em uma série de Taylor, considerando somente os primeiros termos. Após alguma manipulação matemática é possível encontrar

$$R_K(\tau) = \left( \frac{R_B(\tau) + R_D(\tau)}{2} \right) \left( 1 - R_\theta(0) + R_\theta(\tau) \right) \cos(\omega_k \tau), \quad (10)$$

em que  $R_\theta(\tau)$  é a autocorrelação do ruído de fase.

A transformada de Fourier da Equação (10) fornece

$$S_K(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left( S_B(\omega \pm \omega_k) + S_D(\omega \pm \omega_k) \right) * \left( 2\pi(1 - R_\theta(0))\delta(\omega \pm \omega_k) + S_\theta(\omega \pm \omega_k) \right), \quad (11)$$

em que  $S(\omega \pm \omega_k) = S(\omega - \omega_k) + S(\omega + \omega_k)$ ,  $S_B(\omega)$ ,  $S_D(\omega)$  e  $S_\theta(\omega)$  são as densidades espectrais de potência de  $b_k(t)$ ,  $d_k(t)$  e  $\theta(t)$ , respectivamente,  $\delta(\omega)$  é a função impulso e  $*$  denota convolução.

#### B. Caso II: Ruído de fase com média variância

Para o caso do ruído de fase com média variância, são considerados mais termos da expansão em série de Taylor usada no caso anterior e a autocorrelação é dada por

$$R_K(\tau) = \left( \frac{R_B(\tau) + R_D(\tau)}{2} \right) \cdot \cos(\omega_k \tau) \cdot \left( 2 + 2R_\theta(\tau) - 2R_\theta(0) + [R_\theta(\tau) - R_\theta(0)]^2 \right). \quad (12)$$

A densidade espectral de potência para esse caso pode ser escrita como

$$S_K(\tau) = \frac{1}{4\pi} \left( S_B(\omega \pm \omega_k) + S_D(\omega \pm \omega_k) \right) * \left( 4\pi(1 - R_\theta(0))\delta(\omega \pm \omega_k) + 2S_\theta(\omega \pm \omega_k) + [S_\theta(\omega \pm \omega_k) - 2\pi R_\theta(0)\delta(\omega \pm \omega_k)]^2 \right). \quad (13)$$

#### C. Caso III: Ruído de fase com alta variância

A incorporação de mais termos na representação em série de Taylor permite obter a função de autocorrelação e a densidade espectral de potência para o caso do ruído de fase com grande variância. No entanto, um conjunto grande de termos dificulta a interpretação do resultado obtido.

Como alternativa é usada uma abordagem proposta por Alencar em [1] usando o teorema de Woodward, que afirma que a densidade espectral de potência de um sinal modulado em frequência com alto índice de modulação é determinada por sua função densidade de probabilidade [14].

Para esse caso, seguindo os passos descritos em [1], a expressão para a autocorrelação da subportadora é dada por

$$R_K(\tau) = \left( \frac{R_B(\tau) + R_D(\tau)}{2} \right) \cdot \left( \Phi_{\theta'}(\tau)e^{j\omega_0\tau} + \Phi_{\theta'}(-\tau)e^{-j\omega_0\tau} \right), \quad (14)$$

em que  $\Phi_{\theta'}(\tau)$  é a função característica da derivada do ruído de fase e a densidade espectral de potência do sinal é dada por

$$S_K(\omega) = \frac{1}{2} \left( S_B(\omega \pm \omega_k) + S_D(\omega \pm \omega_k) \right) * p_{\theta'}(\omega \pm \omega_k), \quad (15)$$

em que  $p_{\theta'}(\cdot)$  é a função densidade de probabilidade da derivada do ruído de fase.

### III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

As expressões apresentadas em (11), (13) e (15) apresentam a operação de convolução, cujo efeito é o alargamento do formato do espectro. Para observar esse efeito, simulou-se uma subportadora do sinal OFDM, obtendo seu espectro, considerando uma distribuição gaussiana para o ruído de fase. A simulação é feita usando as bibliotecas numéricas NumPy e SciPy da linguagem Python, e são considerados múltiplos formatos de pulsos no sinal modulante, baseados no pulso do tipo cosseno levantado, definido como [15]

$$q(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < \frac{(1-\beta)T_b}{2} \\ \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left( \frac{\pi(|t| - T_b/2)}{\beta T_b} + \frac{\pi}{2} \right) \right] & , |t| \geq \frac{(1-\beta)T_b}{2} \\ 0 & , \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (16)$$

em que  $T_b$  é o tempo de duração do pulso e  $0 < \beta < 1$  é o fator de ajuste do pulso, chamado de fator de *roll-off*. Os formatos dos pulsos considerados nas simulações são mostrados na Figura 2, para quatro valores de  $\beta$ .

As Figuras 3, 5 e 7 mostram os gráficos da densidade espectral de potência de uma subportadora OFDM considerando ruído de fase com baixa, média e alta variância, respectivamente, para quatro formatos de pulso diferentes, baseados no cosseno levantado.

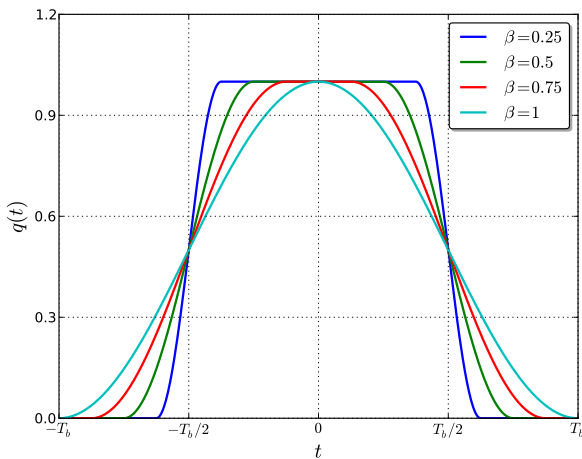


Fig. 2. Pulso com formato do cosseno levantado para diferentes valores do fator de ajuste  $\beta$ .

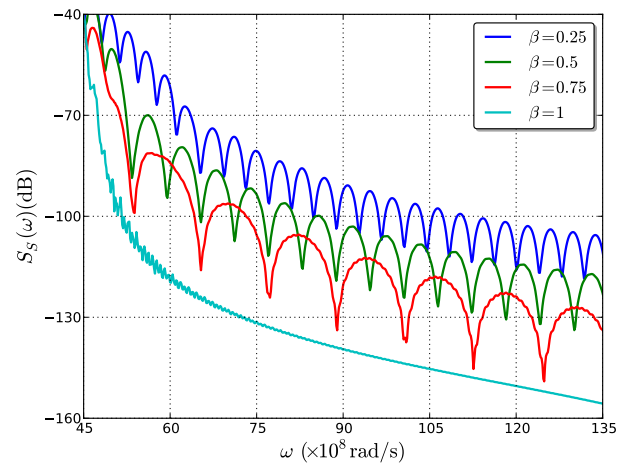


Fig. 4. Ampliação do gráfico da densidade espectral de potência da Figura 3, enfatizando o efeito do formato do pulso na largura espectral da subportadora.

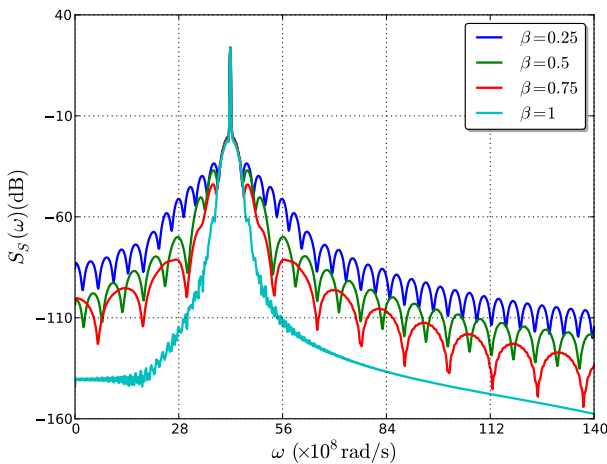


Fig. 3. Densidade espectral de potência de uma subportadora considerando diferentes formatos de pulso para valores diferentes de  $\beta$  e ruído de fase com baixa variância.

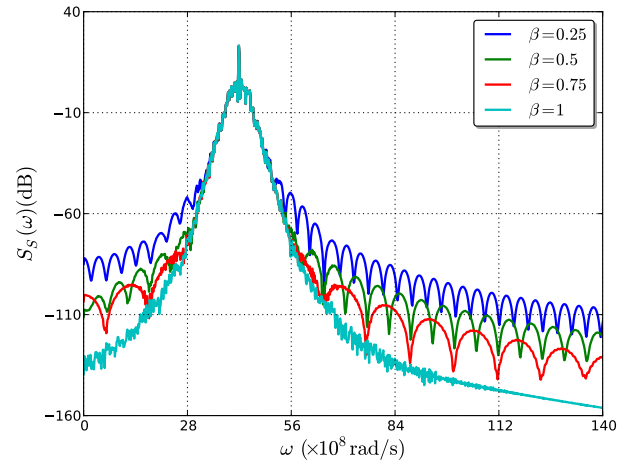


Fig. 5. Densidade espectral de potência de uma subportadora considerando diferentes formatos de pulso para valores diferentes de  $\beta$  e ruído de fase com média variância.

No gráfico da Figura 3 é possível ver que, para esse caso, o formato do espectro do laser aproxima-se de uma curva do tipo  $1/f^2$ , descrevendo um espectro lorentziano. Essa aproximação de pequenos sinais é comumente considerada na maioria dos modelos.

Como ilustrado no gráfico da Figura 5, à medida que a variância do ruído de fase aumenta, o espectro da portadora alarga, comportamento descrito pelas equações da seção anterior.

Para o caso do ruído de fase com grande variância, conforme mostra a Equação 15, o formato do espectro do laser converge para a função densidade de probabilidade da derivada do ruído de fase. Isso significa que, para uma distribuição gaussiana do ruído de fase, o formato do espectro do laser também será gaussiano, como ilustrado no gráfico da Figura 7.

Os gráficos das Figuras 4, 6 e 8 são uma ampliação de partes dos gráficos das densidades espectrais de potência, para enfatizar o efeito do formato do pulso no alargamento do

espectro. É interessante perceber que quanto menor for o valor do fator de ajuste  $\beta$  do formato do pulso, ou seja, quanto mais próximo do formato retangular for o pulso, maior o alargamento observado.

Também é possível perceber que, para o caso em que o ruído de fase tem pequena variância, o alargamento do espectro é influenciado principalmente pelo formato do pulso. À medida que a variância do ruído de fase aumenta, ele passa a ser o principal influenciador no alargamento do espectro do sinal.

#### IV. CONCLUSÕES

O principal objetivo deste artigo é apresentar uma nova abordagem analítica para a caracterização do espectro do sinal OFDM, considerando como significativas as flutuações de fase ocorridas, como efeito do uso de osciladores não ideais. Uma formulação teórica para a função de autocorrelação e a densidade espectral de potência é apresentada, usando

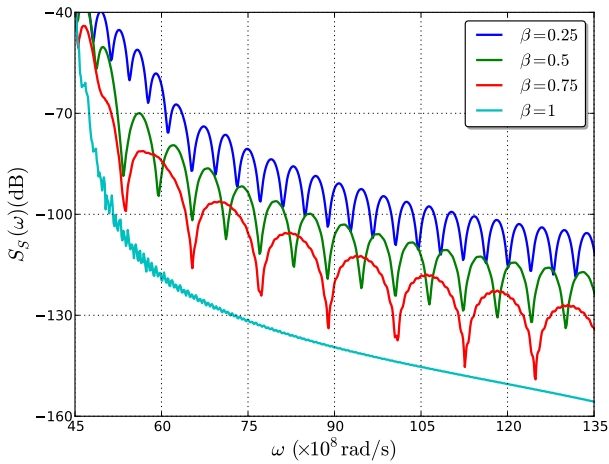


Fig. 6. Ampliação do gráfico da densidade espectral de potência da Figura 5, enfatizando o efeito do formato do pulso na largura espectral da subportadora.

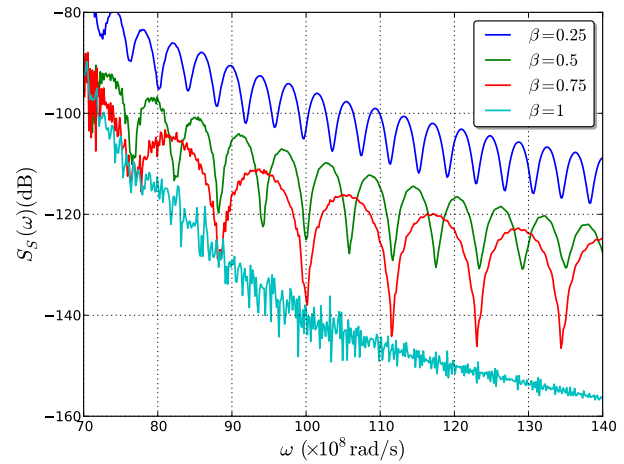


Fig. 8. Ampliação do gráfico da densidade espectral de potência da Figura 7, enfatizando o efeito do formato do pulso na largura espectral da subportadora.

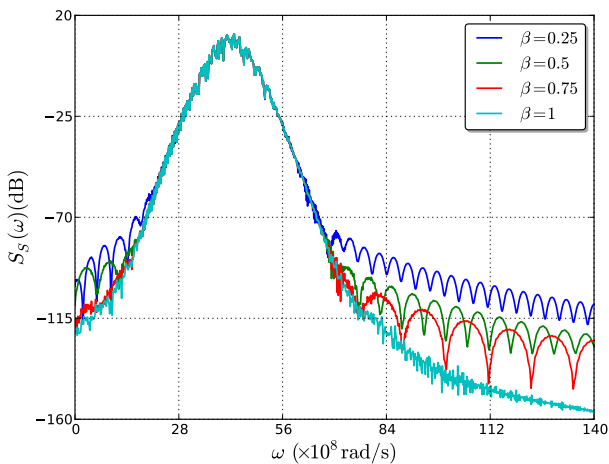


Fig. 7. Densidade espectral de potência de uma subportadora considerando diferentes formatos de pulso para valores diferentes de  $\beta$  e ruído de fase com grande variância.

processos estocásticos, baseada na metodologia desenvolvida por Alencar [1]. O modelo considera três casos, ruído de fase com baixa, média e alta variância, e é válido para qualquer distribuição de probabilidade do ruído de fase, sendo, por isso, generalista.

Esse modelo pode ser usado para o desenvolvimento de métricas de desempenho baseadas na largura de banda eficaz a partir da qual pode-se estimar o efeito da interferência interportadora. Tal abordagem é útil tanto na construção de modelos de simulação mais realísticos quanto no desenvolvimento de abordagens de mitigação dos efeitos do ruído de fase.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e ao Iecom pelo suporte ao desenvolvimento do trabalho.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Marcelo Sampaio de Alencar, "Estimação da Função Densidade de Probabilidade de Sinais Aleatórios por Análise Espectral," Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 1988.
- [2] Ramjee Prasad, *OFDM for Wireless Communications Systems*. Artech House, 2004.
- [3] Robert W. Chang, "Synthesis of Band-Limited Orthogonal Signals for Multichannel Data Transmission," *Bell System Technical Journal*, vol. 45, pp. 1775–1796, Dezembro 1966.
- [4] —, "Orthogonal frequency multiplex data transmission system," Patent 3 488 445, Janeiro, 1970. [Online]. Available: <http://www.freepatentsonline.com/3488445.html>
- [5] J. Salz e S.B. Weinstein, "Fourier Transform Communication System," in *Proceedings of the First ACM Symposium on Problems in the Optimization of Data Communications Systems*, 1969, pp. 99–128.
- [6] Abraham Peled e Antonio Ruiz, "Frequency Domain Data Transmission Using Reduced Computational Complexity Algorithms," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing - ICASSP 80*, vol. 5, 1980, pp. 964–967.
- [7] Leonard J. Cimini Jr., "Analysis and Simulation of a Digital Mobile Channel Using Orthogonal Frequency Division Multiplexing," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 33, no. 7, pp. 665–675, 1985.
- [8] Thierry Pollet, Mark Van Bladel e Marc Moeneclaey, "BER Sensitivity of OFDM Systems to Carrier Frequency Offset and Wiener Phase Noise," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 234, pp. 191–193, 1995.
- [9] Luciano Tomba, "On the Effect of Wiener Phase Noise in OFDM Systems," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 5, pp. 580–583, 1998.
- [10] Ana García Armada, "Understanding the Effects of Phase Noise in Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)," *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 47, no. 2, pp. 153–159, 2001.
- [11] Tim C. W. Schenk, Remco W. van der Hofstad, Erik R. Fledderus e Peter F. M. Smulders, "Distribution of the ICI Term in Phase Noise Impaired OFDM Systems," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 6, no. 4, pp. 1488–1500, 2007.
- [12] Alper Demir, Amit Mehrotra e Jaideep Roychowdhury, "Phase Noise in Oscillators: A Unifying Theory and Numerical Methods for Characterization," *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 47, no. 5, 2007.
- [13] Marcelo S. Alencar, Francisco Madeiro, Wamberto J. L. Queiroz e Waslon T. A. Lopes, "Stochastic Analysis of the Orthogonal Frequency Division Multiplexing Scheme," in *XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBRT'12*, 2012.
- [14] N. M. Blachman e G. A. McAlpine, "The Spectrum of a High-Index FM Waveform: Woodward's Theorem Revisited," *IEEE Transactions on Communications Technology*, vol. 17, no. 2, 1969.
- [15] John G. Proakis e Masoud Salehi, *Digital Communications*, 5th ed. McGraw-Hill, 2007.