Construção Algébrica de Constelações para Codificação Wavelet

João Fonseca Neto[1], Francisco M. de Assis[2], Edmar C. Gurjão[2] e Leocarlos B. da S. Lima[3]

***Resumo*— Este artigo propõe um método algébrico para construção de constelações para transmissão de sinais codificados por matrizes *wavelet*. Resultados obtidos pelo emprego de um algoritmo de otimização de constelações que preserva as simetrias naturais dos símbolos *wavelet* sugerem que a constelação proposta seja ótima.**

***Palavras-Chave*— Codificação de canal, *Wavelets*, Comunicação Digital, Constelação de sinais.**

***Abstract*— This paper presents an algebraic method for constructing constellations for wavelet coded signal transmission. Results obtained by use of an algorithm for optimizing constellations which preserves the natural symmetries of the wavelet symbols suggest that the proposed constellation is optimal.**

***Keywords*— Channel coding, Wavelets, Digital Communication, Signal Constellation.**

I. INTRODUÇÃO

A codificação de canal por intermédio de matrizes *wavelet* (CMW) foi proposta originalmente por Tzannes et al. [8] para tratamento dos efeitos do desvanecimento em canais de comunicações sem fio. A técnica é fundamentada nas propriedades de ortogonalidade entre as linhas de uma matriz de coeficientes *wavelet*. No contexto deste artigo, o codificador CMW mapeia sequências binárias equiprováveis em sequências símbolos de conjunto finito de inteiros denominado *alfabeto do código*. A cardinalidade do alfabeto do código aumenta fortemente com as dimensões da matriz *wavelet* e os símbolos do código não são equiprováveis. Todavia pode ser mostrado que a *taxa de entropia* da sequência codificada resultante de uma fonte i.i.d. binária equiprovável é de 1 *bit* por símbolo [7].

Um bom desempenho na transmissão e um algoritmo de decodificação simples são destaques interessantes da técnica CMW em comparação com outras técnicas de comunicações digitais em canais com desvanecimento. Por exemplo, o sistema CMW introduzido em [11] exibe menor taxa de erro de *bit* (BER) do que o esquema de codificação espaço-temporal de blocos proposto por Tarokh et al. [12], de complexidade similar.

A utilização da CMW requer o uso de constelações de sinais especialmente projetadas. Isto por duas razões: os símbolos não são equiprováveis e a cardinalidade do alfabeto do código cresce com a ordem da matriz. Além disso, com a taxa de entropia de 1 *bit*/símbolo, a eficiência espectral em um esquema de sinalização símbolo-a-símbolo, fica limitada a 1 *bit*/s/Hz. A construção de constelações especiais foi explorada em [7]. O aumento da eficiência espectral para 2 *bits*/s/Hz pode ser obtido tomando blocos de dois símbolos *wavelet* e realizando um *mapeamento simples* (definido na seção IV) destes blocos no espaço dos sinais usual (fase-quadratura, $I-Q$). Em princípio o método pode ser generalizado para blocos de comprimento $N > 2$, para obter sistemas com eficiência espectral arbitrária, entretanto o mapeamento dos blocos em sinais sobre o espaço dos sinais $I-Q$ é mais complicado devido ao aumento da cardinalidade do conjunto de blocos codificados.

Este trabalho propõe um método algébrico para construção de constelações para o mapeamento simples de blocos de símbolos *wavelet* de comprimento arbitrário, $N > 1$, sobre o espaço dos sinais de dimensão N e eficiência espectral $\eta = 2$ *bit*/s/Hz. Apresenta também um algoritmo baseado no trabalho desenvolvido por Brendan Moore [6], o qual permite derivar uma constelação sub-ótima ou ótima para dados não equiprováveis. O algoritmo aqui proposto considera as propriedades do processo CMW e os resultados de simulação indicam fortemente que a constelação, resultante do mapeamento simples é ótima segundo os critérios de otimização adotados.

A seção II deste artigo apresenta a matriz *wavelet* e suas propriedades. Na seção III, apresenta-se a técnica CMW. Na seção IV, é apresentado um método algébrico para construção de constelações para transmissão de blocos de símbolos CMW. Na seção V, é apresentado um algoritmo que permite determinar constelações ótimas ou sub-ótimas para CMW. Por fim, a seção VI apresenta as conclusões do trabalho.

II. MATRIZES WAVELET

Considere uma matriz $\mathbf{A} = [a_k^s]$, com $m \geq 2$ linhas e mg colunas, tal que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & \cdots & a_{mg-1}^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & \cdots & a_{mg-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^{m-1} & a_1^{m-1} & \cdots & a_{mg-1}^{m-1} \end{bmatrix},$$

sendo $a_k^s \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbf{A}$ é dita *matriz wavelet* ou *matriz de coeficientes wavelet*, de posto m e gênero g, se atender às condições de escalonamento *wavelet* [3]

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_k^s = m\delta_{s,0}, \quad 0 \leq s \leq m-1, \tag{1}$$

[1]Doutorando pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPgEE da UFCG e professor do Instituto Federal de Sergipe – IFS. [2]Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, Paraíba, Brasil. [3]Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Sergipe – UFS, Sergipe, Brasil. E-mails: joao.fonseca@ee.ufcg.edu.br, leocarlos@ufs.br, ecandeia@dee.ufcg.edu.br e fmarcos@dee.ufcg.edu.br.

e

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a^{s'}_{[k+mr']} \cdot \overline{a^{s}_{[k+mr]}} = m\delta_{s',s} \cdot \delta_{r',r},$$
$$0 \leq s', s \leq m-1 \quad \text{e} \quad 0 \leq r', r \leq g-1, \quad (2)$$

em que $[k+mr]$ denota a operação $k + mr \mod mg$, $\overline{a}$ é o conjugado complexo de a e $\delta_{x,y}$ representa o delta de Kronecker, i.e., $\delta_{x,y} = 1$, se $x = y$ e zero caso contrário. A Equação 1 garante que a soma dos elementos da primeira linha da matriz *wavelet* é igual ao seu posto m, e que a soma dos elementos das outras linhas é igual a zero. A Equação 2 estabelece que os vetores representados pelas linhas da matriz *wavelet*, de posto m, são ortogonais entre si, mesmo se sofrerem deslocamento por um valor múltiplo arbitrário do parâmetro m. A Equação 2 indica ainda que cada linha dessa matriz é ortogonal também a si mesma deslocada por um valor múltiplo do posto m.

A primeira linha da matriz *wavelet*, a^0, é chamada de *vetor de escala* e cada uma das outras linhas da matriz, a^s, para $0 < s < m$, é chamada de *vetor wavelet*. Em Engenharia Elétrica, o vetor de escala representa um filtro passa-baixas (FPB), ou filtro de escala, enquanto que cada vetor *wavelet* equivale a um filtro passa-faixa (FPF), ou filtro *wavelet* da matriz [10].

Uma matriz *wavelet* é dita *matriz wavelet plana* quando todos os seus elementos têm o mesmo valor absoluto. Se os elementos desta matriz pertencem aos números reais, diz-se que é uma *matriz wavelet real plana*. Se os elementos pertencem ao corpo dos número complexos, diz-se que é uma *matriz wavelet complexa plana*.

As matrizes *wavelet* reais planas com elementos normalizados satisfazem as condições de escalonamento *wavelet* modificadas [8]

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a^{s}_{k} = m \cdot \sqrt{g} \cdot \delta_{s,0},$$
$$\sum_{k=0}^{mg-1} a^{s'}_{[k+mr']} \cdot a^{s}_{[k+mr]} = m \cdot g \cdot \delta_{s',s} \cdot \delta_{r',r}. \quad (3)$$

III. CODIFICAÇÃO DE CANAL WAVELET

O processo CMW é realizado através de banco de registradores de deslocamento que atuam sobre uma sequência de dados binários de entrada. Cada registrador pondera os respectivos dados com uma matriz de coeficientes *wavelet*. A informação contida em cada *bit* de entrada é espalhada sobre vários símbolos codificados, à semelhança do que fazem códigos convolucionais [3]. A codificação baseia-se na ortogonalidade entre as linhas da matriz de codificação, que se mantém mesmo quando há superposição e adição entre as mesmas, o que possibilita a recuperação da informação utilizando-se de banco de correlatores formados a partir das linhas da matriz, sendo essa simplicidade computacional na decodificação da informação recebida uma das principais vantagens do uso de matrizes *wavelet* na codificação de canal [8].

O número máximo de símbolos *wavelet* que transportam ponderadamente parte da informação de um *bit* de entrada é definido pelo número de colunas da matriz *wavelet* e é denominado *comprimento de restrição* do codificador *wavelet*, o qual não causa grande impacto, em termos de complexidade computacional, quando da decodificação do sinal transmitido [8]. No entanto, seu aumento tem impacto direto na cardinalidade da constelação de sinais de transmissão.

Considere $\{x_n\}$ uma sequência de *bits* de informação i.i.d. equiprováveis e $\mathbf{A}_{m\times mg}$ uma matriz de codificação *wavelet* de posto m e gênero g. A CMW dá-se pelo produto de blocos de m *bits* de entrada por $\mathbf{A}$ num processo sequencial cumulativo. A cada novos m *bits* de entrada, a multiplicação é deslocada para frente em até m posições, a depender da taxa de codificação [8] (veja exemplo na Tabela I).

O processo de codificação *wavelet* permite modificar a taxa de codificação proporcionalmente à superposição entre as linhas da matriz. Quando o deslocamento entre as linhas é máximo, igual ao seu posto m, obtém-se taxa de codificação unitária. Pode-se conseguir taxas de codificação menores reduzindo a extensão da superposição entre as linhas da matriz *wavelet*, até o limite de $1/g$, quando não há mais superposição [3].

A operação de codificação também pode ser representada matricialmente, na forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A},$$

em que $\mathbf{x}$ representa uma sequência de *bits* de entrada (o produto por $\mathbf{A}$ dá-se por blocos de m *bits*) e $\mathbf{y}$ a sequência de símbolos *wavelet* de saída. Observa-se que o n-ésimo símbolo *wavelet* é obtido pela combinação dos mg últimos *bits* de entrada ponderados por coeficientes da matriz $\mathbf{A}$, ou seja,

$$y_n = \sum_{i=n-mg+1}^{n} x_i a_{k_i}, \quad (4)$$

em que a_{k_i} representa um elemento de $\mathbf{A}$.

Um símbolo y_n pode assumir qualquer valor pertencente ao conjunto $\{-mg, -mg+2, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, mg-2, mg\}$. Quando os *bits* de informação são equiprováveis, estes símbolos apresentam distribuição de probabilidade dada por [3]

$$P(y_{n=2k-mg}) = \binom{mg}{k} 0,5^{mg}, \quad 0 \leq k \leq mg. \quad (5)$$

Na decodificação, os *bits* de informação são recuperados da sequência de símbolos *wavelet* transmitidos, $\mathbf{y}$, por um banco de correlatores, considerando a ortogonalidade entre os vetores-linha da matriz *wavelet*. Pode-se representar a saída do correlator z^j, com $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, casado com a linha a^j da matriz de codificação, no instante de tempo $i = m(g+k) - 1$, em que $k \in \mathbb{N}$, como

$$\begin{aligned} z^j_i &= \sum_{k=0}^{mg-1} a^j_{(mg-1)-k} \cdot y_{i-k} \\ &= \sum_{k=0}^{mg-1} \sum_{j'=0}^{mg-1} \sum_{l=0}^{mg-1} a^j_k \left(a^{j'}_{k-lm} x_{j'+lm+i-(mg-1)} \right). \end{aligned}$$

Da Equação 3, tem-se que

$$z^j_i = x_{j+i-(mg-1)} \sum_{k=0}^{mg-1} a^j_k \cdot a^j_k = m \cdot g \cdot x_{j+i-(mg-1)}.$$

Na ausência de ruído de canal, o *bit* decodificado $x_{j+i-(mg-1)}$ será igual a -1 se $z_i^j = -mg$, ou igual a $+1$ se $z_i^j = mg$. Considerando um canal ruidoso, pode-se estimar os *bits* de informação como $\widehat{x}_{j+i-(mg-1)} = sgn(z_i^j)$, sendo $sgn(\cdot)$ a função sinal [5].

A. Exemplo de codificação para $m = 2$ e $g = 4$

Como exemplo, considere uma matriz de coeficientes *wavelet*, $\mathbf{A}_{m \times mg}$, com $m = 2$ e $g = 4$, dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 & a_4^0 & a_5^0 & a_6^0 & a_7^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 & a_7^1 \end{bmatrix}.$$

Considere uma sequência de *bits* de entrada $\mathbf{x} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Para $m = 2$, o processo de codificação é ilustrado na Tabela I. Cada m *bits* de entrada multiplicam as colunas de $\mathbf{A}$, gerando mg símbolos *wavelet*. Após cada produto, o registrador desloca m posições. Desta forma, observa-se que cada símbolo *wavelet*, y_n, porta informação de mg *bits* de entrada [8].

TABELA I

CODIFICAÇÃO WAVELET BIT A BIT. DENOTA-SE POR y_n UM SÍMBOLO WAVELET GERADO.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$x_0a_0^0$	$x_0a_1^0$	$x_0a_2^0$	$x_0a_3^0$	$x_0a_4^0$	$x_0a_5^0$	$x_0a_6^0$	$x_0a_7^0$	
$x_1a_0^1$	$x_1a_1^1$	$x_1a_2^1$	$x_1a_3^1$	$x_1a_4^1$	$x_1a_5^1$	$x_1a_6^1$	$x_1a_7^1$	
		$x_2a_0^0$	$x_2a_1^0$	$x_2a_2^0$	$x_2a_3^0$	$x_2a_4^0$	$x_2a_5^0$	$\cdots$
		$x_3a_0^1$	$x_3a_1^1$	$x_3a_2^1$	$x_3a_3^1$	$x_3a_4^1$	$x_3a_5^1$	$\cdots$
				$x_4a_0^0$	$x_4a_1^0$	$x_4a_2^0$	$x_4a_3^0$	$\cdots$
				$x_5a_0^1$	$x_5a_1^1$	$x_5a_2^1$	$x_5a_3^1$	$\cdots$
						$x_6a_0^0$	$x_6a_1^0$	$\cdots$
						$x_7a_0^1$	$x_7a_1^1$	$\cdots$
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_7	y_8	$\cdots$

IV. CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA DE CONSTELAÇÕES PARA TRANSMISSÃO DE BLOCOS DE SÍMBOLOS WAVELET

Considere um bloco de símbolos *wavelet* de comprimento N, iniciando num instante n, obtido a partir de uma codificação *wavelet* empregando uma matriz de codificação de posto m e gênero g aplicada a uma sequência de dados de entrada $\{x_n\}$. Pode-se representar este bloco na forma polinomial

$$\mathbf{y}(D) = y_n + y_{n+1}D + \cdots + y_{n+N-1}D^{N-1}, \tag{6}$$

em que D define a posição de cada símbolo no bloco, podendo ser interpretado como um operador de atraso num intervalo de sinalização, e y_n é dado na forma da Equação 4.

A probabilidade de ocorrência de blocos de símbolos *wavelet* pode ser obtida por meio da função geradora de probabilidade generalizada para polinômios $\mathbf{y}(D)$, dada por

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{y}(D)}(z) &= \mathrm{E}\left[z^{\mathbf{y}(D)}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[z^{y_n + y_{n+1}D + \cdots + y_{n+N-1}D^{N-1}}\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo a Equação 4 na Equação 7 e manipulando algebricamente o expoente de z de modo a evidenciar os *bits* de entrada $x_{n-mg+1}, \ldots, x_n$, obtém-se

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{y}(D)}(z) = \mathrm{E}\Big[& z^{p_{n-mg+1}(D)x_{n-mg+1} + \cdots} \\ & {}^{+p_{n-1}(D)x_{n-1} + p_n(D)x_n}\Big], \end{aligned} \tag{8}$$

em que $p_i(D)$ representa um polinômio em D de grau $N-1$.

Considerando os *bits* de entrada $\{x_n\}$ i.i.d., pode-se re-escrever a Equação 8 na forma

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{y}(D)}(z) = G_{\mathbf{x_{n-mg+1}}} & \left(z^{p_{n-mg+1}(D)}\right) \cdots \\ & G_{\mathbf{x_{n-1}}}\left(z^{p_{n-1}(D)}\right) G_{\mathbf{x_n}}\left(z^{p_n(D)}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Quando a fonte é binária, bipolar, com $x_i \in \{-1, +1\}$, e equiprovável, observa-se que

$$G_{x_i}\left(z^{p_i(D)}\right) = \frac{1}{2}\left(z^{p_i(D)} + z^{-p_i(D)}\right). \tag{10}$$

Desta forma, a função geradora de probabilidade de um bloco de símbolos *wavelet* na Equação 9 pode ser descrita na forma

$$G_{x_i}\left(z^{p_i(D)}\right) = \frac{1}{2^{mg}} \prod_{i=n-mg+1}^{n} \left(z^{p_i(D)} + z^{-p_i(D)}\right). \tag{11}$$

Define-se *mapeamento simples* aquele que associa cada polinômio $f(D) = \sum_{k=0}^{n} f_k D^k \in \mathbb{Z}[D]$, com $n = \deg(p) < N$, a um ponto do espaço de sinais N-dimensional, $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_n, 0, \ldots 0)$. Trata-se de um mapeamento trivial, bijetor, que surpreendentemente apresentou excelentes resultados na pesquisa explorada neste trabalho.

Os polinômios $p_i(D)$ de grau $N-1$ na Equação 11 são elementos de um espaço linear (módulo) de dimensão N de polinômios cujos coeficientes são números inteiros. Escolhendo-se uma base $\{b_1, b_2, \ldots, b_N\}$ para este espaço, possivelmente dentre os polinômios $p_i(D)$ da Equação 11, pode-se re-escrever esta equação em termos desta base, na forma

$$\begin{aligned} G_{x_i}\left(z^{p_i(D)}\right) = \frac{1}{2^{mg}} & \sum_{c_1=0}^{1} \sum_{c_2=0}^{1} \cdots \sum_{c_{mg}=0}^{1} \\ & z^{f_1(c_1,\ldots,c_{mg})b_1 + \cdots + f_N(c_1,\ldots,c_{mg})b_N}, \end{aligned} \tag{12}$$

em que f_i representa uma combinação linear dos índices $c_1, \ldots, c_{mg}$ resultante de manipulação algébrica realizada no expoente de z para enfatizar os polinômios da base.

A função geradora de probabilidade na Equação 12 expressa um somatório de monômios do tipo $z^{h(D)}$, em que um polinômio $h(D)$ representa um dos possíveis blocos de símbolos *wavelet* obtidos no processo de codificação. Se $h(D) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i b_i$, resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = f_1(c_1, \ldots, c_{mg}) \\ \vdots \\ \alpha_N = f_N(c_1, \ldots, c_{mg}) \end{cases} \tag{13}$$

para todos os valores possíveis da mg-úpla $(c_1, \ldots, c_{mg})$, determina-se o conjunto de N-úplas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N$

que correspondem biunivocamente aos polinômios $h(D)$ que representam os possíveis blocos de símbolos gerados no processo CMW. Além disso, a Equação 12 possibilita determinar a probabilidade de ocorrência de cada bloco de símbolos *wavelet* gerados.

Portanto, observamos que a função geradora de probabilidades definida na Equação 7 é uma generalização não trivial, pois mapeia blocos de símbolos *wavelet* em probabilidades e num conjunto de polinômios que podem ser representados como pontos de um espaço dos sinais de dimensão N.

Para $N = 2$, os blocos de símbolos *wavelet* obtidos pelo processo acima correspondem a coordenadas num plano que equivalem a uma possível constelação bidimensional de sinais de transmissão. De modo geral, uma rotação de 45º desta constelação resulta numa diagramação similar à exemplificada a seguir (Figura 1).

Na seção V, um procedimento de otimização das constelações aqui propostas, conservando as propriedades da técnica CMW, sugere que estas constelações são ótimas.

A. Exemplo de construção algébrica de constelação para $N = m = 2$ e $g = 4$

Considere o caso em que $N = m = 2$ e $g = 4$, cujo processo de codificação é ilustrado na Tabela I. Neste caso, a função geradora de probabilidade dos blocos/pares de símbolos *wavelet* é dada por

$$G_{\mathbf{y}(D)}(z) = \mathrm{E}\left[z^{\mathbf{y}(D)}\right] = \mathrm{E}\left[z^{y_n + y_{n+1}D}\right]. \tag{14}$$

Para uma fonte binária, bipolar e equiprovável, pode-se deduzir que a função geradora de probabilidade dos pares de símbolos *wavelet* neste exemplo é dada por

$$G_{\mathbf{y}(D)}(z) = \frac{1}{2^8}\left(z^{1+D} + z^{-1-D}\right)^4 \left(z^{1-D} + z^{-1+D}\right)^4. \tag{15}$$

Por conveniência, elege-se como base reduzida para o espaço dos polinômios, expoentes de z na Equação 15, as funções $b_1 = 1 + D$ e $b_2 = 1 - D$. Assim, pode-se escrever

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{y}(D)}(z) &= \frac{1}{2^8}\left(z^{b_1} + z^{-b_1}\right)^4 \left(z^{b_2} + z^{-b_2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2^8}\sum_{c_1=0}^{4}\binom{4}{c_1} z^{(2c_1-4)b_1} \sum_{c_2=0}^{4}\binom{4}{c_2} z^{(2c_2-4)b_2} \\ &= \frac{1}{2^8}\sum_{c_1=0}^{4}\sum_{c_2=0}^{4}\binom{4}{c_1}\binom{4}{c_2} z^{(2c_1-4)b_1+(2c_2-4)b_2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Denote por $p(D) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ os elementos do espaço de polinômios gerados pela base, em que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$.

Observando o expoente de z na Equação 16, considerando $c_1, c_2 \in \{0, 1, \ldots, 4\}$, pode-se construir o sistema linear

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2c_1 - 4 \\ \alpha_2 = 2c_2 - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}c_1 \\ c_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4 \\ -4\end{bmatrix} \tag{17}$$

que fornece os coeficientes (α_1, α_2) correspondentes biunivocamente aos polinômios $p(D)$ que representam os pares de símbolos gerados no processo de codificação. Concomitantemente, os coeficientes dos monômios $z^{p(D)}$ na Equação 16 representam as probabilidades de cada par de símbolos correspondente. A Tabela II ilustra os pares de símbolos e respectivas probabilidades obtidas para o caso em tela.

TABELA II

PARES DE SÍMBOLOS WAVELET (CASO DE $N = 2$) E SUAS RESPECTIVAS PROBABILIDADES DE OCORRÊNCIA PARA UMA MATRIZ 2×8.

Pares de símbolos *wavelet*	Prob. ($\times 2^{-8}$)
$(0, 0)$	36
$(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$	24
$(0, 4)$, $(0, -4)$, $(4, 0)$, $(-4, 0)$	16
$(4, 4)$, $(4, -4)$, $(4, 4)$, $(-4, 4)$	6
$(2, 6)$, $(6, 2)$, $(2, -6)$, $(-6, 2)$, $(-2, 6)$, $(6, -2)$, $(-2, -6)$, $(-6, -2)$	4
$(0, 8)$, $(0, -8)$, $(8, 0)$, $(-8, 0)$	1

A Figura 1 ilustra uma possível constelação de sinais para o exemplo acima, com 25 pontos correspondentes aos pares da Tabela II rotacionados em 45º.

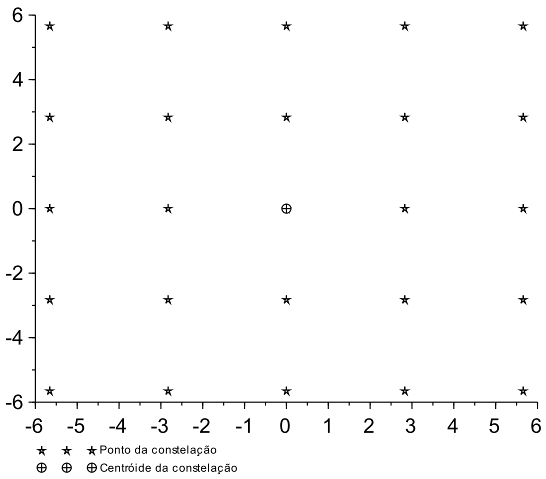

Fig. 1. Constelação para codificação *wavelet* 2×8 com bloco de $N = 2$ símbolos.

V. CONSTELAÇÃO DE SINAIS ÓTIMA OU SUB-ÓTIMA PARA TRANSMISSÃO DE BLOCOS DE SÍMBOLOS WAVELET

A transmissão de dados binários de fonte equiprovável é razoavelmente bem conhecida, havendo vários esquemas de modulação e constelações de sinais para tanto. Contudo, quando os dados da fonte são não equiprováveis, estas constelações não são ótimas. Em [6], Moore propõe um método para obtenção de constelações de sinais ótimas ou sub-ótimas para fontes não equiprováveis.

Para uma constelação ótima, em termos de taxa de erro de símbolo mínima (SER, do inglês *symbol error rate*), considerando sua energia média invariante e detecção baseada no critério de probabilidade *a posteriori* máxima (MAP, do inglês *maximum a posteriori probability*), uma condição necessária é que sua média geométrica seja o ponto nulo. Nessa situação, a SER não é influenciada por rotação ou translação da constelação, porém é afetada pela alteração da relação entre as distâncias entre os pontos [6].

A condição de média nula ocorre naturalmente numa constelação formada por pontos derivados de blocos de símbolos *wavelet*, como é o caso do exemplo da Figura 1. Ela é consequência direta das simetrias observadas derivadas do processo CMW.

Na busca pela constelação ótima ou sub-ótima respeitando a simetria natural dos blocos de símbolos *wavelet*, sua média nula e a energia média da constelação dada por $E = \sum_{i=1}^{M} p_i \left\|\vec{s}_i\right\|^2$, em que M é o número de pontos da constelação e p_i a probabilidade de ocorrência de um ponto $\vec{s}_i$, o algoritmo aqui proposto seleciona aleatoriamente duas "cascas esféricas" distintas na constelação inicial.

Escolhidas as cascas, faz-se o raio de uma das cascas selecionadas variar entre os raios das cascas imediatamente superior e inferior. Um novo raio para a outra casca do par selecionado é determinando de modo a preservar o critério de invariabilidade da energia da constelação. Avaliando o desempenho da constelação para cada novo par de cascas, determina-se qual par de raios das cascas selecionadas maximiza o desempenho do sistema. Isto é feito buscando minimizar a função objetivo da Equação 19 [6]. Ato contínuo, o processo seleciona aleatoriamente novos pares de cascas e repete o processamento até que a constelação obtida se estabilize, sendo assim considerada ótima ou sub-ótima.

Para o cálculo do desempenho de uma constelação, considera-se o limitante superior para a SER [10]

$$P_s \leq \sum_{u=1}^{M} \sum_{i \neq u} P\left(\epsilon_{iu}\right) P\left(\vec{s}_u\right), \tag{18}$$

sendo ϵ_{iu} o erro de decodificação de $\vec{s}_i$ dado que $\vec{s}_u$ foi transmitido e

$$P\left(\epsilon_{iu}\right) = Q\left(\frac{\left\|\vec{s}_i - \vec{s}_u\right\|}{\sqrt{2N_0}} + \frac{\sqrt{2N_0}\ln\frac{P(\vec{s}_u)}{P(\vec{s}_i)}}{2\left\|\vec{s}_i - \vec{s}_u\right\|}\right),$$

em que $Q(\cdot)$ é a função Q gaussiana. Este limitante da Equação 18 é preciso para médias e altas SNR e impreciso para baixas.

Considerando um par de cascas selecionadas, pode-se desprezar na Equação 18 os termos para u e i distintos dos pontos destas cascas, pois são constantes. Para calcular o limitante superior, utiliza-se os termos restantes, de forma que uma função objetivo, F, deve ser minimizada para cada par de cascas processadas [10]:

$$\begin{aligned} F = \sum_{i \neq 1} P(\epsilon_{i1}) P(\vec{s}_1) + \sum_{i \neq 2} P(\epsilon_{i2}) P(\vec{s}_2) \\ + \sum_{u=3}^{M} P(\vec{s}_u)P(\epsilon_{1u}) + P(\epsilon_{2u}) \end{aligned} \tag{19}$$

No processamento visando a otimização, observou-se que rotações dos pontos da constelação não influenciavam no desempenho do sistema. Também, observou-se que a translação dos pontos da constelação, diferente da axial (alteração da energia do ponto), resultava em perda das simetrias ou implicava em redução do desempenho do sistema. Desta forma, de modo a preservar as simetrias naturais da constelação, seus pontos foram agrupados em "cascas esféricas", em que cada casca agrupa os pontos de mesma energia. Portanto, a cada iteração, "cascas esféricas" são submetidas a operações de expansão e contração.

Os resultados de simulação indicam fortemente que a constelação inicial é, de fato, ótima segundo os critérios de otimização adotados. Os resultados obtidos sugerem ainda que, para modulações multidimensionais, blocos de comprimento $N > 2$ correspondam também a constelações ótimas, sob as mesmas condições.

VI. Conclusões

Nesse trabalho foi proposto um método algébrico para construção de constelações para transmissão de sinais codificados por matrizes *wavelet*. Apresentou-se também um algoritmo de otimização de constelações para símbolos *wavelet*, baseado no esquema proposto em [6], que preserva as características de simetrias naturais destas constelações, cujos resultados sugerem fortemente que a constelação gerada pelo procedimento aqui proposto seja ótima.

Referências

[1] Talles Rodrigues Ferreira, *Modulação Quantizada para Sistemas com Codificação Wavelet Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh*. Dissertação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal/RN, 2009.

[2] Homayoun Nikookar, *Wavelet Radio Adaptive and Reconfigurable Wireless Systems Based on Wavelets*. New York, Cambridge University Press, 2013.

[3] H. L. Resnikoff e R. O. Wells-Jr, *Wavelet Analysis: The Scalable Structure of Information*. New York, Springer-Verlag, 1998.

[4] Eline Alves Santos, Edmar C. Gurjão e Francisco Marcos de Assis, *Aumento da Eficiência Espectral de Sistemas com Codificação Wavelet*. XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT, 2013.

[5] Luiz Felipe de Queiroz Silveira, *Análise da Codificação Wavelet em Sistemas Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh Plano*. Tese. Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande/PB, 2006.

[6] Brendan F. D. Moore, *Pairwise Optimization of Modulation Constellations for Non-Uniform Source*. These, Queen's University. Kingston, Ontario, Canada, 2009.

[7] Eline Alves Santos, *Sistema de Transmissão com Codificação Wavelet de Eficiência Espectral Arbitrária*. Tese. Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande/PB, 2014.

[8] Michael A. Tzannes e Marcos C. Tzannes, *Bit-by-bit channel coding using wavelets. Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference – GLOBECOM'92*, pp. 684–688, 1992.

[9] Yannis Viniotis, *Probability and Random Processes for Electrical Engineers*. McGraw-Hill, 1998.

[10] Brendan F. D. Moore, Glen Takahara e Fady Alajaji, *Pairwise Optimization of Modulation Constellations*. In IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing, August, 2009.

[11] L. F. Q. Silveira, L. G. Q. Silveira, F. M. de Assis, E. L. Pinto, *Analysis and optimization of wavelet-coded communication systems*, IEEE Transactions on Wireless Communications, 2009.

[12] V. Tarokh and H. Jafarkhani and A. Calrdebank, *Space-Time block Coding for wireless communications: performance results*, IEEE J. Selected Areas on Communications, 1999.