

Recuperação de Sequências em Esquemas de Comunicação Multiusuário Baseados na Transformada Fracional de Fourier

Antonio D. Assunção e Juliano B. Lima

Resumo— Neste trabalho, discute-se um novo método para a recuperação de sequências em esquemas de comunicação multiusuário baseados na transformada discreta fracional de Fourier (DFrFT). São utilizados como sequências dos usuários vetores pertencentes a um conjunto ortogonal de autovetores da matriz de transformação da DFrFT. O método investigado recorre ao cálculo de produtos internos entre a sequência recebida de um canal em que as sequências dos usuários interferem de forma aditiva e um autovetor de referência. As simulações realizadas indicam que o método proposto apresenta um desempenho melhor que aquele observado quando as sequências são recuperadas por meio da resolução de um sistema de equações lineares envolvendo vetores.

Palavras-Chave— Transformada discreta fracional de Fourier, autovetores, comunicação multiusuário.

Abstract— In this paper, a new method for recovering sequences in multiuser communication schemes based on the discrete fractional Fourier transform (DFrFT) is discussed. In this proposal, vectors taken from an orthogonal eigenvector set of the DFrFT matrix are used as user sequences. The method investigated in this paper employs the computation of dot products between the sequence received from a real additive channel and an eigenvector related to a specific user. Simulations indicate that the performance of the proposed method is better than those observed in the method where user sequences are recovered from the solution of a linear system of equations.

Keywords— Discrete fractional Fourier transform, eigenvectors, multiuser communication.

I. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, as transformadas fracionais têm recebido bastante atenção de diversas comunidades científicas. Sendo empregadas como o fundamento de técnicas para proteção de informação, para transmissão de sinais em canais de comunicação e para remoção de ruído no chamado *domínio tempo-frequência*, essas ferramentas provêm maior flexibilidade que as transformadas usuais [1], [2], [3], [4]. Isso se explica pelo fato de que uma transformada fracional corresponde a uma generalização da respectiva transformada ordinária.

No caso da transformada fracional de Fourier (FrFT, do inglês *fractional Fourier transform*), a generalização mencionada consiste no cálculo de potências arbitrárias do operador integral que define a transformada de Fourier ordinária.

Antonio Dias de Assunção, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas, Universidade de Pernambuco, Recife-PE, Brasil, E-mail: adassuncao@gmail.com.

Juliano Bandeira Lima, Departamento de Matemática / Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Pernambuco; Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas, Universidade de Pernambuco, Recife-PE, Brasil, E-mail: juliano@dmate.ufpe.br

Como o cálculo da transformada de Fourier de um sinal no domínio do tempo pode ser interpretado como uma rotação anti-horária por um ângulo igual a $\pi/2$ no plano tempo-frequência (vide Figura 1), a FrFT pode ser compreendida como uma ferramenta que proporciona rotações por ângulos arbitrários $\alpha = a\pi/2$, em que $a \in \mathbb{R}$ é denominado parâmetro fracional [5].

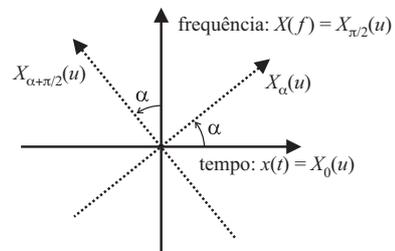


Fig. 1. Representação do plano tempo-frequência e ilustração de uma rotação por um ângulo $\alpha = a\pi/2$, proporcionada pela aplicação de uma transformada fracional de Fourier.

No presente trabalho, é investigado um procedimento para recuperação de sequências em esquemas de comunicação multiusuário baseados na transformada discreta fracional de Fourier (DFrFT, do inglês *discrete fractional Fourier transform*). A DFrFT é obtida por meio da fracionalização da transformada discreta de Fourier (DFT, do inglês *discrete Fourier transform*) e representa uma aproximação da FrFT, adequada ao processamento de sinais digitais [6]. Os referidos esquemas de comunicação empregam como sequências dos usuários autovetores da matriz de transformação da DFrFT, que, por serem ortogonais, podem ser recuperados após a transmissão por um canal somador real sujeito à ação de ruído Gaussiano [7]. Em trabalhos anteriores, tal recuperação era feita por meio da resolução de um sistema de equações lineares envolvendo vetores [7], [8]. Neste trabalho, a recuperação das sequências é feita pelo cálculo de um produto interno entre a sequência recebida do canal e um autovetor de referência.

Após esta introdução, apresenta-se, na Seção II, a definição da DFrFT empregada neste trabalho. Na Seção III, são descritos os esquemas de comunicação multiusuário baseados na DFrFT; particularmente, descreve-se a nova abordagem para recuperação das sequências dos usuários. Na Seção IV, são apresentadas simulações que permitem uma avaliação de desempenho dos esquemas investigados na presença de ruído. Finalmente, na Seção V, são apresentadas as considerações finais deste trabalho.

II. A TRANSFORMADA DISCRETA FRACTIONAL DE FOURIER

A transformada discreta fracional de Fourier foi introduzida no final da década de 1990 [9], [6]. As principais motivações para a definição da DFrFT são a possibilidade de se aplicar esta ferramenta fracional a sinais inerentemente de tempo discreto (imagens produzidas por uma câmera digital, por exemplo) e a viabilidade do cálculo da FrFT num computador digital. Neste sentido, é como se a DFrFT estivesse para a DFT assim como a FrFT está para a transformada de Fourier ordinária. Para validar tal correspondência, as seguintes propriedades devem ser observadas [6]:

- Unitariedade;
- Aditividade;
- Redução à DFT, quando $a = 1$;
- Aproximação numérica da FrFT.

Nos últimos quinze anos, diversas definições da DFrFT foram propostas [10]. Na abordagem que fundamenta a aplicação investigada neste trabalho, a DFrFT é construída a partir da expansão espectral da matriz da DFT. Para isso, obtém-se, por meio de uma matriz que comuta com a matriz da DFT, um conjunto ortonormal de autovetores a serem empregados na referida expansão [6]. O operador obtido por meio deste procedimento atende as propriedades anteriormente listadas. A autoestrutura da matriz da DFT, cujo conhecimento é imprescindível para o entendimento da construção mencionada, é descrita a seguir.

A. A Autoestrutura da Transformada Discreta de Fourier

Considere uma sequência $\mathbf{x} = (x_i), x_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \dots, N-1$. O cálculo da DFT de \mathbf{x} fornece a sequência $\mathbf{X} = (X_k), X_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \dots, N-1$, cujas componentes são calculadas por

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j \frac{2\pi ki}{N}}. \quad (1)$$

As componentes de \mathbf{X} podem ser obtidas por meio de

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \quad (2)$$

em que \mathbf{F} corresponde à matriz de transformação da DFT.

A matriz \mathbf{F} possui apenas quatro autovalores distintos, $\{1, -1, j, -j\}$. Isso independe do comprimento da transformada construída. Os autovalores da matriz \mathbf{F} possuem multiplicidades dependentes do valor de N (vide Tabela I). Além disso, os autovetores de \mathbf{F} relacionados aos autovalores ± 1 possuem simetria par, enquanto os autovetores relacionados aos autovalores $\pm j$ possuem simetria ímpar [11].

TABELA I
MULTIPLICIDADES DOS AUTOVALORES DA MATRIZ DA DFT.

N	Mult. 1	Mult. -1	Mult. j	Mult. $-j$
$4n$	$n+1$	n	$n-1$	n
$4n+1$	$n+1$	n	n	n
$4n+2$	$n+1$	$n+1$	n	n
$4n+3$	$n+1$	$n+1$	n	$n+1$

A expansão espectral da matriz \mathbf{F} é escrita como

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T, \quad (3)$$

em que \mathbf{V} é uma matriz cujas colunas são autovetores que pertencem a um conjunto ortonormal de autovetores de \mathbf{F} e \mathbf{V}^T é a sua versão transposta; $\mathbf{\Lambda}$ corresponde a uma matriz diagonal que, por sua vez, tem o elemento da $(k+1)$ -ésima linha e $(k+1)$ -ésima coluna dado pelo autovalor $\lambda_k = e^{-j \frac{\pi}{2} k}$ de \mathbf{F} . Pode-se obter \mathbf{F}^a , que corresponde à matriz da DFrFT, elevando-se $\mathbf{\Lambda}$ ao parâmetro fracional a , isto é,

$$\mathbf{F}^a = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^a\mathbf{V}^T. \quad (4)$$

Os elementos não-nulos de $\mathbf{\Lambda}^a$ são dados pela a -ésima potência do elemento na posição correspondente em $\mathbf{\Lambda}$. O procedimento para obter os autovetores a serem empregados na construção da matriz \mathbf{V} é descrito a seguir.

B. Um conjunto ortonormal de autovetores da matriz da DFT

A obtenção de um conjunto ortonormal de autovetores da matriz da DFT a ser empregado na construção da matriz \mathbf{V} é baseada na introdução de uma matriz \mathbf{S} que comuta com a matriz \mathbf{F} , isto é, $\mathbf{S}\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{S}$. Se duas matrizes comutam, garante-se a existência de pelo menos um conjunto em comum de autovetores entre elas [12]. Mostrando-se que a matriz \mathbf{S} a ser introduzida possui todos os autovalores distintos e, portanto, um único conjunto de autovetores, elimina-se a ambiguidade de selecionar, para uso na expansão espectral dada pela Equação (3), um conjunto de autovetores diretamente da matriz \mathbf{F} ; como a matriz \mathbf{F} possui autovalores com multiplicidades maiores que 1, seriam possíveis diferentes escolhas para o conjunto de autovetores mencionado.

A matriz \mathbf{S} , que comuta com a matriz \mathbf{F} , é dada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} C_0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & C_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & C_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

em que $C_n = 2[\cos(\frac{2\pi}{N}n) - 2]$. Essa estrutura matricial é originária de uma equação de diferença análoga à equação diferencial cujas soluções são as chamadas funções Hermite-Gaussianas [6]. Essas são as autofunções da transformada de Fourier empregadas na definição da FrFT. Isso significa que os autovetores de \mathbf{S} , a serem obtidos em seguida, podem ser interpretados como funções Hermite-Gaussianas discretas, o que indica uma analogia entre a DFrFT definida por meio da presente abordagem e a FrFT.

O cálculo dos autovetores de \mathbf{S} é facilitado pela introdução da matriz

$$\mathbf{P} = \sqrt{2}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & & 1 & 1 & & \\ 0 & & & & 1 & -1 & \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & 1 & & & & & -1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

que extrai a parte par e a parte ímpar de um vetor, e que satisfaz $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$. Matrizes tridiagonais simétricas $\mathbf{E}\mathbf{v}$ e $\mathbf{O}\mathbf{d}$, com dimensões $\lfloor \frac{N+2}{2} \rfloor$ e $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$, são obtidas a partir da transformação de similaridade

$$\mathbf{PSP}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\mathbf{v} & 0 \\ 0 & \mathbf{O}\mathbf{d} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

A matriz \mathbf{S} possui todos os seus autovalores distintos, conforme havia sido mencionado anteriormente, pelo fato de ser similar a uma matriz formada por blocos de matrizes tridiagonais simétricas, as quais possuem todos os seus autovalores distintos [12]. Finalmente, os autovetores com simetria par da matriz \mathbf{S} são obtidos a partir da equação

$$\mathbf{v}_{2k} = \mathbf{P}[\mathbf{e}_k^T | 0 \cdots 0]^T, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \quad (8)$$

em que \mathbf{e}_k é um autovetor de $\mathbf{E}\mathbf{v}$; os autovetores com simetria ímpar da matriz \mathbf{S} são obtidos a partir da equação

$$\mathbf{v}_{2k+1} = \mathbf{P}[0 \cdots 0 | \mathbf{o}_k^T]^T, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{N-3}{2} \right\rfloor, \quad (9)$$

em que \mathbf{o}_k é um autovetor de $\mathbf{O}\mathbf{d}$. Os autovetores \mathbf{v} obtidos são dispostos ao longo das colunas de \mathbf{V} obedecendo a um critério de ordenação que recorre ao número de inversões de sinal ao longo de suas componentes [6]. Quando a dimensão da matriz de transformação, dada por N , é par, o vetor \mathbf{v}_{N-1} é nulo. Com isso, obtém-se a matriz de transformação \mathbf{F}^a da DFrFT.

III. ESQUEMAS DE COMUNICAÇÃO MULTIUSUÁRIO BASEADOS NA DFRFT

A proposta de uso da DFrFT em esquemas de comunicação multiusuário foi inicialmente apresentada em [7]. A ideia central da técnica é utilizar como sequências dos usuários os autovetores da matriz de transformação da DFrFT. Assume-se que as sequências dos usuários são transmitidas de forma síncrona por meio de um canal somador real (RAC, do inglês *Real Adder Channel*), resultando num *vetor soma* [8]. A ortogonalidade entre os autovetores, que se encontram em subespaços vetoriais distintos, permite a recuperação de cada sequência de usuário na recepção.

Neste esquema de comunicação, a quantidade de usuários simultâneos é limitada pelo número de autovalores distintos da matriz de transformação [8]. O número de autovalores distintos da matriz da DFrFT depende do parâmetro fracional a e do comprimento N da transformada construída. Esse é o ponto chave que justifica o emprego da DFrFT para esta finalidade em detrimento ao uso de outras transformadas, cujos números de autovalores distintos são fixos e independentes das dimensões da matriz de transformação [11], [8]. Os autovetores da DFrFT, isto é, as sequências dos usuários, são obtidos por meio do procedimento sistemático descrito na Seção II-B e possuem todas as componentes reais.

De modo mais específico, o que se faz é associar ao i -ésimo usuário o autovetor \mathbf{v}_i da matriz \mathbf{F}^a . O autovetor \mathbf{v}_i corresponde a um dos vetores pertencentes ao conjunto resultante do processo de fracionalização da DFT. A partir destes vetores, são, então, gerados outros vetores pela multiplicação

entre \mathbf{v}_i e certos fatores de escala. Desta multiplicação, resulta um conjunto de sequências de usuário $\mathbf{x}_i^{\alpha_i} = \alpha_i \mathbf{v}_i$, em que o valor de α_i é escolhido a partir de um conjunto predefinido de fatores de escala. Cada símbolo do i -ésimo usuário é mapeado numa dessas sequências.

Num esquema em que um usuário deseja transmitir, sobre cada autovetor, palavras binárias com 3 bits, por exemplo, seriam necessários pelo menos 8 fatores de escala α_i distintos. Estes fatores poderiam ser $\{-7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7\}$. Se os usuários desejassem transmitir palavras binárias com 4 bits, seriam necessários pelo menos 16 fatores de escala α_i distintos. Estes fatores poderiam ser $\{\pm 7, \pm 91/15, \pm 77/15, \pm 21/5, \pm 49/15, \pm 7/3, \pm 7/5, \pm 7/15\}$. Sendo distribuídos de forma equispçada ao longo de um mesmo intervalo (no caso destes dois últimos exemplos, o referido intervalo é $[-7, +7]$), os desempenhos de esquemas com números diferentes de fatores de escala podem ser comparados. Tal comparação é apresentada na Seção IV.

Assumindo que o canal de comunicação por meio do qual os U usuários enviam suas sequências está sujeito à ação de um ruído aditivo Gaussiano branco denotado por \mathbf{n} , a sequência efetivamente recebida por um receptor é dada por $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{n}$, em que $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^U \mathbf{x}_i^{\alpha_i}$. As técnicas para a recuperação das sequências dos usuários são apresentadas a seguir.

A. Recuperação das sequências dos usuários por meio da solução de sistemas de equações

Conforme apresentado em [7], uma das técnicas utilizadas para a recuperação das sequências dos usuários é a solução de sistemas de equações lineares envolvendo vetores. Neste método, se U usuários estiverem transmitindo simultaneamente suas sequências, o que se faz é calcular, $U - 1$ vezes de forma recursiva, a DFrFT de $\hat{\mathbf{y}}$. Na ausência de ruído, isso resulta na obtenção de U equações lineares cujas incógnitas são os autovetores $\mathbf{x}_i^{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, U$. Para ilustrar este procedimento, considere, por exemplo, a presença de apenas dois usuários simultâneos. O vetor recebido seria $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} = \mathbf{x}_1^{\alpha_1} + \mathbf{x}_2^{\alpha_2}$, em que $\mathbf{x}_1^{\alpha_1}$ e $\mathbf{x}_2^{\alpha_2}$ estão associados, respectivamente, aos autovalores $+1$ e -1 da DFT¹. Calculando a DFT de \mathbf{y} , obtém-se $\mathbf{F}\mathbf{y} = \mathbf{x}_1^{\alpha_1} - \mathbf{x}_2^{\alpha_2}$ e, daí, calcula-se

$$\mathbf{x}_1^{\alpha_1} = \frac{\mathbf{y} + \mathbf{F}\mathbf{y}}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2^{\alpha_2} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{F}\mathbf{y}}{2}.$$

Naturalmente, o cenário exemplificado pode ser estendido para um maior número de usuários.

Considerando a presença do ruído, a recuperação do autovetor associado ao i -ésimo usuário deve ser feita a partir do vetor $\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i^{\alpha_i} + \mathbf{n}_i$, resultante da solução do sistema de equações. Neste caso, o que se faz é buscar, dentre os possíveis autovetores $\mathbf{x}_i^{\alpha_i}$, aquele para o qual a distância Euclidiana $\|\mathbf{x}_i^{\alpha_i} - \hat{\mathbf{x}}_i\|$ é mínima. Assim, determina-se o α_i que o usuário em questão selecionou para gerar o autovetor efetivamente usado na sua transmissão.

¹Neste caso, pode-se empregar a própria DFT, em vez da DFrFT, uma vez que apenas dois autovalores distintos são necessários.

B. Recuperação das sequências dos usuários pelo cálculo de produtos internos

O processo de recuperação das sequências dos usuários introduzido neste trabalho é baseado no cálculo de produtos internos. De forma mais específica, se um receptor estiver interessado em recuperar a sequência enviada pelo i -ésimo usuário, o que se faz é calcular o produto interno $\langle \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v}_i \rangle$ entre os vetores $\hat{\mathbf{y}}$ e \mathbf{v}_i ; este último corresponde ao autovetor unitário de referência utilizado na geração das sequências do i -ésimo usuário. Considerando, inicialmente, a ausência do ruído e levando em conta a ortogonalidade entre autovetores pertencentes a autoespaços distintos, tem-se que

$$\langle \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{x}_i^{\alpha_i}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \alpha_i. \quad (10)$$

Quando se considera a ação do ruído, o que se obtém a partir do produto interno da Equação (10) é um número α que não corresponde de forma exata a um dos α_i predefinidos pelo esquema de comunicação. Assim, o receptor deve buscar, dentre os possíveis valores de α_i , aquele para o qual a distância Euclidiana $\| \alpha_i - \alpha \|^2$ é mínima. Este α_i é, então, assumido como sendo o fator de escala que o usuário em questão selecionou para gerar o autovetor efetivamente usado na sua transmissão.

O desempenho deste esquema de comunicação pode ser medido pela taxa de sequências interpretadas com erro, o que está diretamente relacionado à relação sinal-ruído (SNR, do inglês *Signal-to-Noise Ratio*) e ao número de fatores de escala predefinidos a serem empregados na geração das sequências de cada usuário. Quanto menor a SNR, maior deve ser a taxa de sequências interpretadas com erro. Esta degradação de desempenho também deve ser observada, se a SNR for mantida constante e o número de fatores de escala empregados for incrementado.

IV. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Como forma de realizar uma avaliação do desempenho, na presença de ruído, dos esquemas de comunicação multiusuário estudados neste artigo, foram executadas simulações utilizando o *software* Matlab[®]. A forma de recuperação das sequências simulada foi a baseada no cálculo de produtos internos entre o vetor recebido do canal e o autovetor de referência empregado na geração das sequências de um usuário específico. As simulações forneceram gráficos de desempenho para diferentes condições, em termos de número de usuários simultâneos e de número de fatores de escala empregados, ilustrando a taxa de sequências identificadas com erro após a realização de determinado número de transmissões.

Foram realizadas simulações para esquemas com 4, 8 e 16 usuários simultâneos, tendo sido empregados os seguintes parâmetros para a DFrFT:

- Esquema com 4 usuários: $N = 5$ e $a = 1$;
- Esquema com 8 usuários: $N = 9$ e $a = 0,5$;
- Esquema com 16 usuários: $N = 17$ e $a = 0,25$.

Para cada esquema de comunicação, foram realizadas simulações empregando 4, 8 e 16 fatores de escala. Combinando os três possíveis números de usuários simultâneos com os três possíveis números de fatores de escala, 9 cenários de

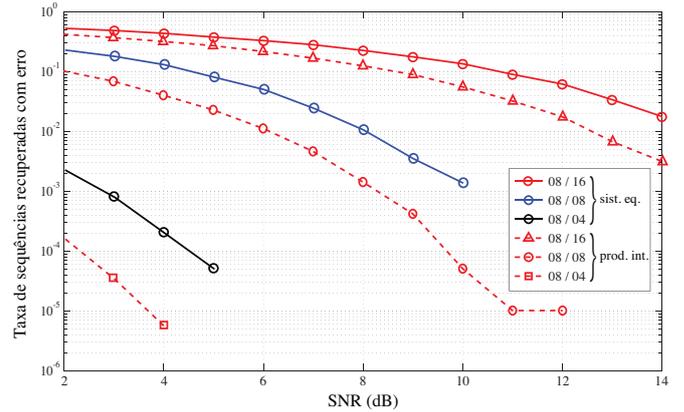


Fig. 3. Desempenhos de esquemas de comunicação baseados no DFrFT com 8 usuários simultâneos: comparação entre os métodos de recuperação de sequências pelo cálculo de produtos internos e por meio da solução de sistemas de equações lineares. Na legenda associada a cada curva do gráfico, utiliza-se a indicação *número de usuários / número de fatores de escala*.

simulação distintos foram construídos. Para cada um desses cenários, o valor da SNR foi variado, a partir de 2 dB, com passo de 1 dB, até 14 dB.

A Figura 2 contém uma consolidação de todas as simulações realizadas. Nesta figura, é possível observar que, praticamente, não há diferença de desempenho entre esquemas que empregam um mesmo número de fatores de escala, embora tais esquemas agreguem números diferentes de usuários simultâneos. Por outro lado, à medida em que o número de fatores de escala aumenta, o desempenho dos esquemas é degradado. Tais observações estão em consonância com os resultados esperados (vide comentários no final da Seção III).

Na Figura 3, é comparado, para esquemas com 8 usuários simultâneos, o desempenho obtido quando se faz a recuperação das sequências calculando produtos internos com aquele obtido quando as sequências são recuperadas pela solução de equações lineares envolvendo vetores. Nas curvas presentes no gráfico, observa-se que a recuperação realizada pelo cálculo de produtos internos produz melhores resultados. Aparentemente, existe a tendência de que a diferença entre os desempenhos conseguidos pelas duas alternativas mencionadas diminua, à medida em que o número de fatores de escala empregados aumenta. Resultados semelhantes foram observados para esquemas com 4 e 16 usuários simultâneos.

Uma possível explicação para o resultado apresentado é que, com o cálculo de produtos internos, obtém-se uma medida mais global, sobre a qual o erro causado pelo ruído pode se dispersar mais. Por outro lado, com a solução de um sistema de equações, calcula-se de forma explícita cada componente de um vetor a ser comparado com um grupo de vetores de referência. Assim, o impacto do ruído sobre componentes com valores mais baixos pode influenciar negativamente todo o procedimento de interpretação do vetor recebido. De qualquer forma, é importante ressaltar que uma confirmação acerca da explicação fornecida depende de uma abordagem analítica mais detalhada, considerando as peculiaridades e os aspectos teóricos de cada método de recuperação. Tal análise se encontra sob investigação.

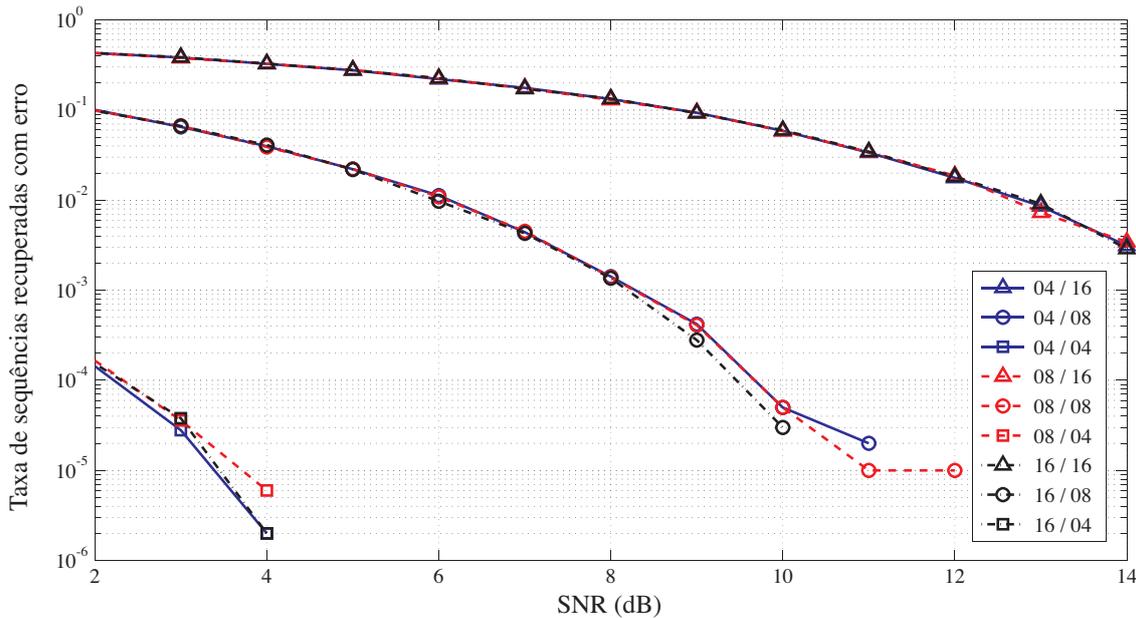


Fig. 2. Desempenho de esquemas de comunicação baseados na DFrFT com 04, 08 e 16 usuários simultâneos. A recuperação das seqüências é feita pelo método que emprega o cálculo de produtos internos. Na legenda associada a cada curva do gráfico, utiliza-se a indicação número de usuários / número de fatores de escala.

V. CONCLUSÕES

Neste artigo, foram discutidos esquemas de comunicação multiusuário baseados na DFrFT. Tais esquemas, introduzidos recentemente na literatura, consistem em transmitir dados dos usuários sobre autovetores da matriz de transformação da DFrFT. Quando diversos usuários transmitem suas seqüências simultaneamente por um canal somador real, essas seqüências se somam de forma síncrona e produzem um *vetor soma*, ao qual um ruído aditivo é também incorporado. Associando usuários diferentes a autovetores pertencentes a subespaços vetoriais distintos, consegue-se, na recepção, recuperar a seqüência transmitida por um usuário específico.

O artigo apresentou uma nova abordagem para a recuperação das seqüências dos usuários por meio do cálculo de produtos internos. Foram realizadas simulações com o objetivo de avaliar o comportamento do procedimento proposto na presença de ruído. Verificou-se que o desempenho dos esquemas melhora, à medida em que o número de fatores de escala diminui, isto é, à medida em que o número de seqüências que cada usuário pode escolher para enviar seus dados é menor. Também foi observado que, para esquemas com o mesmo número de fatores de escala, o desempenho independe do número de usuários simultâneos. Finalmente, observou-se que o desempenho obtido quando as seqüências são recuperadas pela abordagem proposta neste artigo tende a ser melhor que aquele obtido quando as seqüências são recuperadas pela solução de sistemas de equações.

Comparações dos esquemas investigados neste trabalho com esquemas tradicionais de comunicação baseados em seqüências de espalhamento, como é o caso do acesso múltiplo por divisão de códigos (CDMA, do inglês *code division multiple access*), estão sob investigação. Tal análise não é tão direta, visto que os esquemas apresentados são multinível e implementados sobre números reais, ao passo que o CDMA é

binário. Além disso, aspectos como a falta de sincronismo e ruídos com naturezas diferentes da que se considerou nas simulações realizadas devem ser levados em conta em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Bultheel e H. Martínez, "A shattered survey of the fractional Fourier transform," (Preprint available under <http://www.cs.kuleuven.ac.be/publicaties/rapporten/tw/TW337.pdf>), April 2002.
- [2] Z. Liu, J. Dai, X. Sun, e S. Liu, "Triple image encryption scheme in fractional Fourier transform domains," *Optics Communications*, vol. 282, p. 518–522, February 2009.
- [3] A. Bhandari e P. Marziliano, "Sampling and reconstruction of sparse signals in fractional Fourier domain," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 17, p. 221–224, March 2010.
- [4] R. Tao, X.-Y. Meng, e Y. Wang, "Transform order division multiplexing," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, p. 598–609, February 2011.
- [5] L. B. Almeida, "The fractional Fourier transform and time-frequency representations," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, p. 3084–3091, November 1994.
- [6] C. Candan, M. Alper Kutay, e H. M. Ozaktas, "The discrete fractional Fourier transform," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48, p. 1329–1337, May 2000.
- [7] J. B. Lima, R. M. Campello de Souza, e D. C. Cunha, "Multiuser communication based on the discrete fractional Fourier transform," in *Proc. International Conference on Communications*, (Ottawa, Canada), p. 3569–3573, June 2012.
- [8] R. M. Campello de Souza e H. M. de Oliveira, "Eigensequences for multiuser communication over the real adder channel," in *Proc. International Telecommunications Symposium*, (Fortaleza, Brasil), p. 711–716, 2006.
- [9] S. C. Pei e M. H. Yeh, "Improved discrete fractional Fourier-transform," *Opt. Letters*, vol. 22, p. 1047–1049, 1997.
- [10] S.-C. Pei, C.-C. Wen, e J. J. Ding, "Closed-form orthogonal eigenvectors generated by complete generalized Legendre sequences," *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 55, p. 3469–3479, December 2008.
- [11] J. H. McClellan e T. W. Parks, "Eigenvalue and eigenvector decomposition of the discrete Fourier transform," *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. AU-20, p. 66–74, January 1972.
- [12] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford University Press, 1st ed., 1988.