

# Interpolação cúbica: uma análise que considera informações do processo de aquisição da sequência a ser interpolada.

Eric Magalhães Delgado e Max H. M. Costa

**Resumo**— Neste artigo, analisa-se o processo de interpolação cúbica, utilizando informação do processo de aquisição da sequência a ser interpolada como uma forma para definir o filtro cúbico. Tal análise permite a obtenção de relações entre o parâmetro  $a$  do filtro e a função de autocorrelação da sequência a ser interpolada que minimizam o erro médio quadrático (MSE) para diversos fatores de interpolação e modelos de degradação do processo de aquisição da sequência a ser interpolada. Verifica-se que, assintoticamente,  $a$  tende para  $-2/3$  ou  $-1, 2$ , dependendo do modelo de degradação adotado.

**Palavras-Chave**— Reconstrução, Intepolação, Convolução Cúbica.

**Abstract**— In this paper, the cubic interpolation process is analyzed. We use information about the acquisition process of the sequence to be interpolated to set the cubic interpolation filter. This analysis provides relationships between the filter parameter  $a$  and the autocorrelation function of the sequence to be interpolated which minimize the MSE for many interpolation factors and degradation models of the acquisition process of the sequence to be interpolated. We note that in the limit, the parameter  $a$  tends to  $-2/3$  or  $-1, 2$ , depending on the degradation model.

**Keywords**— Reconstruction, Interpolation, Cubic Convolution.

## I. INTRODUÇÃO

Keys propôs em 1981 uma família de filtros cúbicos de interpolação. A sua justificativa era que se tratava de uma solução para o problema computacional decorrente do excesso de dados vinculados às imagens digitais, quando eram implementadas operações de mudança de resolução ou de correções de distorções espaciais [1].

Tal problema, aparentemente, foi resolvido. Novos processadores conseguem, por exemplo, interpolar 60 quadros por segundo de uma imagem televisiva de baixa definição com  $640 \times 480$  pixels, transformando-a numa imagem de alta definição. São operações que envolvem acessos à memória e operações de soma e produto de mais de 18 milhões de pixels por segundo. No caso da interpolação cúbica, cada amostra interpolada é obtida por meio de três somas, quatro produtos e oito acessos à memória.

Isso, contudo, não tornou a sua família de filtros cúbicos de interpolação obsoleta. Muito pelo contrário, além de se tornar um padrão no campo de interpolação de imagem [2],

Eric Magalhães Delgado trabalha na Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel); Max H. M. Costa é professor associado da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). E-mails: eric.mdelgado@gmail.com, max@fee.unicamp.br.

continua sendo objeto de diversos estudos acadêmicos, tendo implementações em operações de rotação e translação de imagens, de reconhecimento de identificação de respostas impulsivas de canais [3], entre outras áreas.

Neste artigo, analisa-se o processo de interpolação cúbica, utilizando informação do processo de aquisição da sequência a ser interpolada como uma forma para definir o filtro cúbico. Tal análise permite a obtenção de relações entre o parâmetro  $a$  do filtro e a função de autocorrelação da sequência a ser interpolada que minimizam o MSE para diversos fatores de interpolação e modelos de degradação do processo de aquisição da sequência a ser interpolada. Assintoticamente,  $a$  tende para  $-2/3$  ou  $-1, 2$ , dependendo do modelo de degradação adotado.

Filtros com tais parâmetros  $a$  são aplicados a imagens típicas, fornecendo bons resultados quantitativos.

## II. RECONSTRUÇÃO

### A. Descrição

A reconstrução de um sinal contínuo é o processo inverso ao processo de amostragem, ou seja, é o processo de obtenção de uma função contínua  $x(s)$  a partir de suas amostras  $x_k$ .

A reconstrução perfeita de um sinal  $x(s)$  só é possível quando este é limitado em faixa, ou seja,  $X(j\Omega) = 0$  para  $|\Omega| > \Omega_M$ , e o período de amostragem obedece à inequação  $T_0 \leq \pi/\Omega_M$ .

Neste trabalho, adotam-se as seguintes suposições: a frequência máxima de  $x(s)$  é  $\Omega_M = \pi$  rad/s e o período de amostragem é  $T_0 = 1$ s.

A relação entre a função contínua  $x(s)$  e suas amostras  $x_k$  é dada por

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_r(s-k), \quad (1)$$

sendo  $h_r(s)$  o filtro de reconstrução.

Como característica desejada do processo de reconstrução, os valores do sinal  $x(s)$  nas posições inteiras devem coincidir com os valores das amostras da sequência  $x_k$ , isto é,  $x(s=k) = x[k]$ . Em consequência, o filtro de reconstrução deve possuir  $h_r(0) = 1$  e  $h_r(\ell) = 0 \forall \ell \in \mathbb{Z}^*$ .

O processo de reconstrução está vinculado a uma resolução infinita, uma vez que é obtido um sinal contínuo na saída. No entanto, na maioria das aplicações, o objetivo é aumentar a resolução de uma sequência  $x_k$  por um fator finito e inteiro

$L$ , o que facilita sua implementação. Trata-se de processo conhecido como interpolação e seu diagrama de blocos está representado na Fig. 1. Inicialmente são inseridas  $(L - 1)$  amostras nulas entre cada amostra de  $x_k$ . A sequência resultante  $x_{e,k}$  é, então, filtrada para obtenção de  $u_k$ , sequência com resolução  $L$  vezes superior à resolução de  $x_k$ .

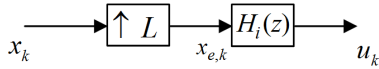


Fig. 1. Interpolação da sequência  $x_k$  por um fator inteiro  $L$ .

Pode-se mostrar que o filtro de interpolação é uma versão discreta do filtro de reconstrução, ou seja,

$$h_i[k] = h_r(s) \Big|_{s=kT} \quad (2)$$

com período de amostragem  $T = (1/L)$ .

### B. Filtro Cúbico de Reconstrução

O filtro de reconstrução ideal é um filtro passa-baixa com ganho DC unitário e frequência de corte  $\Omega_C = \pi$  rad/s. A resposta espacial do filtro de reconstrução ideal é dada em (3).

$$h_B(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}, \quad s \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Tal filtro possui resposta com região de suporte infinita, não sendo, portanto, realizável. Aproximações polinomiais são utilizadas para viabilizar sua implementação prática, sendo as mais comuns a de ordem 0, a linear e a cúbica.

A aproximação polinomial de ordem 0 é dada por (4), sendo conhecida usualmente como *método do vizinho mais próximo*.

$$h_N(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq s < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

A aproximação polinomial linear é definida no intervalo  $|s| < 1$ , sendo dada por (5).

$$h_L(s) = \begin{cases} 1-|s| & \text{se } |s| < 1 \\ 0 & \text{se } |s| \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

A aproximação polinomial cúbica é definida no domínio  $|s| < 2$ , sendo dada por (6).

$$h_C(s) = \begin{cases} 1-(a+3)|s|^2+(a+2)|s|^3 & \text{se } |s| < 1 \\ -4a+8a|s|-5a|s|^2+a|s|^3 & \text{se } 1 \leq |s| < 2 \\ 0 & \text{se } |s| \geq 2 \end{cases} \quad (6)$$

Trata-se de uma função interpoladora, contínua, com 1ª derivada contínua e ganho DC unitário. O grau de liberdade é representado pelo parâmetro  $a$  e vários são os conceitos utilizados para determinar o seu valor.

- Quando  $-3 < a < 0$ , as concavidades de  $h_C$  em  $s = 0$  e  $s = 1$  são iguais às do filtro de reconstrução ideal  $h_B$  [4].
- Quando  $a = -1/2$ ,  $h_C$  reconstrói os três primeiros termos da expansão em série de Taylor do sinal  $x(s)$

[1], podendo, portanto, reconstruir qualquer polinômio de segundo grau.

- Quando  $a = -2/3$ ,  $h_C$  minimiza os erros dos processos de discretização e reconstrução para imagens dominadas por bordas [5].
- Quando  $a = -3/4$ ,  $h_C$  possui 2ª derivada contínua.
- Quando  $a = -1$ , todos os coeficientes de  $h_C$  são números inteiros. Além disso,  $h_C$  possui taxa de decaimento em  $s = 1$  igual à do filtro de reconstrução ideal  $h_B$ .
- Quando  $a = -4/3$ , a transformada de Fourier de  $h_C$  se desvia minimamente da transformada de Fourier de  $h_B$  [6].

Para uma análise de filtros de reconstrução, inclusive outros algoritmos derivados de  $h_C$ , vide [7-13].

### III. O MODELO DE DEGRADAÇÃO DO PROCESSO DE AQUISIÇÃO DA SEQUÊNCIA A SER INTERPOLADA

Na Fig. 1 é apresentado o diagrama de blocos do processo de interpolação por um fator  $L$ . Nela não é explicitada, contudo, como se dá o processo de aquisição da sequência a ser interpolada  $x_k$ . Vide a Fig. 2.

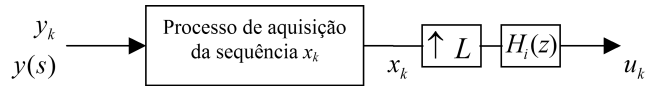


Fig. 2. Interpolação da sequência  $x_k$  por um fator  $L$ , considerando o seu processo de aquisição.

De forma geral, a sequência  $x_k$  é resultado de transformações a que um sinal contínuo  $y(s)$ , ou uma sequência  $y_k$ , são submetidas. Transformações essas que, geralmente, podem ser modeladas matematicamente.

As perdas que poderão ocorrer, decorrentes desse processo, dependem não só das características do sinal  $y(s)$ , ou da sequência  $y_k$ , mas da natureza das transformações.

Por essa razão, a informação do processo de aquisição da sequência  $x_k$ , obtida por meio de algum modelo de degradação, pode ser útil para a operação de interpolação, já que, assim, a escolha do filtro pode ser feita com objetivo de minimizar alguma medida de distorção, como o MSE.

Por simplicidade, considera-se que a natureza do sinal é discreta e que o modelo de degradação do processo de aquisição é um filtro  $H_0(z)$  em cascata com o operador *DownSampling*.

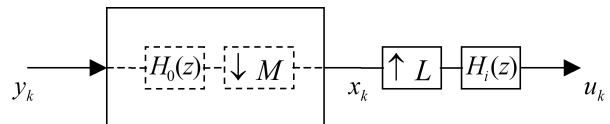


Fig. 3. Modelo de degradação do processo de aquisição da sequência  $x_k$ .

Os casos mais comuns são:

- Quando  $M = 1$ , as sequências  $y_k$  e  $x_k$  possuem a mesma resolução, não sendo, portanto, possível avaliar quantitativamente o desempenho do filtro de interpolação

já que a sequência de saída do processo  $u_k$  possui resolução superior à sequência  $y_k$ .

- Quando  $M > 1$ , as sequências  $y_k$  e  $x_k$  não possuem a mesma resolução. Só é possível avaliar quantitativamente o desempenho do filtro de interpolação se os fatores de interpolação e dizimação forem iguais, ou seja,  $L = M$ .
- Quando  $M = L$  e  $M \neq 1$ , as sequências  $y_k$  e  $u_k$  possuem a mesma resolução. A sequência  $u_k$  é, na verdade, uma estimativa da sequência  $y_k$ , podendo ser representada como  $\hat{y}_k$ .

Ressalta-se que quando  $M > 1$ ,  $H_0(z)$  deve ser um filtro passa-baixa com frequência de corte mínima igual a  $w_c = (\pi/M)$ rad. Caso contrário, haverá sobreposição espectral no processo de aquisição da sequência  $x_k$ .

Com objetivo de minimizar uma medida de distorção entre as sequências  $u_k$  e  $y_k$ , analisou-se apenas os casos em que  $M = L$  e  $M \neq 1$ .

#### A. $H_0(z) = 1$ e $M = L$

Quando  $H_0(z) = 1$  e  $M = L$ , o diagrama de blocos ilustrado na Fig. 3 assume a forma ilustrada na Fig. 4.

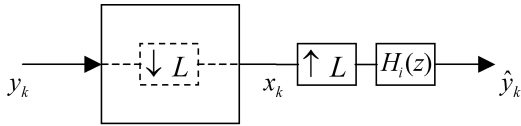


Fig. 4. Caso em que  $H_0(z) = 1$  e  $M = L$ .

Para  $L = 2$  o filtro de interpolação possui 7 coeficientes, uma vez que esse filtro é uma versão discreta do filtro de reconstrução com período de amostragem  $(1/L)$ . São eles:  $h_0 = 1$ ,  $h_{-1} = h_1 = (4 - a)/8$ ,  $h_{-2} = h_2 = 0$  e  $h_{-3} = h_3 = a/8$ .

Após a convolução desse filtro com a sequência resultante dos operadores *DownSampling* e *UpSampling*, encontra-se

$$\hat{y}_k = \begin{cases} y_k & , \text{ se } k \oplus 2 = 0 \\ \alpha_1(y_{k-1} + y_{k+1}) + \alpha_2(y_{k-3} + y_{k+3}) & , \text{ se } k \oplus 2 = 1 \end{cases}$$

com  $\alpha_1 = (4 - a)/8$  e  $\alpha_2 = a/8$ .

A sequência erro  $e_k$ , definida como a diferença  $y_k - \hat{y}_k$ , é dada por

$$e_k = \begin{cases} 0 & , \text{ se } k \oplus 2 = 0 \\ y_k - \left[ \alpha_1(y_{k-1} + y_{k+1}) + \alpha_2(y_{k-3} + y_{k+3}) \right] & , \text{ se } k \oplus 2 = 1 \end{cases} .$$

Quando  $k \oplus 2 = 0$ , o MSE = 0.

Quando  $k \oplus 2 = 1$ , por outro lado, supondo que a sequência  $y_k$  é um processo estacionário no sentido amplo,

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= R_{yy}[0](1 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2) + R_{yy}[1](-4\alpha_1) + \\ &R_{yy}[2](2\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2) + R_{yy}[3](-4\alpha_2) + \\ &R_{yy}[4](4\alpha_1\alpha_2) + R_{yy}[6](2\alpha_2^2) . \end{aligned}$$

Para  $L = 3$ , realizando as mesmas operações matemáticas descritas no caso em que  $L = 2$ , acha-se

$$\hat{y}_k = \begin{cases} y_k & , \text{ se } k \oplus 3 = 0 \\ \alpha_1 y_{k-1} + \alpha_4 y_{k-4} + \alpha_{-2} y_{k+2} + \alpha_{-5} y_{k+5} & , \text{ se } k \oplus 3 = 1 \\ \alpha_5 y_{k-5} + \alpha_2 y_{k-2} + \alpha_{-1} y_{k+1} + \alpha_{-4} y_{k+4} & , \text{ se } k \oplus 3 = 2 \end{cases} ,$$

com  $\alpha_1 = \alpha_{-1} = (20 - 2a)/27$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{-2} = (7 - 4a)/27$ ,  $\alpha_4 = \alpha_{-4} = 4a/27$  e  $\alpha_5 = \alpha_{-5} = 2a/27$ .

Quando  $k \oplus 3 = 0$ , o MSE = 0.

É possível mostrar que quando  $k \oplus 3 = 1$  ou  $k \oplus 3 = 2$ ,

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= R_{yy}[0](1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2) + R_{yy}[1](-2\alpha_1) + \\ &R_{yy}[2](-2\alpha_2) + R_{yy}[3](2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_5) + \\ &R_{yy}[4](-2\alpha_4) + R_{yy}[5](-2\alpha_5) + \\ &R_{yy}[6](2\alpha_1\alpha_5 + 2\alpha_2\alpha_4) + R_{yy}[9](2\alpha_4\alpha_5) . \end{aligned}$$

Para  $L \geq 4$  a obtenção da expressão algébrica que relaciona o MSE e o parâmetro  $a$  é muito complexa.

#### B. A versão contínua de $H_0(z)$ é a aproximação polinomial de ordem 0 do filtro passa-baixa ideal e $M = L$

Diferente do apresentado na Seç. III-A, este modelo de degradação contempla um filtro passa-baixa, o que, a depender das características espectrais da sequência  $y_k$ , possibilitará diminuir a energia vinculada à sobreposição espectral resultante da aplicação do operador *DownSampling*.

Ressalta-se que este filtro passa-baixa, contudo, na maioria das aplicações não possui um bom desempenho. Consequência de ser derivado da aproximação polinomial de ordem 0 do filtro ideal.

Para  $L = 2$ ,

$$2\hat{y}_k = \begin{cases} y_k + y_{k+1} & , \text{ se } k \oplus 2 = 0 \\ \alpha_1(y_{k-1} + 2y_k + y_{k+1}) + \\ \alpha_2(y_{k-3} + y_{k-2} + y_{k+3} + y_{k+4}) & , \text{ se } k \oplus 2 = 1 \end{cases}$$

com  $\alpha_1 = (4 - a)/8$  e  $\alpha_2 = a/8$ .

É possível mostrar que quando  $k \oplus 2 = 0$ ,

$$\text{MSE} = (R_{yy}[0] - R_{yy}[1]) / 2 .$$

Quando  $k \oplus 2 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= R_{yy}[0](1 - \alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \\ &R_{yy}[1](-2\alpha_1 + 3\alpha_1^2/2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + \\ &R_{yy}[2](-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2) + \\ &R_{yy}[3](-2\alpha_2 + \alpha_1^2/2 + 2\alpha_1\alpha_2) + \\ &R_{yy}[4](\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2) + R_{yy}[5](\alpha_2^2/2 + \alpha_1\alpha_2) + \\ &R_{yy}[6](\alpha_2^2) + R_{yy}[7](\alpha_2^2/2) . \end{aligned}$$

Para  $L \geq 3$  a obtenção da expressão algébrica que relaciona o MSE e o parâmetro  $a$  é muito complexa.

#### C. A versão contínua de $H_0(z)$ é a aproximação polinomial linear do filtro passa-baixa ideal e $M = L$

O filtro passa-baixa deste modelo de degradação possui, comumente, um desempenho melhor do que o filtro objeto do modelo de degradação apresentado na Seç. III-B. Isto porque é derivado da aproximação polinomial linear do filtro ideal.

Para  $L = 2$ ,

$$\hat{y}_k = \begin{cases} (y_{k-1} + 2y_k + y_{k+1})/4 & , \text{ se } k \oplus 2 = 0 \\ \alpha_1(y_{k-2} + 2y_{k-1} + 2y_k + 2y_{k+1} + y_{k+2}) + \\ \alpha_2(y_{k-4} + 2y_{k-3} + y_{k-2} + y_{k+2} + 2y_{k+3} + y_{k+4}) & , \text{ se } k \oplus 2 = 1 \end{cases}$$

com  $\alpha_1 = (4 - a)/32$  e  $\alpha_2 = a/32$ .

É possível mostrar que quando  $k \oplus 2 = 0$ ,

$$\text{MSE} = (6R_{yy}[0] - 8R_{yy}[1] + 2R_{yy}[2])/16.$$

Quando  $k \oplus 2 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{MSE} = & R_{yy}[0](1 - 4\alpha_1 + 14\alpha_1^2 + 12\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2) + \\ & R_{yy}[1](-8\alpha_1 + 24\alpha_1^2 + 16\alpha_2^2 + 16\alpha_1\alpha_2) + \\ & R_{yy}[2](-4\alpha_1 - 4\alpha_2 + 16\alpha_1^2 + 4\alpha_2^2 + 28\alpha_1\alpha_2) + \\ & R_{yy}[3](-8\alpha_2 + 8\alpha_1^2 + 32\alpha_1\alpha_2) + \\ & R_{yy}[4](-4\alpha_2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 28\alpha_1\alpha_2) + \\ & R_{yy}[5](8\alpha_2^2 + 16\alpha_1\alpha_2) + R_{yy}[6](12\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2) + \\ & R_{yy}[7](8\alpha_2^2) + R_{yy}[8](2\alpha_2^2). \end{aligned}$$

Para  $L \geq 3$  a obtenção da expressão algébrica que relaciona o MSE e o parâmetro  $a$  é muito complexa.

#### D. O filtro cúbico de interpolação ótimo para cada modelo de degradação

Foram apresentadas as relações entre o MSE e o parâmetro  $a$  para diversos modelos de degradação, com diferentes filtros passa-baixa e fatores de interpolação.

Ao minimizar o MSE em relação ao parâmetro  $a$  do filtro de interpolação cúbico, ou seja, forçar a condição

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial a} = 0$$

e confirmar que sua segunda derivada é positiva, acha-se o valor do parâmetro  $a$  do filtro cúbico ótimo.

Na Tab. I estão as equações que relacionam o parâmetro  $a$  do filtro de interpolação cúbico e a função de autocorrelação da sequência  $y_k$ .

## IV. RESULTADOS

### A. Análise das características $a^* \times \rho$

Caso a sequência  $y_k$  possa ser modelada como resultado de um sistema AR de 1ª ordem,  $R_{yy}[k] = \rho^{|k|} \sigma_y^2$ . Tal modelo se aplica a imagens com poucas regiões de transições, com a ressalva de que o coeficiente de correlação seja próximo a unidade [14].

Dessa forma, é possível traçar as características  $a^* \times \rho$ , as quais podem ser vistas na Fig. 5.

Dessas curvas são extraídas informações relevantes.

- Os parâmetros  $a_1^*$  e  $a_2^*$  pertencem ao intervalo  $[-3; 0]$  quando  $\rho > 0,66$  e no limite, quando  $\rho \rightarrow 1$ , tendem a 0 e a  $-0,16$ , respectivamente.
- O parâmetro  $a_3^*$  pertence ao intervalo  $[-3; 0]$  quando  $\rho > 0$  e no limite tende a  $-2/3$ .
- O parâmetro  $a_4^*$  pertence ao intervalo  $[-3; 0]$  quando  $\rho > -0,33$  e no limite tende a  $-1,2$ .

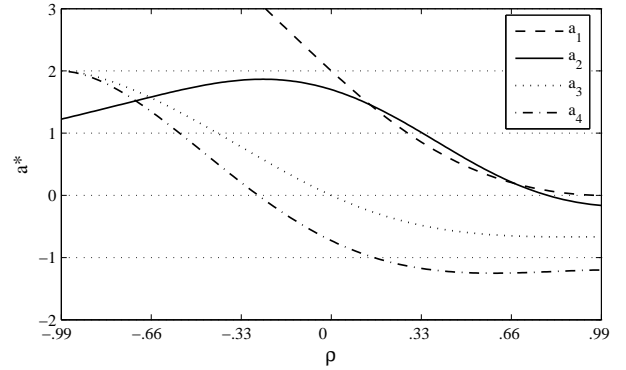


Fig. 5. Características  $a^* \times \rho$  para os diversos modelos do processo de aquisição da sequência a ser interpolada.

Deve-se observar que os parâmetros  $a_1^*$  e  $a_2^*$  são obtidos quando o modelo de degradação é formado apenas pelo operador *DownSampling*, não possuindo um filtro passa-baixa. As convergências dessas curvas não proporcionam valores que se aproximam dos comumente utilizados, os quais foram explicitados na Seç.III-B.

Já os parâmetros  $a_3^*$  e  $a_4^*$  são obtidos quando o modelo de degradação é formado pelo filtro passa-baixa em cascata com o operador *DownSampling*. Isso diminui a energia vinculada à sobreposição espectral, fornecendo, assintoticamente, os valores  $-2/3$  e  $-1,2$ .

### B. Operação de aumento da taxa de amostragem de uma imagem considerando informação do processo de aquisição da imagem a ser interpolada

Implementou-se o diagrama de blocos ilustrado na Fig. 3, objetivando validar a convergência das equações descritas na Tab. I, especialmente no caso em que o parâmetro  $a$  tende para  $-1,2$ .

Foram utilizadas dez imagens com diferentes características espaciais, entre elas as clássicas *Baboon*, *Lena* e *Peppers*.

Na Tab. II estão os resultados de diversos algoritmos de interpolação quando o filtro passa-baixa do modelo de degradação da sequência a ser interpolada é derivado da aproximação linear. Para todas as dez imagens, o MSE é mínimo quando  $a = -1,2$ .

Tais resultados validam a possibilidade de se modelar imagens com poucas regiões de transições como resultados de um sistema AR de 1ª ordem com o coeficiente de correlação próximo a unidade, além de confirmar a convergência da curva  $a_4^* \times \rho$ .

## V. CONCLUSÃO

Neste artigo, investiga-se o processo de interpolação cúbica, utilizando-se informação de modelo estimado para as transformações matemáticas que produzem a sequência a ser interpolada. Isto possibilita a escolha do filtro cúbico que minimiza o MSE.

Modela-se o processo de aquisição da sequência a ser interpolada como um filtro passa-baixa em cascata com o

TABELA I

EQUAÇÕES QUE RELACIONAM O PARÂMETRO  $a$  DO FILTRO DE INTERPOLAÇÃO CÚBICO E A FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO DA SEQUÊNCIA  $y_k$ .

Modelo de aquisição da sequência $x_k$	$a^* = f(\mathbf{R}_{yy})$
$H_0(z)=1, M=L=2$	$a_1^* = \frac{4(\mathbf{R}_{yy}[0]-\mathbf{R}_{yy}[4])+8(\mathbf{R}_{yy}[3]-\mathbf{R}_{yy}[1])}{2(\mathbf{R}_{yy}[0]-\mathbf{R}_{yy}[4])-\mathbf{R}_{yy}[2]+\mathbf{R}_{yy}[6]}$
$H_0(z)=1, M=L=3$	$a_2^* = \frac{34(\mathbf{R}_{yy}[0]-\mathbf{R}_{yy}[6])+27[\mathbf{R}_{yy}[5]-\mathbf{R}_{yy}[1]+2(\mathbf{R}_{yy}[4]-\mathbf{R}_{yy}[2])]}{20(\mathbf{R}_{yy}[0]-\mathbf{R}_{yy}[6])+8(\mathbf{R}_{yy}[9]-\mathbf{R}_{yy}[3])}$
$H_d(z)=H_N(z), M=L=2$	$a_3^* = \frac{-8\mathbf{R}_{yy}[1]+12\mathbf{R}_{yy}[3]-4\mathbf{R}_{yy}[5]}{4\mathbf{R}_{yy}[0]+3\mathbf{R}_{yy}[1]-2\mathbf{R}_{yy}[2]-3\mathbf{R}_{yy}[3]-4\mathbf{R}_{yy}[4]-\mathbf{R}_{yy}[5]+2\mathbf{R}_{yy}[6]+\mathbf{R}_{yy}[7]}$
$H_d(z)=H_L(z), M=L=2$	$a_4^* = \frac{-8(\mathbf{R}_{yy}[0]-\mathbf{R}_{yy}[4])-32\mathbf{R}_{yy}[1]+4(\mathbf{R}_{yy}[2]-\mathbf{R}_{yy}[6])+48\mathbf{R}_{yy}[3]-16\mathbf{R}_{yy}[5]}{11\mathbf{R}_{yy}[0]+12(\mathbf{R}_{yy}[1]-\mathbf{R}_{yy}[3]-\mathbf{R}_{yy}[4])-4(\mathbf{R}_{yy}[2]+\mathbf{R}_{yy}[5]-\mathbf{R}_{yy}[6]-\mathbf{R}_{yy}[7])+\mathbf{R}_{yy}[8]}$

TABELA II

MSE DOS ALGORITMOS DA FAMÍLIA CÚBICA ASSOCIADOS À OPERAÇÃO DE INTERPOLAÇÃO POR UM FATOR  $L = 2$  QUANDO O FILTRO DO MODELO DE DEGRADAÇÃO DA SEQUÊNCIA A SER INTERPOLADA É DERIVADO DO ALGORITMO  $h_L$ .

Algoritmo	Imagem									
	Airplane	Baboon	Barbara	Boat	Bridge	Couple	Goldhill	Lena	Peppers	Watch
$h_N$	91,78	545,58	80,86	55,28	270,54	120,65	77,16	72,14	83,02	467,86
$h_L$	44,74	443,71	29,21	36,81	174,23	72,61	48,93	41,76	34,42	252,38
$(a=-1/2)h_C$	34,97	420,44	23,37	33,01	156,74	64,50	43,68	36,56	28,88	223,52
$(a=-2/3)h_C$	32,63	414,79	22,10	32,14	152,50	62,63	42,42	35,30	27,60	216,76
$(a=-3/4)h_C$	31,65	412,19	21,58	31,77	150,68	61,79	41,89	34,72	27,04	213,85
$(a=-1)h_C$	29,39	406,11	20,55	31,02	146,49	59,86	40,75	33,42	25,93	207,24
$(a=-1,2)h_C$	<b>28,36</b>	<b>403,13</b>	<b>20,30</b>	<b>30,73</b>	<b>144,64</b>	<b>59,00</b>	<b>40,30</b>	<b>32,77</b>	<b>25,54</b>	<b>203,91</b>

operador *DownSampling*. Foram considerados os casos em que tal filtro passa-baixo é derivado das aproximações polinomiais de ordem 0 e linear do filtro ideal. Para esses casos, o valor ótimo do parâmetro  $a$  tendeu para  $-2/3$  ou  $-1,2$ .

Implementa-se o algoritmo de interpolação para aumentar a resolução de dez imagens, para o caso que o filtro passa-baixa do modelo de degradação é derivado da aproximação polinomial linear do filtro ideal. O filtro que apresentou o melhor resultado, fornecendo o mínimo MSE, foi o obtido quando o parâmetro  $a$  foi igual a  $-1,2$ .

REFERÊNCIAS

[1] R. G. Keys, "Cubic Convolution Interpolation for Digital Image Processing", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP, pp. 1153-1160, 1981.

[2] D. Zhou, X. Shen e W. Dong, "Image zooming using directional cubic convolution interpolation", *IET Image Processing*, Vol. 6, pp. 627-634, 2012.

[3] S. D. You, K. Chen e Y. Liu, "Cubic convolution interpolation function with variable coefficients and its application to channel estimation for IEEE 802.16 initial downlink", *IET Communications*, Vol. 6, 2012.

[4] R. Bernstein, "Digital Image Processing of Earth Observation Sensor Data". *IBM Journal of Research Development*, pp. 40-57. January, 1976.

[5] S. K. Park e R. A. Schiwengerdt, "Image Reconstruction by Parametric Cubic Convolution", *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, Vol. 23, No. 3, pp. 258-272, 1983.

[6] P. E. Danielsson e M. Hamnerin, "Note: High Accuracy Rotation of Images". *CVGIP: Graph, Models Image Processing*, Vol. 54, No. 4, 1992.

[7] J. A. Parker, R. V. Kenyon e D. E. Troxel, "Comparison of interpolation methods for image resampling", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. MI-2, No. 1, pp. 31-39, 1983.

[8] E. Maeland, "On The Comparison Of Interpolation Methods", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 7, No. 3, September 1988.

[9] T. Lehmann, C. Gönner e K. Spitzer, "Survey: Interpolation Methods in Medical Image Processing", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 18, November 1999.

[10] P. Thévenaz, T. Blu e M. Unser, "Interpolation Revisited", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2000.

[11] Sang-Min Kwak, Jong-Ki Han e Byung Choe Song, "Modified cubic convolution scaler for enhancement of edge information", *International Conference on Consumer Electronics*, pp. 465-466, 2005.

[12] E. M. Delgado, "Um Estudo sobre Algoritmos de Interpolação de Sequências Numéricas", *Dissertação*, Universidade Estadual de Campinas, 2009.

[13] Jin-tai Shangguan, Yan-ling Li, Yong-gang Wang e Hui-ling Li, "Fast algorithm of modified cubic convolution interpolation", *International Congress on Image and Signal Processing*, Vol. 2, pp. 1072-1075, 2011.

[14] N. S. Jayant e P. Noll, "Digital Coding of Waveforms", *Prentice-Hall Signal Processing Series*, First Edition, 1984.