

Estratégias de encurtamento em códigos LDPC

Filipe Andrade La-Gatta, Weiler Alves Finamore e Moisés Vidal Ribeiro.

Resumo—Quatro estratégias de encurtamento de códigos LDPC foram investigadas neste trabalho. Uma estratégia é caracterizada basicamente pela seleção das posições, na palavra-de-informação, em que os bits conhecidos serão inseridos. Resultados de simulações mostram que além de se optar por fazer o encurtamento de um código, a estratégia a ser utilizada, é importante. Das estratégias estudadas, chegou-se à conclusão de que aquela que realiza o encurtamento nos inserido bits conhecidos nas posições iniciais da palavra-de-informação conduz a um código encurtado com melhor desempenho (quando comparada com as demais). É intuitivo que a inserção de bits conhecidos em posições da palavra-de-informação que pertençam aos ciclos de menor comprimento resulte em uma estratégia que conduza a códigos de melhor desempenho — ainda que razoável, os resultados obtidos com uma estratégia de encurtamento dependente de ciclos, investigada neste trabalho, não corroboraram tal conjectura intuitiva.

Palavras-Chave—Codificação de canal, Encurtamento de Código, LDPC.

Abstract—Four strategies for LDPC code shortening has been investigated in this work. A shortening strategy is characterized basically by the choice of positions in the information-word to place the known shortening bits. Our simulation results have shown that the right choice of the shortening strategy is an important issue. Of the examined strategies the one which place the known information bits in the beginning of the information-word yields the best performance. It is intuitive that placing the known information bits on those positions belonging to a short cycle yields a code with better performance — yet logical, the results obtained have not corroborated the intuitive conjecture.

Keywords—Channel coding, Code shortening, LDPC.

I. INTRODUÇÃO

A demanda crescente por aplicações de telecomunicações com taxas e confiabilidade cada vez mais elevadas, tem levado a grande desenvolvimento e pesquisa na área de códigos corretores de erros. Destes, podemos citar alguns principais, de largo uso, como Códigos Turbo [1], Códigos Fontanais [2], Códigos Raptor [3], e Códigos LDPC (*Low Density Parity Check*) [4], [5], [6], [7], objeto deste trabalho.

Códigos LDPC foram descobertos por Gallager [7], e foram recentemente redescobertos e generalizados. Muitos trabalhos têm mostrado que com um decodificador iterativo que utiliza o algoritmo SPA, conhecido na literatura inglesa por *sum-product algorithm*, pode-se chegar muito próximo ao limite de Shannon para códigos para canal. Consequentemente, estes códigos têm sido vistos e usados de forma muito competitiva com outros códigos modernos, como códigos Turbo, ou os outros mencionados anteriormente, principalmente em

Filipe Andrade La-Gatta, Departamento de Educação e Tecnologia, IF Sudeste MG - Campus Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, Brasil. Weiler Alves Finamore e Moisés Vidal Ribeiro. Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, Brasil, E-mails: filipe.lagatta@ifesudestemg.edu.br,weiler@ieee.org, moises.ribeiro@ieee.org.

aplicações de comunicação e armazenamento digital nos quais alta confiabilidade é necessária.

É fato conhecido que além das técnicas convencionais para projeto de códigos, também é possível obter códigos a partir da modificação de códigos já construídos. Estas modificações são conhecidas por punçãoamento, alongamento, etc. Neste trabalho será investigada a técnica de encurtamento de códigos. Esta técnica consiste-se em reduzir o número de bits a serem transmitidos, da palavra-de-informação, provenientes da fonte, e introduzir bits de confiabilidade infinita no codificador, os quais também serão reinseridos na recepção, pelo decodificador (já que são conhecidos por este com a mesma confiabilidade infinita).

Esta técnica permite que sejam obtidos códigos LDPC com taxas intermediárias e ainda comprimentos variáveis [9]. Estes códigos podem ter grande uso, principalmente em sistemas de comunicação digital que se utilizem de estratégias de alocação de potência, ou *waterfilling*, para suas transmissões. Este uso se deve a, nesta classe de sistemas, ser comum o envio de dados em modulações variáveis por portadora, levando a vetores de informação com comprimentos também variáveis [10], [11].

Dessa forma, o foco principal deste trabalho é identificar possíveis estratégias para alocação dos bits com confiabilidade infinita, e em quais posições da mensagem esta inserção de informação conhecida é capaz de promover melhor desempenho, mantendo-se a complexidade e número de bits a encurtar.

II. DESCRIÇÃO DO SISTEMA

O modelo matemático do sistema de comunicações a ser simulado é mostrado na Figura 1. Uma mensagem proveniente

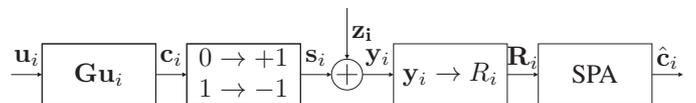


Fig. 1. Sistema base.

de um fonte digital é formada por um vetor de bits de informação, \mathbf{u}_i de dimensão $K \times 1$, o qual é codificado usando a matriz geradora do código \mathbf{G} , de dimensão $N \times K$. Tem-se então, para a palavra código resultante, de dimensão $N \times 1$,

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{G}\mathbf{u}_i. \quad (1)$$

Este vetor é em seguida mapeado, de acordo com

$$s_i = 1 - 2c_i. \quad (2)$$

Por simplicidade, omitiremos o índice i que enumera os vetores transmitidos. Desta forma, \mathbf{s} é o vetor transmitido

através de um canal BI-AWGN (*Binary Input Additive White Gaussian Noise*) de entrada simétrica perturbado por ruído aditivo gaussiano. A saída deste canal, quando o vetor N -dimensional \mathbf{s} corresponde ao i -ésimo símbolo transmitido, é [8]

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{z}, \quad (3)$$

em que \mathbf{z} é o vetor correspondente ao ruído adicionado ao sinal. Considerando-se que o ruído é um vetor aleatório \mathbf{Z} e que suas componentes Z_n são variáveis aleatórias gaussianas, estatisticamente independentes e identicamente distribuídas, com média nula e variância σ^2 , ou seja, têm função de densidade de probabilidade (f.d.p.)

$$p_{Z_n}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-z^2/2\sigma^2}. \quad (4)$$

O sinal enviado $\mathbf{S} = (s_1, \dots, s_N)$, é também um vetor aleatório, e tem-se então que a saída do canal é um vetor aleatório \mathbf{Y} e este canal é, portanto, caracterizado pela f.d.p. condicional

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}) = \prod_{n=1}^N p(y_n | S_n = s_n) \quad (5)$$

em que

$$p(y_n | S_n = s_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y_n - s_n)^2/2\sigma^2}.$$

Esta f.d.p. juntamente com a consideração de equiprobabilidade dos símbolos da fonte, leva à seguinte expressão da LLR (*Log-Likelihood Ratio*) para cada símbolo y_n , de \mathbf{y} à saída do canal,

$$R_n = L(s_n = 1 | y_n) = \log \frac{p(y_n | S_n = +1)}{p(y_n | S_n = -1)}, \quad (6)$$

que resulta em

$$R_n = \frac{2}{\sigma^2} y_n. \quad (7)$$

Considerando-se a razão $\frac{E_s}{N_0} = \frac{1}{2\sigma^2}$ entre a energia por bit transmitido, E_s , e o parâmetro da densidade espectral de potência do ruído, N_0 , e considerando-se ainda que, nas transmissões de palavras-código em canais BI-AWGN, somente a fração, $r = K/N$, de cada bit transmitido corresponde à energia para enviar os bits de informação, tem-se que a razão entre E_b , a energia por bit de informação, e N_0 é

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{r} \frac{E_s}{N_0} = \frac{1}{2r\sigma^2}. \quad (8)$$

O decodificador LDPC corresponde ao conjunto formado pelo processador que calcula o vetor $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)$ com os valores de LLR dos símbolos recebidos, e o processador que executa o algoritmo iterativo SPA, produzindo em sua saída o vetor, $\hat{\mathbf{c}}_{N \times 1}$.

Sendo $\hat{\mathbf{c}}_{N \times 1}$ uma palavra-código, ou seja

$$\mathbf{H}_{M \times N} \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{0}_{K \times 1}, \quad (9)$$

em que $M = N - K$, e $\hat{\mathbf{c}}$ é a provável palavra-código transmitida (palavra-código estimada). Se a condição (9) não é obedecida o destinatário receberá um vetor $\hat{\mathbf{u}} \neq \mathbf{u}$. Se a condição é obedecida mas $\hat{\mathbf{c}}_{N \times 1} \neq \mathbf{c}$ a informação recebida pelo destinatário também conterá erros.

A. Construção das Matrizes Verificação de Paridade e Geradora do Código

A matriz $N \times K$ para o código em estudo, é construída de acordo com o algoritmo proposto em [12]: uma matriz de paridade \mathbf{H}_0 , regular, com peso de coluna w_c .

A partir da matriz \mathbf{H}_0 obtém-se a matriz

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I}_{M \times M} | \mathbf{P}_{M \times K}], \quad (10)$$

sob forma sistemática, em que $\mathbf{P}_{M \times K}$ é a matriz que contém a paridade do código. (Esta transformação é obtida usando-se o método de eliminação de Gauss-Jordan transformando-se \mathbf{H}_0 , inicialmente, em uma matriz triangular superior, seguida de eliminação e escalonamento.)

A partir de \mathbf{H} na forma sistemática constrói-se a matriz, também sistemática,

$$\mathbf{G} = [\mathbf{P}_{M \times K} | \mathbf{I}_{M \times M}]^\dagger. \quad (11)$$

tem-se então, com o símbolo $(\cdot)^\dagger$ indicando o operador transposição, que

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

B. Algoritmo Soma-Produto

A decodificação do código LDPC usado neste trabalho, é realizada usando-se o SPA também conhecido, na literatura inglesa, por *message passage algorithm* ou ainda *belief propagation algorithm*. O algoritmo SP encontra-se vastamente documentado. Maiores detalhes podem ser encontrados por exemplo em [8] e [12].

C. Código LDPC Encurtado

O encurtamento de um código em bloco, sistemático, é obtido pela substituição de uma quantidade ℓ dos K bits de \mathbf{u} , palavra-de-informação, pelo bits de um vetor conhecido \mathbf{u}_0 . O código original (código-mãe) com taxa $r = K/N$, dá origem, portanto, a um código encurtado com taxa $r_\ell = (K - \ell)/(N - \ell)$ tendo em vista que a porção sistemática da palavra-código \mathbf{c} correspondentes ao vetor \mathbf{u}_0 não serão transmitidos [13].

Como posto na Seção I, o objetivo deste trabalho é investigar dentre várias estratégias de encurtamento uma que produza códigos encurtados com melhor desempenho. Basicamente uma estratégia é caracterizada pela escolha das posições dos bits da palavra-de-informação que deverão ser substituídos. Denominaremos a uma seleção de posições por *máscara de encurtamento*. Uma máscara de encurtamento dada por um conjunto $\mathcal{M} = \{m_1, \dots, m_\ell\} \subset \{1, 2, \dots, N\}$ de ℓ posições distintas caracteriza uma estratégia de encurtamento tal que a palavra-de-informação efetivamente transmitida, à entrada do canal, é \mathbf{c}_s correspondente à palavra-código $\mathbf{c} = \mathbf{G}\mathbf{u}_s$ com os bits nas posições $\{m_1, \dots, m_\ell\}$ suprimidos. Iremos representar por $\mathcal{M}(\mathbf{u})$, este processamento (inserção de bits "0" nas posições marcados pela máscara de encurtamento e dos bits em \mathbf{u} nas demais posições). Em seguida, a multiplicação de $\mathcal{M}(\mathbf{u})$ por \mathbf{G} e, subsequente supressão dos bits de $\mathbf{c}_\mathcal{M} = \mathbf{G}\mathcal{M}(\mathbf{u})$, por $\mathcal{S}[\mathbf{c}_\mathcal{M}]$. O sistema com códigos encurtados passa a ser representado conforme indica o diagrama da Fig. 2.

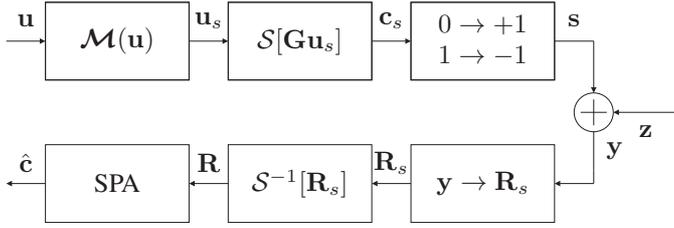


Fig. 2. Diagrama em blocos de um sistema de transmissão de informação codificada usando códigos encurtados.

D. Estratégias de encurtamento

Nesta seção apresenta-se uma descrição das estratégias de criação da máscara de encurtamento adotadas e simuladas. Cabe ressaltar que em função do código a ser modificado ser sistemático, a palavra-código a ser encurtada tem a estrutura

$$\mathbf{c} = [u_1, u_2, \dots, u_K, p_1, p_2, \dots, p_{N-K}], \quad (13)$$

na qual p_1, p_2, \dots, p_{N-K} corresponde aos bits de paridade.

1) *Estratégia I: Bloco no início da mensagem:* Neste caso o encurtamento é realizado inserindo os bits conhecidos nas posições iniciais da palavra-de-informação. Tem-se então que os bits nas primeiras ℓ posições da mensagem serão todos iguais a “0”. O código encurtado nesta situação corresponde a modificar o código-mãe adotando a seguinte máscara-de-encurtamento

$$\mathcal{M}_I = \{1, 2, 3, \dots, \ell\}. \quad (14)$$

2) *Estratégia II: Bloco no fim da mensagem:* Neste caso o encurtamento é realizado inserindo os bits conhecidos (todos iguais a “0”) nas posições finais da palavra-de-informação i.e. aquelas que estarão situadas mais próximas dos bits de paridade da palavra-código. A máscara-de-encurtamento tem, portanto, a forma

$$\mathcal{M}_{II} = \{K - \ell, K - \ell + 1, K - \ell + 2, \dots, K\}. \quad (15)$$

3) *Estratégia III: Seleção aleatória das posições:* Esta estratégia de encurtamento prevê a inserção de bits conhecidos em posições da palavra-de-informação selecionadas aleatoriamente. As posições $\{k_1, k_2, \dots, k_\ell\}$ foram selecionadas, dentre as K possíveis posições, usando um função distribuição gaussiana truncada. Uma vez determinada a máscara,

$$\mathcal{M}_{III} = \{k_1, k_2, \dots, k_\ell\} \quad (16)$$

a mesma é usada para todas as transmissões subsequentes.

4) *Estratégia IV: Seleção orientada por ciclos:* A literatura indica que a geração de matrizes-de-paridade para códigos LDPC está sujeita à presença de ciclos no grafo do código. Ciclos de tamanho quatro e seis provocam a redução do desempenho do código [8] (quando comparado com o desempenho de códigos onde ciclos de tamanho quatro e seis não estão presentes no grafo do código). Neste trabalho, em favor de simplicidade, foram tratados somente os ciclos de tamanho quatro. A motivação para a escolha desta estratégia se prende ao fato de que ciclos curtos são também aqueles que mais impactam, negativamente, o desempenho do código — conjecturamos que o posicionamento dos bits conhecidos nestas

posições “abrem” os ciclos e aumentem a robustez do código. Uma contribuição relevante da presente investigação é verificar a validade desta conjectura (confirmada apenas parcialmente).

A implementação desta estratégia exige que, primeiramente, sejam identificados os ciclos de tamanho quatro presentes no grafo correspondente à matriz cheque-de-paridade \mathbf{H} . Ciclos (de tamanho quatro), envolvendo duas linhas k_1 e k_2 da matriz \mathbf{H} podem ser identificados por uma sequência de arestas $\{(u_{k_1}, c_{n_1}), (c_{n_1}, u_{k_2}), (u_{k_2}, c_{n_2}), (c_{n_2}, u_{k_1})\}$. O estudo de ciclos em grafos mostra que a seguinte relação caracteriza os ciclos envolvendo duas linhas da matriz \mathbf{H} (que correspondem, respectivamente, aos bits de informação e bits de paridade)

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) = f(\mathbf{h}_{k_1}, \mathbf{h}_{k_2}) \quad (17)$$

em que \mathbf{h}_{k_1} e \mathbf{h}_{k_2} são as duas colunas da matriz \mathbf{H} nas quais se pesquisa a presença de ciclos. Se $h_{k_1} = h_{k_2} = 1$ então tem-se que $m_i = i$ é uma componente do vetor $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$. Quando $n > 2$ o vetor \mathbf{m} representa ciclos múltiplos adjacentes.

Feita a identificação dos ciclos, passa-se à classificação das colunas — correspondentes aos bits de paridade — que participam do maior número de ciclos encontrado-se

$$(d_1, d_2, \dots, d_\ell) = g(m_1, m_2, \dots, m_n), \quad (18)$$

em que $g(\cdot)$ é uma função que mapeia o vetor (m_1, m_2, \dots, m_n) no $(d_1, d_2, \dots, d_\ell)$ de acordo com o histograma de \mathbf{m} . A componente $d_k \geq d_{k-1}$ corresponde ao número de vezes com que coluna k se envolve na formação de ciclos.

Desta classificação, forma-se a máscara de encurtamento, um conjunto com a posição dos ℓ bits que mais participam de ciclos

$$\mathcal{M}_{IV} = \{d_1, d_2, \dots, d_\ell\}. \quad (19)$$

III. RESULTADOS

Os resultados obtidos através da simulação de cinco sistemas distintos que transmitem informação codificada através de um canal BI-AWGN são apresentados. Compara-se assim, o desempenho dos sistemas que usam códigos LDPC encurtados (usando as quatro estratégias de encurtamento descritas) e o desempenho do sistema que usa um código LDPC (não-encurtado). Os parâmetros da Tabela I, utilizados em todos os casos estudados, garantem que a taxa dos códigos são as mesmas. Também considera-se o desempenho obtido teórica-

TABELA I
PARÂMETROS DO SISTEMA USADOS NAS SIMULAÇÕES.

Parâmetro	Valor
N	1200
K	800
ℓ	10%
N_{err}	50

mente e amplamente conhecido de um sistema que transmite informação não-codificada, em canal BI-AWGN.

Um ponto neste gráfico corresponde a BER (estimativa da probabilidade de erro) versus razão $\frac{E_b}{N_0}$. Cada ponto obtido

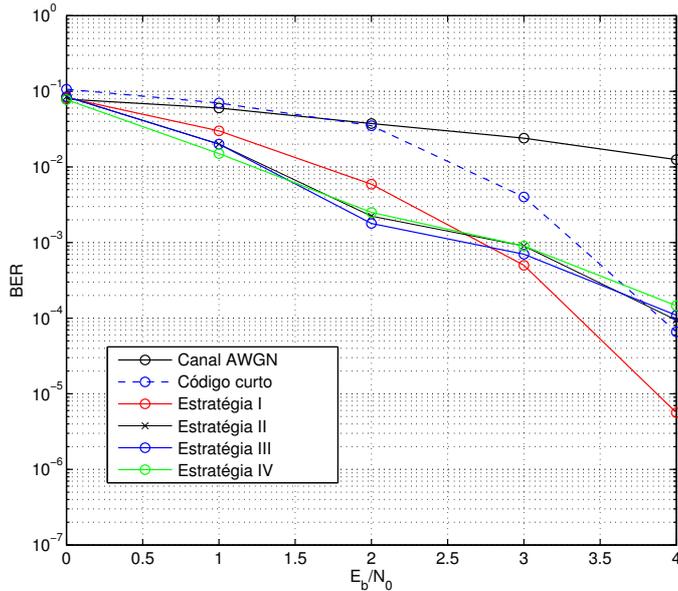


Fig. 3. Resultados de simulação usando as 4 máscaras propostas para encurtamento, o código curto e o referencial teórico do canal BI-AWGN, para fins de comparação.

com a simulação é resultante da transmissão, através do canal, de uma sequência de palavras-códigos com tamanho suficiente para garantir um número mínimo (N_{err}) de ocorrências de bits errados — para obter BER da ordem de 10^{-5} exigiu-se um número mínimo de erros observados igual a 50. O número de iterações executadas pelo algoritmo SP foi limitado a 10.

O gráfico apresentado na Fig. 3 ilustra os resultados obtidos. Verifica-se através desta figura que, com a Estratégia I, a taxa de bits errados, quando $\frac{E_b}{N_0} = 4$ dB é $BER = 5 \times 10^{-6}$, ou seja, uma redução de aproximadamente uma década é observada, quando comparada com 10^{-4} , a BER obtida quando se usa código não-encurtado ou código encurtado de acordo com as Estratégias II, III e IV. (quando se compara a BER de um sistema que usa a Estratégia I com aquela, cerca de 10^{-2} , de um sistema que não utiliza códigos a redução da BER vai além de 3 décadas — ou, um ganho de codificação da ordem de 5 dB.)

IV. CONCLUSÕES

Quatro estratégias de encurtamento de códigos LDPC foram investigadas neste trabalho. Uma estratégia é caracterizada basicamente pela seleção das posições, na palavra-de-informação, em que os bits conhecidos serão inseridos. Os bits conhecidos da palavra-de-informação, na primeira estratégia, ocupam as posições iniciais desta. A segunda estratégia posiciona os bits conhecidos em posições finais. A terceira estratégia examinada é caracterizada pela inserção dos bits conhecidos em posições da palavra-de-informação selecionadas aleatoriamente e, finalmente, a quarta estratégia se caracteriza pela seleção de posições da palavra-de-informação que pertencem a ciclos de comprimento quatro do grafo correspondente ao código. A técnica que apresentou o pior desempenho foi aquela na qual os bits conhecidos são alocados nas posições finais da palavra de informação ou seja, aquelas

mais próximas dos bits da paridade da palavra-código. A técnica que apresenta melhor desempenho é aquela que faz a alocação dos bits conhecidos nas posições iniciais da palavra-de-informação. A estratégia randômica exibe desempenho intermediário assim como, surpreendentemente, a estratégia por ciclos. Semelhantemente à busca de uma máscara de punçãoamento que é feita quando se usa o punçãoamento (*puncturing*), como técnica de modificação de um código-mãe, para a construção de um novo código, constata-se neste trabalho a necessidade de buscar uma máscara de encurtamento. Conjeturamos que a última estratégia investigada pode conduzir a códigos encurtados com melhor desempenho — este é um assunto sujeito a investigação futura.

O projeto de códigos LDPC vem sendo extensivamente investigado. Várias técnicas foram investigadas e códigos com bom desempenho tem sido encontrados. O fato da busca por bons códigos, com taxas e parâmetros específicos, usando diversas técnicas publicadas ter se demonstrado um trabalho árduo motivou a busca de bons códigos modificados (no caso do presente estudo, códigos encurtados). Ainda que tenhamos encontrado resultados satisfatórios, o estudo de encurtamento de códigos LDPC sistemáticos exige aprofundamento.

Como trabalhos futuros pretende-se estudar mais técnicas de alocação dos bits conhecidos, baseadas em informações da matriz de paridade que possam maximizar o desempenho do código pela alocação em posições da palavra de informação que levem a um desempenho melhor do que o apresentado neste artigo.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao IF Sudeste MG, UFJF, FAPEMIG, INERGE, CNPq, FINEP, P&D ANEEL-CEMIG e Smarti9 Ltda.

REFERÊNCIAS

- [1] C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes. 1", *Communications, 1993. ICC '93 Geneva. Technical Program, Conference Record, IEEE International Conference on*, pp.1064–1070, vol.2, 23-26 Maio 1993.
- [2] D. J. C. MacKay, "Fountain codes", *Communications, IEE Proceedings*, vol.152, no.6, pp.1062-1068, 9 Dezembro 2005.
- [3] A. Shokrollahi, "Raptor codes", *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol.52, no.6, pp.2551,2567, Junho 2006.
- [4] G. Falcao, J. Andrade, V. Silva, L. Sousa, "Real-time DVB-S2 LDPC decoding on many-core GPU accelerators" *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011 IEEE International Conference on* pp.1685–1688, 22-27 Maio 2011.
- [5] S. Galli, "Keynote 1. PHY LAYER and standardization", *Power Line Communications and Its Applications (ISPLC), 2009 IEEE International Symposium on*, pp.xii, 29 Março - 1 Abril 2009.
- [6] F. A. La-Gatta, M. V. Ribeiro, A. P. Legg, R. Machado, "Coded CP-SC communication scheme for outdoor power line communications", *Power Line Communications and Its Applications (ISPLC), 2010 IEEE International Symposium on*, pp.160–165, 28-31 Março 2010.
- [7] R. G. Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*. Dissertação (Mestrado). Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, MA, 1963.
- [8] S. J. Johnson, *Iterative Error Correction: Turbo, Low-Density Parity-Check and Repeat-Accumulate Codes*. Cambridge University Press, 2010.
- [9] Y. Xu, B. Liu, L. Gong, B. Rong, L. Gui, "Improved shortening algorithm for irregular QC-LDPC codes using known bits", *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, vol.57, no.3, pp.1057–1063, Agosto 2011.

- [10] M. Kobayashi, G. Caire, "Iterative Waterfilling for Weighted Rate Sum Maximization in MIMO-MAC", *Signal Processing Advances in Wireless Communications, 2006. SPAWC '06. IEEE 7th Workshop on* pp.1-5, 2-5 Julho 2006.
- [11] D. P. Palomar, J. R. Fonollosa, "Practical algorithms for a family of waterfilling solutions", *Signal Processing, IEEE Transactions on* , vol.53, no.2, pp.686-695, Fevereiro 2005.
- [12] H. Wymeersch, *Iterative Receiver Design*. Cambridge University Press, 2007.
- [13] T. K. Moon, *Error Correction Coding: Mathematical Methods and Algorithms*. John Wiley & Sons, 2005.