Distribuição Conjunta de Fase–Envoltória η-μ: Uma Nova Abordagem

Gustavo Rodrigues de Lima Tejerina e Michel Daoud Yacoub

***Resumo*— Este artigo propõe um modelo mais generalizado para a distribuição de desvanecimento η-μ. A lógica por trás deste novo modelo está na introdução de um parâmetro de fase que afeta o equilíbrio do número de clusters de multipercurso nos sinais fase e quadratura. Apesar da inserção deste parâmetro, as expressões obtidas ainda se apresentam na forma fechada e não afetam a distribuição da envoltória. Alguns gráficos são apresentados com o intuito de retratar o comportamento da nova distribuição de fase.**

***Palavras-Chave*— Distribuição η-μ, ditribuição conjunta fase-envoltória, distribuição de fase.**

***Abstract*— This paper proposes an improved and more general model for the η-μ fading distribution. The rationale behind this new model lies in the introduction of a phase parameter affecting the balance of number of multipath clusters in phase and quadrature signals. Despite the introduction of the phase parameter, the obtained formulations are still presented in closed-form expressions. And, of course, the envelope is not affected by it. Plots are shown to depict the phase behavior of the new phase distribution.**

***Keywords*— η-μ Distribution, phase-envelope joint distribution, phase distribution.**

I. INTRODUÇÃO

O avanço tecnológico tem alterado, e muito, o cenário das comunicações sem fio. Apesar desta constante evolução, o fenômeno de desvanecimento persiste como um problema a ser melhor caracterizado. Assim, com o intuito de melhor descrever o comportamento de canal rádio-móvel, diversos modelos de desvanecimento têm sido propostos. Em geral, estes modelos são conhecidos pela função densidade de probabilidade (FDP) da envoltória do sinal que representam. Sabe-se que a variação de sinal de longo prazo é tipicamente caracterizada pela distribuição Lognormal, e a variação de sinal de curto prazo é bem definida por distribuições já conhecidas como Rayleigh, Hoyt, Rice, e Nakagami-*m* [1]. Em particular, Rayleigh, Hoyt e Rice foram obtidas a partir de modelos físicos que contemplavam diretamente tanto a fase quanto a envoltória. Por outro lado, a distribuição Nakagami-*m* apareceu apenas em termos da distribuição da envoltória. Da mesma forma, outras distribuições mais gerais, tais como κ-μ [1], η-μ [1], e α-μ [2] também foram propostas visando somente a envoltória. Assim, a distribuição de fase destas distribuições é tema em aberto e sujeito a pesquisa. Neste sentido, propostas de modelos para a distribuição conjunta fase-envoltória para algumas destas distribuições surgiram. Em especial, para Nakagami-*m* uma proposta inicial apareceu em [3], tendo evoluído para uma condição mais geral em [4]. Para as distribuições κ-μ e η-μ, as propostas de suas respectivas versões de sinais complexos aparecem em [5] e [6], respectivamente.

Gustavo R. de L. Tejerina e Michel D. Yacoub estão no Laboratório de Tecnologia Sem Fio (Wisstek), Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, E-mails: [tejerina,michel]@decom.fee.unicamp.br.

As estatísticas da fase de um sinal impactam em diversos campos das telecomunicações. A detecção de sinais de radar é um exemplo [7]–[13]. Sabe-se ainda que o desempenho de esquemas de modulação usando detecção coerente não ideal ou detecção não-coerente é diretamente afetada pelas estatísticas de fase do canal [14], [15]. A distribuição conjunta fase-envoltória é ainda usada na determinação de estatísticas de ordem superior em cenários com diversidade multibranch [16]. A capacidade de canais do tipo MIMO pode ser afetada pela distribuição de fase do sinal [17]. Da mesma forma, a informação de fase é fundamental para se avaliar o desempenho a taxa de erro em modulações BPSK em sinais OFDM [18].

O principal objetivo deste artigo é propor um modelo mais realista para o sinal complexo η-μ, generalizando o modelo inicialmente apresentado em [6]. Baseado em [4], este novo modelo introduz um parâmetro de fase que se relaciona com o número de clusters presentes nas componentes fase e quadratura. É possível constatar de antemão que o parâmetro de fase influenciará no comportamento da distribuição de fase, e este será justificado, posteriormente, como o efeito do desbalanceamento de potência entre os componentes em fase e quadratura.

Este artigo encontra-se estruturado como se segue: a Seção II revisita, brevemente, a distribuição η-μ; a Seção III apresenta o desenvolvimento matemático para a obtenção da distribuição conjunta fase-envoltória do modelo generalizado; a Seção IV explora as formulações apresentado os gráficos da distribuição de fase em termos dos diversos parâmetros envolvidos.

II. REVISITANDO A DISTRIBUIÇÃO DE DESVANECIMENTO η-μ

A η-μ é uma distribuição geral de desvanecimento que pode ser aplicada em sinais desvanecidos com pequenas variações de escala sem linha de visada [1], [19]. Esta distribuição é composta por dois parâmetros η e μ. O parâmetro $\mu > 0$ descreve a quantidade de *clusters* de multipercurso no ambiente. O parâmetro η assume papéis distintos definindo assim dois formatos para a distribuição: Formato 1 e Formato 2. No Formato 1, η descreve a razão entre as potências fase e quadratura. No Formato 2, η descreve a correlação entre componentes fase e quadratura.

Para uma envoltória R e valor rms a $\hat{r} = \sqrt{E[R^2]}$, a FDP da envoltória η-μ é dada por

$$f_R(r) = \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^{\mu}}{\Gamma[\mu]H^{\mu-\frac{1}{2}}\hat{r}}\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{2\mu}\exp\left[-2\mu h\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right] \times I_{\mu-\frac{1}{2}}\left[2\mu H\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right] \quad (1)$$

em que h e H são funções de η e assumem relações diferentes para cada formato, $\mu = \frac{E^2[R^2]}{2Var[R^2]}\left[1+\left(\frac{H}{h}\right)^2\right]$, $\Gamma[\cdot]$ é a função Gamma, $I_\nu[\cdot]$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem arbitrária ν [20, Eq. 9.6.20], e, $E[\cdot]$ e $Var[\cdot]$ indicam, respectivamente, os operadores esperança e variância.

A distribuição η-μ apresenta como casos especiais as distribuições Nakagami-*m* e Hoyt. Vale ressaltar que a parte da cauda da distribuição η-μ mostra-se razoavelmente apropriada para caracterizar sinais de níveis baixos, onde o ajuste usando as distribuições conhecidas falham [1]. Ainda, a distribuição η-μ pode ser utilizada para obter uma aproximação da soma de variáveis Hoyt, independentes, não idênticas, e com potência média e níveis de desvanecimento arbitrários [21].

A. Formato 1

O modelo físico para o Formato 1 contempla um sinal composto de cluster de multipercurso com ondas propagando em um ambiente não homogêneo. Em cada cluster, os componentes fase e quadratura do sinal desvanecido são independentes e apresentam potências distintas. Neste formato, o parâmetro η, $0 < \eta < \infty$, representa a razão entre potências das ondas dispersadas nos componentes em fase e quadratura. Neste caso, $h = \frac{2+\eta^{-1}+\eta}{4}$ e $H = \frac{\eta^{-1}-\eta}{4}$. Dentro dos intervalos $0 < \eta < 1$ e $0 < \eta^{-1} < 1$, a FDP da envoltória apresenta os mesmos valores, portanto, ela é simétrica em torno de 1.

B. Formato 2

No Formato 2, considera-se que o sinal é composto por clusters de multipercurso com ondas propagando em ambientes não homogêneos. Os componentes fase e quadratura apresentam potências iguais e são correlacionadas entre si. O parâmetro η, $-1 < \eta < 1$, representa o coeficiente de correlação entre os componentes em fase e quadratura para cada cluster de multipercurso. Neste caso, $h = \frac{1}{1-\eta^2}$ e $H = \frac{\eta}{1-\eta^2}$. O modelo apresenta um eixo de simetria em torno de 0, para os intervalos $0 < \eta < 1$ e $-1 < \eta < 0$.

C. Relação Entre Formatos

Verifica-se que $\frac{H}{h} = \frac{1-\eta}{1+\eta}$ no Formato 1, e $\frac{H}{h} = \eta$ no Formato 2. Usando destes artifícios, infere-se que um Formato é obtido pelo outro aplicando $\eta_1 = \frac{1-\eta_2}{1+\eta_2}$ ou $\eta_2 = \frac{1-\eta_1}{1+\eta_1}$, em que η_1 e η_2 são o parâmetro η para o Formato 1 e o Formato 2, respectivamente.

III. Modelo Generalizado

Em [6], definiu-se um modelo complexo para o sinal η-μ, em que fase e quadratura são compostos por número idêntico de clusters de multipercurso. Em [4], propõe-se um novo modelo generalizado para o sinal complexo Nakagami-*m* em que números diferentes de clusters de multipercursos nas componentes fase e quadratura são tais que modificam a distribuição resultante de fase mantendo, porém, a envoltória Nakagami-*m*. Essa mesma idéia de [4] é então usada para o modelo complexo η-μ, generalizando, assim, o modelo de [6].

Seja $S = X + jY$, a variável complexa da distribuição η-μ, com X e Y denotando, respectivamente, a parte real e imaginária de S. Dessa forma, tem-se

$$R^2 = X^2 + Y^2 \quad (2)$$

$$\Theta = \arg(X + jY). \quad (3)$$

Para a proposta de generalização, $X^2 = \sum_{i=1}^{2\mu_X} X_i^2$ e $Y^2 = \sum_{i=1}^{2\mu_Y} Y_i^2$, sendo X_i e Y_i variáveis Gaussianas com média nula e variâncias que se modificam de acordo com o Formato, e, μ_X e μ_Y correspondem ao número de clusters de multipercurso. Para fins das deduções que se seguem, admite-se um número inteiro de clusters. Essa restrição é, então, relaxada para se terem números reais positivos (número não inteiro de clusters). Para o Formato 1, X_i e Y_i são processos independentes com $E[X_i] = E[Y_i] = 0$, $E[X_i^2] = \sigma_X^2$ e $E[Y_i^2] = \sigma_Y^2$, e o parâmetro $0 < \eta < \infty$ relaciona-se com a razão entre potências entre os clusters de multipercuso na forma $\eta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$. Já no Formato 2, X_i e Y_i são processos correlacionados com $E[X_i] = E[Y_i] = 0$, $E[X_i^2] = E[Y_i^2] = \sigma^2$, e o parâmetro $-1 < \eta < 1$ relaciona-se com a correlação entre os clusters de multipercurso na forma $\eta = \frac{E[X_iY_i]}{\sigma^2}$.

Para este trabalho, o Formato 2 será utilizado. Usando uma rotação apropriada de eixos [1], os processos Gaussianos correlacionados tornam-se independentes com variâncias $\sigma_{X_i}^2 = (1-\eta)\sigma^2$ e $\sigma_{Y_i}^2 = (1+\eta)\sigma^2$.

Considere $Z = sgn(Z) \times |Z|$, $Z^2 = \sum_{i=1}^{2\mu_Z} Z_i^2$, em que $sgn(\cdot)$ é a função sinal, $Z = X$, $Z_i = X_i$ e $\Omega_Z = \Omega_X$, ou $Z = Y$, $Z_i = Y_i$ e $\Omega_Z = \Omega_Y$. Assim a FDP de Z é dada por [6]

$$f_Z(z) = \frac{\mu_Z^{\mu_Z}|z|^{2\mu_Z-1}}{\Omega_Z^{\mu_Z}\Gamma[\mu_Z]}\exp\left(\frac{\mu_Z z^2}{\Omega_Z}\right), \quad -\infty < z < \infty \quad (4)$$

com $\mu_Z > 0$. Para um sinal η-μ, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\mu_X + \mu_Y = 2\mu \quad (5)$$

$$\Omega_X = 2\mu_X\sigma_X^2 \quad (6)$$

$$\Omega_Y = 2\mu_Y\sigma_Y^2 \quad (7)$$

$$\Omega_X\mu_Y\sigma_Y^2 = \Omega_Y\mu_X\sigma_X^2. \quad (8)$$

Defina um parâmetro de fase, $-1 \leq p \leq 1$, que descreva a distribuição relativa de clusters de multipercurso nas componentes fase e quadratura. Na condição balanceada, i.e. clusters igualmente distribuídos em ambas as componentes, $p = 0$. Caso contrário, na condição desbalanceada, $p \neq 0$, clusters encontram-se distribuídos arbitrariamente nas componentes. Para $p = 1$, todos os clusters encontram-se na componente fase. Para $p = -1$, todos os clusters concentram-se na componente quadratura. Desta forma

$$p = \frac{\mu_X - \mu_Y}{\mu_X + \mu_Y}. \tag{9}$$

Substituindo-se (8) em (9), obtém-se

$$p = \frac{\Omega_X \sigma_Y^2 - \Omega_Y \sigma_X^2}{\Omega_X \sigma_Y^2 + \Omega_Y \sigma_X^2} \tag{10}$$

Assim, infere-se da equação (10) que o parâmetro de fase quantifica o desbalanceamento de potência entre as componentes fase e quadratura. Em outras palavras, com $p = 1$, toda a potência está concentrada na componente fase, enquanto que para $p = -1$, a potência concentra-se na componente quadratura.

Partindo-se de (5) e (9) obtêm-se

$$\mu_X = (1+p)\mu \tag{11}$$

$$\mu_Y = (1-p)\mu. \tag{12}$$

Deste modo, substituindo, respectivamente, (11) e (12), em (6) e (7) têm-se

$$\Omega_X = 2\mu(1+p)(1-\eta)\sigma^2 \tag{13}$$

$$\Omega_Y = 2\mu(1-p)(1+\eta)\sigma^2. \tag{14}$$

As FPDs $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ são escrita, respectivamente, como

$$f_X(x) = \left[\frac{1}{2\sigma^2(1-\eta)}\right]^{\mu(1+p)} \frac{|x|^{2\mu(1+p)-1}}{\Gamma[\mu(1+p)]} \times \exp\left[\frac{-x^2}{2\sigma^2(1-\eta)}\right] \tag{15}$$

$$f_Y(y) = \left[\frac{1}{2\sigma^2(1+\eta)}\right]^{\mu(1-p)} \frac{|y|^{2\mu(1-p)-1}}{\Gamma[\mu(1-p)]} \times \exp\left[\frac{-y^2}{2\sigma^2(1+\eta)}\right] \tag{16}$$

em que $-\infty < x < \infty$ e $-\infty < y < \infty$. A FDP conjunta de R e de Θ, $f_{R,\Theta}(r,\theta)$, é obtida por $f_{R,\Theta}(r,\theta) = |J| f_{X,Y}(x,y)$, sendo $|J| = R$ o Jacobiano das variáveis de transformação $X = Rcos(\Theta)$ e $Y = Rsin(\Theta)$. Considerando-se que os componentes fase e quadratura são independentes, a FDP conjunta de X e de Y, $f_{X,Y}(x,y)$, é dada por $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$. Assim, com as devidas substituições de variáveis,

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{r^{4\mu-1}|\sin(\theta)\cos(\theta)|^{2u-1}|\tan(\theta)|^{-2\mu p}}{2^{2\mu}\sigma^{4\mu}\Gamma[\mu(1-p)]\Gamma[\mu(1+p)]} \times \frac{(1+\eta)^{-\mu(1-p)}}{(1-\eta)^{\mu(1+p)}} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\left(\frac{\cos^2(\theta)}{1-\eta} + \frac{\sin^2(\theta)}{1+\eta}\right)\right] \tag{17}$$

com $r \geq 0$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Finalmente, FDP de fase, $f_\Theta(\theta)$, é dada por

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma[2\mu]|\sin(2\theta)|^{2\mu-1}}{2^{2\mu}\Gamma(\mu(1-p))\Gamma(\mu(1+p))|\tan(\theta)|^{2\mu p}} \times \frac{(1-\eta)^{\mu(1-p)}(1+\eta)^{\mu(1+p)}}{(1+\eta\cos(2\theta))^{2\mu}} \tag{18}$$

com $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Como esperado, quando $p = 0$ (caso balanceado), (18) reduz-se a [6, Eq. (9)]. Como em [6], R e Θ são variáveis correlacionadas. Ainda, para $\mu = \frac{m}{2}$ e $\eta = 0$, (18) reduz-se à FDP da fase Nakagami-*m* obtida [4, Eq. (15)].

IV. Discussão e Gráficos

Nesta seção, alguns gráficos são apresentados para ilustrar o comportamento da distribuição generalizada de fase do sinal complexo η-μ. A questão mais fundamental é o efeito do parâmetro de fase p. De início, os autores conjecturavam que o parâmetro η estava, de certo modo, relacionado ao parâmetro de fase p. A hipótese foi, previamente, levantada devido à relação imposta por η entre potência ou correlação dos sinais em fase e quadratura. No entanto, a análise dos gráficos, mostrados a seguir, mostra que essa conjectura não é verdadeira. E isso é reforçado ao se analisar qualquer uma das equações aqui obtidas. Em particular, a FDP da fase (18) mostra isso claramente. Além disso, a partir de relações simples, as distribuições para a componente fase ou para a componente quadratura podem ser reduzidas a Gaussiana. Mais particularmente, de (15) e para $2\mu(1+p) = 1$, a FDP da componente fase é uma Gaussiana de média nula e variância $\sigma^2(1-\eta)$. Da mesma forma, de (16) e para $2\mu(1-p) = 1$, a FDP da componente quadratura é uma Gaussiana de média nula e variância $\sigma^2(1+\eta)$. Por outro lado, a condição Gaussiana não pode ser obtida com a manipulação do parâmetro η. Claramente, os parâmetros η e p desempenham funções distintas afetando de forma diversa o comportamento do sinal complexo η-μ.

A Figura 1 apresenta a FDP da fase com $\mu = 0.5$, $\eta = 0.5$ e p variando. Da mesma forma, a FDP da fase é mostrada na Figura 2 para $\mu = 0.5$, $p = 0.5$ e η variando. Notem em ambas as situações que as curvas são claramente distintas, embora em algumas condições elas possam mostrar alguma similaridade. As Figuras 3 e 4 mostram situações equivalentes, porém para $\mu = 1.5$. Vale notar que para um dado μ e um dado p (Figuras 2 e 4), a distribuição de fase é quatro-modal, independetemente de η. Por outro lado, para um dado μ e um dado η (Figuras 1 e 3), a distrbuição de fase pode passar de quatro- para bi-modal dependendo de p. Isso se deve uma das componentes fase ou quadratura passar pela condição

Gaussiana. A Figura 5 mostra a distribuição de fase para $\eta = 0.5$, $p = 0.5$ e μ variando. Notem como o aumento de μ tende a provocar uma maior concentração da fase em torno de valores específicos. Particularmente, para a situação mostrada, estes valores são $\pm\pi$, $\pm\pi/2$, $\pm\pi/4$, e $\pm 3\pi/4$. Porém, isso pode varia dependendo de η e p.

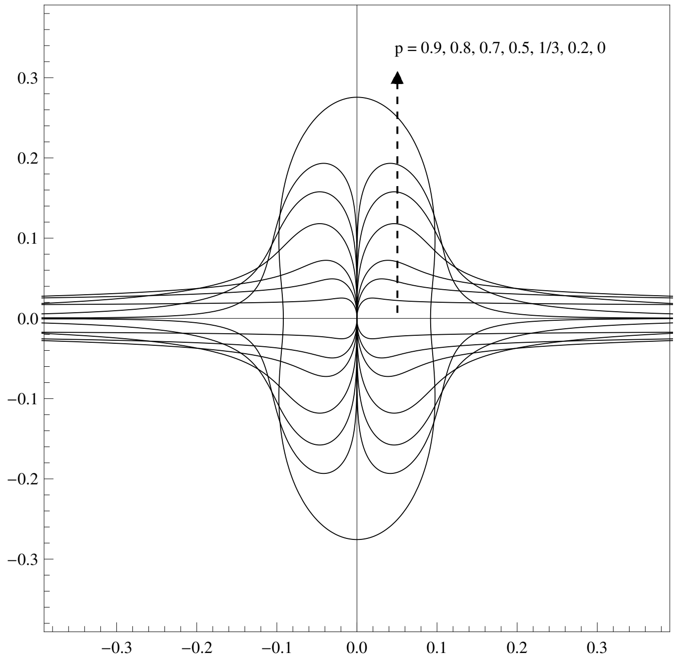

Fig. 1. FDP da fase em coordenadas polares com $\eta = 0.5$, $\mu = 0.5$ e parâmetro de fase variando.

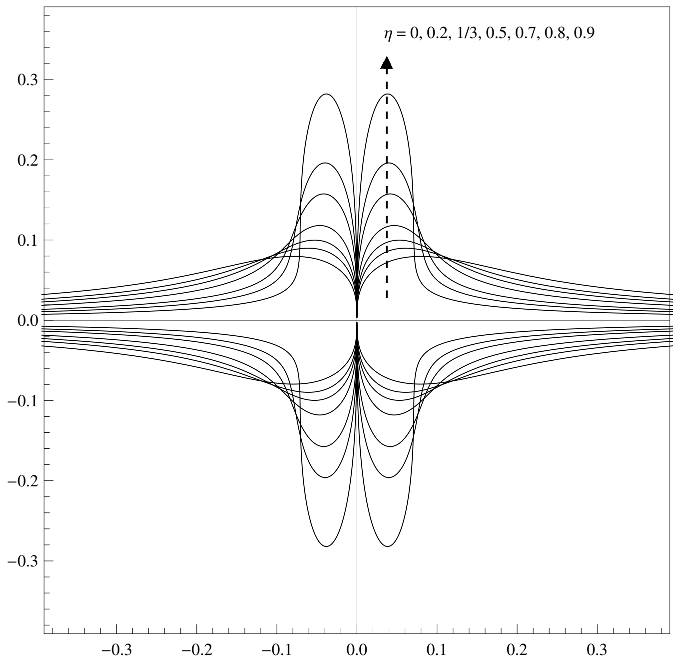

Fig. 2. FDP da fase em coordenadas polares com, $\mu = 0.5$, $p = 0.5$ e η variando.

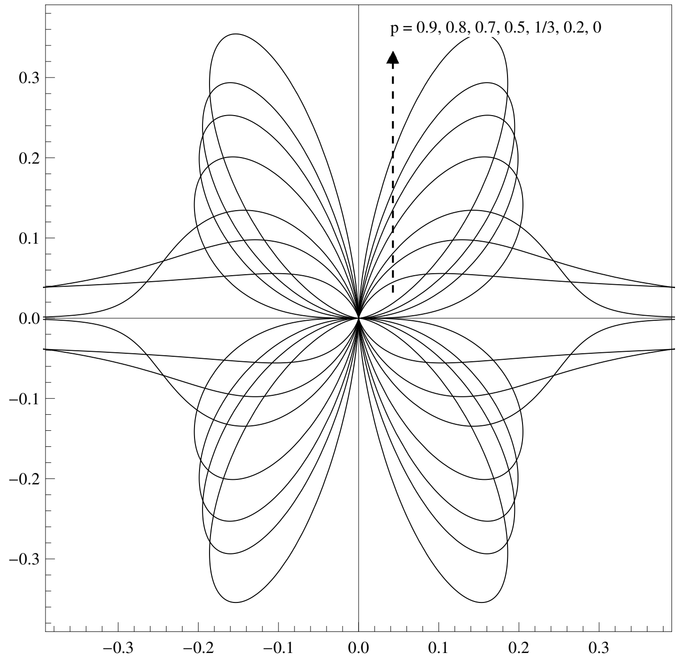

Fig. 3. FDP da fase em coordenadas polares com $\eta = 0.5$, $\mu = 1.5$ e parâmetro de fase variando.

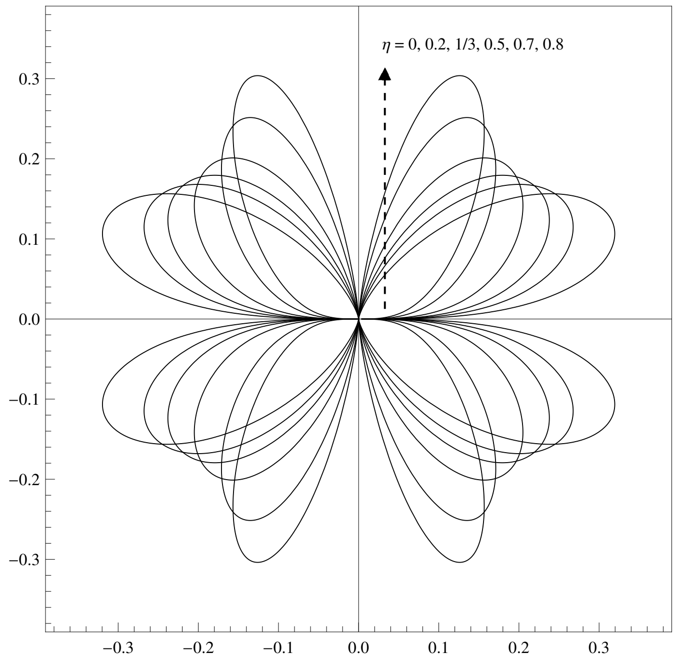

Fig. 4. FDP da fase em coordenadas polares com, $\mu = 1.5$, $p = 0.5$ e η variando.

V. Conclusões

Este artigo apresentou um novo modelo generalizado para o sinal complexo η-μ. O novo modelo incorpora um parâmetro de fase relacionado ao balanceamento de potência entre os componentes fase e quadratura. A influência deste parâmetro é notória e provê uma maior flexibilidade para possíveis ajustes práticos.

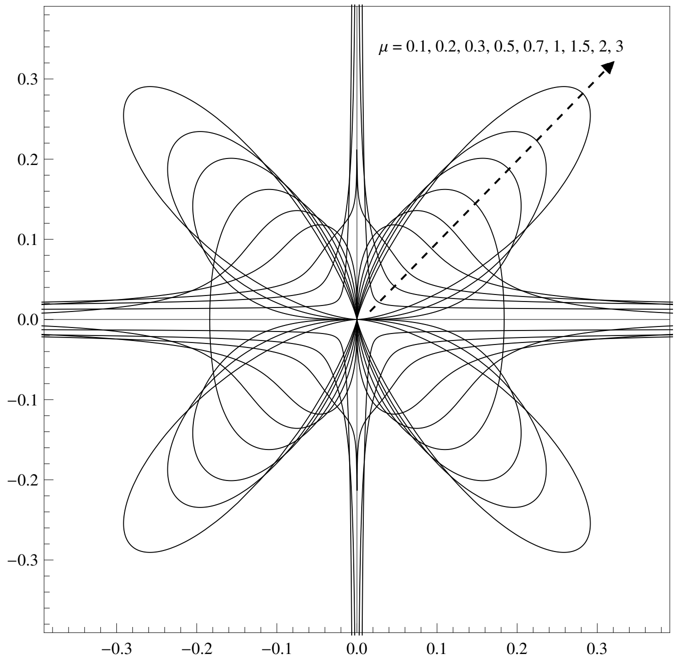

Fig. 5. FDP da fase em coordenadas polares com, $\eta = 0.5$, $p = 0.5$ e μ variando.

REFERÊNCIAS

[1] M. D. Yacoub, "The κ-μ Distribution and the η-μ Distribution," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 49, pp. 68–81, Fevereiro 2007.

[2] M. D. Yacoub, "The α-μ Distribution: A Physical Fading Model for the Stacy Distribution," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 56, no. 1, pp. 27–34, Janeiro 2007.

[3] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, e J. C. S. Santos Filho, "Nakagami-*m* phase–envelope joint distribution," *Electron. Letters*, v. 41, pp. 259–261, Março 2005.

[4] M. D. Yacoub, "Nakagami-*m* phase-envelope joint distribution: A new model," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Março 2010.

[5] U. S. Dias and M. D. Yacoub, "The κ-μ joint phase-envelope distribution," *IEEE Trans. Comm.*, v. 58, no. 1, pp. 40–45, Janeiro 2009.

[6] D. B. da Costa and M. D. Yacoub, "The η-μ joint phase-envelope distribution," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, v. 6, pp. 195–198, 2007.

[7] J. I. Marcum, "A statistical theory of target detection by pulsed radar," *IRE Trans. Inf. Theory*, v. 6, no. 2, pp. 59–267, Abril 1960.

[8] S. O. Rice, "Statistical properties of a sine wave plus random noise," *Bell Syst. Tech J.*, v. 27, no. 1, pp. 109–157, Janeiro 1948.

[9] J. H. Roberts, *Angle Modulation*. Stevenage, U.K.: Peregrinus, 1977.

[10] R. F. Pawula, "On the theory of error rates for narrow-band signals digital FM," *IEEE Trans. Commun.*, v. COM-29, no. 11, pp. 1634–1643, Novembro 1981.

[11] M. Schwartz, W. R. Bennett, and S. Stein, *Communication Systems and Techniques*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1996.

[12] M. K. Simon, S. M. Hinedi, and W. C. Lindsey, *Digital Communication Techniques*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.

[13] P. Beckmann, *Probability in Communication Engineering*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1967.

[14] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2001.

[15] J. G. Proakis, "Probabilities of error for adaptive reception of *M*-phase signals," *IEEE Trans. Commun. Technol.*, v. COM-16, no. 1, pp. 71–81, Janeiro 1968.

[16] G. Fraidenraich, J. C. S. Santos Filho, and M. D. Yacoub, "Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Hoyt fading," *IEEE Commun. Lett.*, v. 9, no. 1, pp. 19–21, Janeiro 2005.

[17] Caijun Zhong, Shi Jin, T. Ratnarajah, e Kai-Kit Wong, "On the Capacity of Non-Uniform Phase MIMO Nakagami-*m* Fading Channels," *IEEE Commun. Letters*, v. 14, no. 5, pp. 536–538, Junho 2010.

[18] K. A. Hamdi, "Analysis of OFDM over Nakagami-*m* Fading with Nonuniform Phase Distributions," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, v. 11, no. 2, pp. 488–492, Fevereiro 2012.

[19] M. D. Yacoub, "The $\eta - \mu$ Distribution: A general fading distribution," *Proc. IEEE Fall Veh. Technol. Conf.*, Boston, USA, Setembro 2000.

[20] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formular, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1972.

[21] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, "Highly accurate η-μ approximation to the sum of *M* independent non-identical Hoyt variates," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, v. 4, pp. 436–438, 2005.