

Detector de Baixa Complexidade para Modulação Espacial usando Equalização Linear com Forçagem a Inteiros

Bruno Fontana da Silva¹ e Bartolomeu F. Uchôa-Filho²

¹Instituto Federal Sul-riograndense (IFSul), Campus Sapiranga
brunosilva@ifsul.edu.br

²Grupo de Pesquisa em Comunicações (GPqCom), Universidade Federal de Santa Catarina
uchoa@eel.ufsc.br

Resumo—Modulação espacial generalizada (GSM) considera o envio de informação através de um índice espacial que seleciona M' antenas ativas de M antenas disponíveis no transmissor. O receptor pode recuperar o índice espacial detectando o subconjunto de antenas ativas. O detector de máxima-verossimilhança (ML) é ótimo para receptores de esquemas com GSM, porém sua complexidade torna-se intratável para constelações digitais de ordem alta e um número elevado de antenas ativas. Este trabalho propõe uma detecção dos sinais transmitidos na GSM com baixa complexidade para o receptor. O detector utiliza equalização linear com forçagem a inteiros (IF) e possui complexidade reduzida em relação ao ML, com o custo de uma perda de desempenho em termos de taxa de erro de bit.

Palavras-Chave—Modulação espacial, detecção de baixa complexidade, forçagem a inteiros.

Abstract—Generalized Spatial Modulation (GSM) transmits extra information using a spatial index that selects a subset of M' active antennas out of the total M available antennas at the transmitter. Optimal detection of both the spatial index and the digital modulation transmitted in the antennas is given by the maximum-likelihood (ML) detector. However, its complexity is intractable for a large number of active antennas. In this paper, we propose a new detection scheme for low-complexity detection of GSM based on linear equalization. We use integer-forcing (IF) linear receivers as equalizers and obtain a significant complexity reduction when comparing to the optimal ML detector at the cost of loss in performance in terms of bit error rate.

Keywords—Spatial modulation, low-complexity detection, integer-forcing.

I. INTRODUÇÃO

Modulação espacial (SM) é um paradigma relativamente recente para sistemas de comunicação com múltiplas antenas (MIMO) (veja os tutoriais [1, 2, 3]). Graças a suas diversas vantagens em relação a outras técnicas MIMO, SM tornou-se um tópico de pesquisa importante e, como indicado em [3], ela foi reconhecida como uma técnica MIMO promissora a ser adotada nos futuros sistemas de comunicação sem fio.

Na chamada modulação espacial generalizada (GSM) [4, 5, 6], um conjunto de M' antenas transmissoras é ativado dentre um total de M antenas disponíveis. Em cada antena ativa, é transmitido um símbolo de uma constelação M_q -ária clássica (e.g., QAM). Associando-se informação aos índices das antenas dentro do conjunto ativo, o número resultante de bits por transmissão é aumentado para $M' \lfloor \log_2(M_q) \rfloor + \lfloor \log_2 \left(\frac{M}{M'} \right) \rfloor$.

O detector ótimo usado na GSM é detector de máxima-verossimilhança (ML). Entretanto, sua complexidade pode tornar-se intratável para um número muito grande de antenas ativas e de símbolos da constelação digital.

Os autores de [7] propõem um algoritmo de detecção eficiente denominado “ordered block minimum mean-squared error” (OB-MMSE). Em relação ao ML, esse algoritmo obtém um fator de redução de complexidade na faixa de 96% a 87% da baixa para a alta razão sinal-ruído (SNR), respectivamente, com desempenho próximo ao do

detector ML.

O trabalho [8] propõe um algoritmo iterativo de baixa complexidade com desempenho próximo do ótimo. Em relação ao OB-MMSE, a redução de complexidade é próxima de 75% em alta SNR.

Neste trabalho, nossa proposta é uma detecção sub-ótima do sinal recebido auxiliada por equalização linear, identificando tanto os símbolos espaciais quanto os símbolos de modulação digital. O objetivo principal é realizar a detecção usando processamento linear e reduzir sua complexidade em relação a detecção ótima (para cenários em que essa torna-se intratável). Ainda, no processo de detecção, a equalização MMSE é estendida para o caso de forçagem a inteiros.

II. MODELO DO SISTEMA

Em um esquema de comunicações sem fio MIMO com um usuário (nó fonte) e uma estação radiobase (nó destino), considere o nó fonte com M antenas transmissoras e M' cadeias de RF disponíveis para transmissão. Considere ainda que o nó destino possui N antenas receptoras. Um esquema de modulação espacial no transmissor seleciona M' de M antenas de acordo com uma sequência de $b_{\text{sm}} = \lfloor \log_2 \binom{M}{M'} \rfloor$ bits de informação espacial que se deseja transmitir. Denominamos esse cenário pela sigla SU-GSM (*single-user generalized spatial modulation*).

Define-se como a constelação espacial o conjunto de símbolos $\mathcal{M} = \{0, 1, \dots, \binom{M}{M'} - 1\}$. Sem perda de generalidade, assumamos que $\binom{M}{M'}$ é uma potência de 2. O conjunto de símbolos de modulação espacial tem então cardinalidade $|\mathcal{M}| = 2^{b_{\text{sm}}} = \binom{M}{M'}$. Portanto, a sequência de bits b_{sm} pode ser representada na sua forma decimal por um inteiro $m \in \mathcal{M}$. Cada inteiro m está univocamente relacionado com um subconjunto de M' antenas transmissoras ativas do total de M antenas transmissoras disponíveis.

Considere uma matriz binária $\mathbf{F} \in \mathbb{F}_2^{M \times M'}$. O elemento f_{ij} indica que a condição da i -ésima antena em relação à j -ésima antena ativa: quando $f_{ij} = 0$, a antena transmissora está inativa na respectiva cadeia de RF; quando $f_{ij} = 1$ a antena transmissora está ativa nesta cadeia de RF. Portanto, uma matriz \mathbf{F} válida deve obedecer às seguintes condições: (a) o peso de Hamming

$w_H(\cdot)$ de cada coluna deve ser 1, (b) exatamente M' linhas têm peso de Hamming 1 e (c) as $M - M'$ linhas restantes têm peso 0.

É necessário então um mapeamento bijetor de modulação espacial $\varphi: \mathbb{Z}_{2^{b_{\text{sm}}}} \rightarrow \mathbb{F}_2^{M \times M'}$ associando cada símbolo inteiro de modulação espacial a um subconjunto particular de antenas ativas. Assim, a constelação espacial pode ser equivalentemente especificada como

$$\mathcal{M}' = \{\varphi(m) | m \in \mathcal{M}\} = \{\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_{2^{b_{\text{sm}}}-1}\}.$$

Considere o exemplo para $M = 4$, $M' = 3$ e $N = 1$. Neste caso, $\mathcal{M} = \{0, 1, 2, 3\}$. Seja $m = 2$ (representando a sequência de bits 10). Sem perda de generalidade, considere que m corresponde à ativação das antenas 1, 3 e 4 respectivamente nas cadeias de RF 1, 2 e 3. Neste caso, temos que a matriz binária de mapeamento é dada por

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em cada linha, a posição da coluna com elemento 1 indica em qual cadeia cada antena está sendo ativada. As antenas inativas possuem peso de Hamming nulo nas suas respectivas linhas.

Sejam uma matriz de canal $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ com elementos $h_{ij} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ e uma matriz de pré-codificação $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{M' \times M'}$. O canal equivalente \mathbf{H}'_m de uma transmissão com modulação do símbolo espacial m é dado por

$$\mathbf{H}'_m = \mathbf{H}\mathbf{F}_m\mathbf{T}, \quad (1)$$

sendo \mathbf{H}'_m uma matriz com dimensões $N \times M'$. Para não alterar a potência total de transmissão, restringe-se $\text{Tr}(\mathbf{T}\mathbf{T}^H) \leq 1$.

Considere uma constelação digital multidimensional $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^{M'}$, na qual cada dimensão contém um símbolo M_q -QAM multiplexado na respectiva cadeia de RF. Dessa forma, tem-se que a cardinalidade da constelação é $|\mathcal{X}| = 2^{b_{\text{qam}}M'}$, sendo $b_{\text{qam}} = \log_2 M_q$ a quantidade de bits transmitidos por cada antena ativa.

Seja $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}$ o símbolo transmitido pelas antenas ativas e m o símbolo espacial que corresponde ao canal equivalente usado pelo transmissor. O sinal recebido é dado então por

$$\mathbf{y}' = \mathbf{H}'_m\mathbf{x}' + \mathbf{z}', \quad (2)$$

na qual $\mathbf{z}' \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$ é o vetor AWGN. Assumimos que a restrição de potência da constelação é $P_T = E[\|\mathbf{x}'\|^2] = M'$. Defina-se a SNR como $\text{SNR} = \frac{P_T}{N\sigma^2} = \frac{M'}{N\sigma^2}$. Para simplicidade das análises e notação, assumiremos daqui em diante que $N = M'$, de forma que $\text{SNR (dB)} = -10 \log_{10}(\sigma^2)$.

Para detecção ML, é necessário realizar o procedimento de estimação do par (\mathbf{x}', m) tal que

$$(\hat{\mathbf{x}}', \hat{m}) = \arg \min_{\mathbf{x}', m'} \|\mathbf{y}' - \mathbf{H}'_{m'} \mathbf{x}'\|^2. \quad (3)$$

Este procedimento possui complexidade $\mathcal{O}(|\mathcal{X}'||\mathcal{M}'|)$. Usando limitantes simples do coeficiente binominal, sabe-se que

$$\left(\frac{M}{M'}\right)^{M'} < \binom{M}{M'} < \left(e \frac{M}{M'}\right)^{M'},$$

mostrando que $|\mathcal{M}'|$ é exponencial em M' . Assumindo que $\binom{M}{M'} = \left(\alpha \frac{M}{M'}\right)^{M'}$, para $1 < \alpha < e$, tem-se que

$$|\mathcal{X}'||\mathcal{M}'| = M_q^{M'} \left(\alpha \frac{M}{M'}\right)^{M'} \quad (4a)$$

$$= \beta^{M'}, \quad (4b)$$

na qual $\beta = f(M_q, M, M') = \alpha M_q \frac{M}{M'}$ é uma base dependente de M_q , M e M' . Portanto, para valores elevados de β e M' , a decodificação ML pode tornar-se impraticável, visto que possui ordem de complexidade proporcional a $\beta^{M'}$ (exponencial em M').

III. EQUALIZAÇÃO LINEAR COM FORÇAGEM A INTEIROS

Seja $c\mathbf{B}_{m'}$ uma matriz de equalização para o canal equivalente $\mathbf{H}'_{m'}$, em que c é uma constante para ajuste de potência média da constelação digital QAM. Seja $\mathbf{x} = c\mathbf{x}'$ o vetor cujos elementos fazem parte da constelação M_q -QAM formada pelo produto cartesiano de duas constelações M_p -PAM com distância mínima $d_{\min} = 2$, sendo $M_p = \sqrt{M_q}$. A constante c é calculada de forma que todos os elementos de \mathbf{x} sejam inteiros gaussianos da forma $x_k = a_k + ib_k$, tal que $a_k, b_k \in 2\mathbb{Z} + 1$.

O receptor realiza a seguinte equalização linear:

$$\mathbf{y} = c\mathbf{B}_{m'} \mathbf{y}' \quad (5a)$$

$$= \mathbf{B}_{m'} \mathbf{H}'_{m'} \mathbf{x} + c\mathbf{B}_{m'} \mathbf{z}' \quad (5b)$$

Considere que o receptor deseja obter N combinações lineares dos M' símbolos M_q -QAM transmitidos pelas cadeias de RF. Os coeficientes dessas combinações lineares devem ser inteiros gaussianos, de tal forma que

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_{m'} \mathbf{x} + \mathbf{z}, \quad (6)$$

sendo $\mathbf{z} = (\mathbf{B}_{m'} \mathbf{H}'_{m'} - \mathbf{A}_{m'}) \mathbf{x} + c\mathbf{B}_{m'} \mathbf{z}'$ o ruído efetivo após a equalização e $\mathbf{A}_{m'} \in \mathbb{Z}[i]^{N \times M'}$ a matriz de coeficientes inteiros gaussianos de combinação linear.

Da teoria de receptores lineares com forçagem a inteiros [9], a partir de uma matriz de coeficientes inteiros $\mathbf{A}_{m'}$ conhecida e um canal fixo $\mathbf{H}'_{m'}$ também conhecido no receptor, o equalizador ótimo que minimiza a norma do ruído efetivo na Equação (6) é

$$\mathbf{B}_{m'}^\circ(\mathbf{A}_{m'}, \mathbf{H}'_{m'}) = \arg \min_{\mathbf{B}_{m'}} \|\mathbf{z}\|^2 \quad (7a)$$

$$= \mathbf{A}_{m'} \mathbf{H}'_{m'}{}^H \left(\text{SNR}^{-1} \mathbf{I}_N + \mathbf{H}'_{m'} \mathbf{H}'_{m'}{}^H \right). \quad (7b)$$

Assumindo o uso do equalizador ótimo, a escolha de $\mathbf{A}_{m'}$ para minimizar o ruído efetivo resultante da equalização depende tanto do canal equivalente $\mathbf{H}'_{m'}$ quanto da SNR. Conforme explicado no trabalho [10], é possível obter $\mathbf{A}_{m'}$ usando esses parâmetros como entrada de algoritmos de redução de base de reticulado, tais como o de Lenstra–Lenstra–Lovász (algoritmo LLL).

Um caso particular da equalização linear com forçagem a inteiros é o equalizador de inversão de canal. Observe que se a combinação desejada for $\mathbf{A}_{m'} = \mathbf{I}_{M'}$, a matriz $\mathbf{B}_{m'}^\circ$ resume-se ao equalizador MMSE para canais MIMO - uma inversão do canal efetivo. Quando $\text{SNR} \rightarrow \infty$, o equalizador MMSE aproxima-se do equalizador de forçagem-a-zero ($\mathbf{B}_{m'}^\circ \mathbf{H}'_{m'} = \mathbf{I}_{M'}$).

IV. DETECÇÃO PARA SU-GSM COM AUXÍLIO DE FORÇAGEM A INTEIROS

Nesta seção propomos uma detecção de baixa complexidade auxiliada por equalização linear

que explora a característica de inteiros gaussianos das constelações QAM em conjunto com a equalização baseada em forçagem a inteiros.

Considere que o receptor possui uma estimação $\mathbf{H}'_{m'}$ do canal efetivo e $m' \neq m$. Sem perda de generalidade, suponha que o receptor deseja fazer a equalização MMSE para uma alta SNR (forçagem-a-zero).

Da Seção III, observe que ao calcular o equalizador $\mathbf{B}_{m'} \triangleq \mathbf{B}_{m'}^{\circ}(\mathbf{A}_{m'}, \mathbf{H}'_{m'})$ usando a Equação (7), tem-se que $\mathbf{B}_{m'} \mathbf{H}'_{m'} \neq \mathbf{I}_{M'}$, pois o equalizador considerou um canal efetivo diferente do verdadeiro. Portanto a equalização linear depende da detecção correta do símbolo espacial.

Inicialmente, considere um cenário com ruído efetivo nulo ($\mathbf{z} = \mathbf{0}_{M'}$). Para uma matriz $\mathbf{A}_{m'}$ genérica, o vetor \mathbf{y} da Equação (6) terá em cada elemento uma combinação linear com coeficientes inteiros dos símbolos no vetor \mathbf{x} .

Assuma que cada elemento de \mathbf{x} seja um ponto de um reticulado Λ . Por exemplo, observe que a constelação QAM M' -dimensional é um subconjunto do reticulado retangular de gaussianos inteiros com componentes I e Q pares deslocado da origem de uma constante $d = 1 + 1i$ (para ajuste de potência). Ou seja, $\mathbf{x}(k) \in \Lambda$ para $k = 1, \dots, M'$ e $\Lambda = 2\mathbb{Z}[i]$.

Nesse caso, com ruído efetivo nulo, tem-se que $\mathbf{y} \in \Lambda$, uma vez que combinações lineares com coeficientes inteiros de pontos de um reticulado geram outros pontos do mesmo reticulado.

Levando em consideração um ruído efetivo não-nulo ($\mathbf{z} \neq \mathbf{0}_{M'}$), pode-se então quantizar o vetor \mathbf{y} sobre o reticulado M' -dimensional $\Lambda_{M'}$ para obter a combinação linear mais próxima da posição de \mathbf{y} usando um operador de quantização $\mathcal{Q}_{\Lambda_{M'}}(\cdot)$.

A estratégia original de forçagem a inteiros envolve códigos sobre reticulados. Na ausência de código, pode-se estimar os símbolos de \mathbf{x} diretamente da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{m'}^{-1} \mathcal{Q}_{\Lambda_{M'}}(\mathbf{y}) - d \quad (8a)$$

$$\mathbf{x}'_{m'} = c^{-1} \hat{\mathbf{x}}. \quad (8b)$$

Assim, a decisão do detector fica

$$(\hat{\mathbf{x}}', \hat{m}) = \arg \min_{\mathbf{x}'_{m'}, m'} \|\mathbf{y}' - \mathbf{H}'_{m'} \mathbf{x}'_{m'}\|^2. \quad (9)$$

A complexidade de detecção é da ordem da cardinalidade da constelação espacial, ou seja,

$\mathcal{O}(|\mathcal{M}|)$. Desprezando as operações lineares matriciais, a redução de complexidade $G_{\mathcal{O}}$ (em termos de busca exaustiva) é

$$G_{\mathcal{O}} = \frac{|\mathcal{X}||\mathcal{M}| - |\mathcal{M}|}{|\mathcal{X}||\mathcal{M}|} = 1 - \frac{1}{|\mathcal{X}|}. \quad (10)$$

Em [9] é mostrado que a estratégia de forçagem-a-inteiros com códigos sobre reticulados aninhados possui limitantes de taxas alcançáveis superiores aos limitantes do caso particular da equalização MMSE. Isso ocorre devido à minimização do ruído efetivo através de uma aproximação mais adequada do canal equivalente pela matriz $\mathbf{A}_{m'}$.

Entretanto, note que a estimação de $\mathbf{x}'_{m'}$ depende do cálculo de $\mathbf{B}'_{m'}$ e $\mathbf{A}_{m'}$ para os valores de $m' = 0, 1, \dots, 2^{b_{\text{sm}}} - 1$. Embora a detecção com IF seja bastante simples em comparação à detecção ML, encontrar a matriz $\mathbf{A}_{m'}$ ótima (que minimiza o ruído efetivo) pode ter complexidade muito alta (a matriz ótima pode inclusive necessitar de busca exaustiva em alguns cenários).

O caso para detecção com equalização MMSE é obtido considerando a escolha $\mathbf{A}_{m'} = \mathbf{I}_{M'}$.

V. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção apresentamos resultados numéricos de simulação para o desempenho em termos de taxa de erro de bit (BER). Foram realizadas simulações de Monte Carlo para a taxa de erro de símbolos em função da SNR, com critério de parada de 500 erros de símbolo. Em todas as simulações foi usada a modulação 4-QAM.

Todos os coeficientes de desvanecimento dos canais MIMO são modelados com desvanecimento plano, ou seja, possuem norma dada pela distribuição Rayleigh, com $E[\|h_{ij}\|^2] = 1$ para qualquer elemento i, j da matriz de canal.

Os métodos de detecção comparados são a detecção de máxima verosimilhança (ML), detecção com forçagem a inteiros (IF) e detecção com equalizador MMSE (MMSE).

A Figura 1 mostra as curvas de BER para todos os métodos de detecção. Foram simulados dois cenários de modulação espacial, com a configurações de antenas $(M, M', N) = (8, 4, 4)$ e $(M, M', N) = (8, 6, 6)$. É possível observar que as detecções propostas possuem perda do grau de

diversidade em relação às detecções ML. Entretanto, podemos observar pela Tabela I que o grau de complexidade da detecção com equalização linear é muito menor do que o da detecção ML - em especial considerando o caso com o maior número de antenas $M' = 6$. A degradação de desempenho para uma BER de 10^{-3} é apresentada na última coluna da Tabela pela variável L_{dB} .

Observa-se ainda que o desempenho da detecção IF não apresenta muita diferença do seu caso particular MMSE. Isso é justificado pelo fato de o esquema não possuir código sobre reticulados e realizar diretamente a detecção dos símbolos.

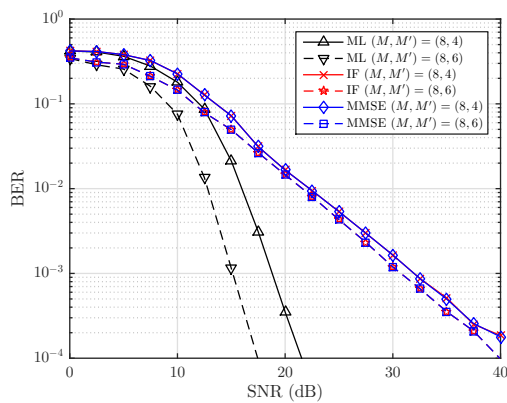


Fig. 1. BER para constelação digital 4-QAM e dois cenários de modulação espacial: $(M, M') = (8, 4)$ ($b_{sm} = 6$ bits) e $(M, M') = (8, 6)$ ($b_{sm} = 4$ bits).

TABELA I

SÍNTESE DOS RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES.

Tupla (M_q, M, M')	$ \mathcal{X} $	$ \mathcal{M} $	$ \mathcal{X} \times \mathcal{M} $	$G_O(\%)$	$L_{dB} @ BER=10^{-3}$
(4, 8, 4)	256	70	17920	99.61	13,10
(4, 8, 6)	4096	28	114688	99.98	15,40

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi analisada a equalização linear e detecção de baixa complexidade para transmissão entre um usuário e a estação radio-base usando GSM. Foi proposto um esquema de detecção com equalização linear baseado na técnica de forçamento a inteiros que consegue identificar tanto o símbolo espacial quanto os símbolos de modulação digital com grau de complexidade bastante reduzido em relação à detecção de máxima verossimilhança. O custo da redução de

complexidade computacional de detecção é uma perda no grau de desempenho (em termos de taxa de erro de bit) e grau de diversidade da detecção.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq (306145/2013-8 e 400703/2014-9).

REFERÊNCIAS

- [1] Marco Di Renzo, Harald Haas e Peter M. Grant. "Spatial modulation for multiple-antenna wireless systems: a survey". Em: *Communications Magazine, IEEE* 49.12 (2011), pp. 182–191.
- [2] Marco Di Renzo, Harald Haas, Ali Ghayeb, Shinya Sugiura e Lajos Hanzo. "Spatial Modulation for Generalized MIMO: Challenges, Opportunities, and Implementation". Em: *Proceedings of the IEEE* 102.1 (jan. de 2014), pp. 56–103.
- [3] Ping Yang, Marco Di Renzo, Yue Xiao, Shaoguan Li e Lajos Hanzo. "Design Guidelines for Spatial Modulation". Em: *IEEE Communications Surveys & Tutorials* 17.1 (2015), pp. 6–26.
- [4] Abdelhamid Younis, Nikola Serafimovski, Raed Mesleh e Harald Haas. "Generalised spatial modulation". Em: *Signals, Systems and Computers (ASILOMAR), 2010 Conference Record of the Forty Fourth Asilomar Conference on*. IEEE, 2010, pp. 1498–1502.
- [5] Jinlin Fu, Chunping Hou, Wei Xiang, Lei Yan e Yonghong Hou. "Generalised spatial modulation with multiple active transmit antennas". Em: *GLOBECOM Workshops (GC Wkshps), 2010 IEEE*. IEEE, 2010, pp. 839–844.
- [6] Jintao Wang, Shuyun Jia e Jian Song. "Generalised Spatial Modulation System with Multiple Active Transmit Antennas and Low Complexity Detection Scheme". Em: *IEEE Transactions on Wireless Communications* 11.4 (abr. de 2012), pp. 1605–1615.
- [7] Yue Xiao, Zongfei Yang, Lilin Dan, Ping Yang, Lu Yin e Wei Xiang. "Low-Complexity Signal Detection for Generalized Spatial Modulation". Em: *IEEE Communications Letters* 18.3 (mar. de 2014), pp. 403–406.
- [8] Chunyang Wang, Peng Cheng, Zhuo Chen, Jian A. Zhang, Yue Xiao e Lin Gui. "Near-ML Low-Complexity Detection for Generalized Spatial Modulation". Em: *IEEE Communications Letters* 20.3 (mar. de 2016), pp. 618–621.
- [9] J. Zhan, B. Nazer, U. Erez e M. Gastpar. "Integer-Forcing Linear Receivers". Em: *IEEE Transactions on Information Theory* 60.12 (dez. de 2014), pp. 7661–7685.
- [10] C. Feng, D. Silva e F. R. Kschischang. "An Algebraic Approach to Physical-Layer Network Coding". Em: *IEEE Transactions on Information Theory* 59.11 (nov. de 2013), pp. 7576–7596.