

Grafos Reduzidos para Restrições Periódicas

Vilmar Silva, Daniel P. B. Chaves, Cecilio Pimentel

Resumo— Codificação conjunta permite corrigir erros e impedir a ocorrência de sequências problemáticas em sistemas digitais de armazenamento. Estes códigos são modelados por classes de sequências com restrições periódicas. Neste artigo mostramos como gerar grafos com número reduzido de estados para esta classe, um passo necessário para a construção dos codificadores. O método proposto pode ser aplicado a outras classes de sistemas dinâmicos simbólicos.

Palavras-Chave— Código modulador, codificação conjunta, grafos, sequências com restrições periódicas.

Abstract— Joint coding allows to correct errors and prevents the occurrence of problematic sequences in digital storage systems. These codes are modeled by a class of sequence with periodic restriction. In this article we show how to generate graphs with reduced number of states for this class, a necessary step for the construction of the encoders. The proposed method is general and can be applied to other classes of symbolic dynamic without the need for modification. The proposed method can be applied to other classes of symbolic dynamic systems.

Keywords— Modulation code, joint coding, graphs, sequences with periodic restriction.

I. INTRODUÇÃO

Sistemas digitais de armazenamento de dados empregam, em associação a códigos corretores de erro (CCE), códigos moduladores para evitar a ocorrência de sequências que degradam as operações de gravação e leitura de dados [1]. Um caso conhecido de códigos moduladores é a família de códigos binários (d, k) -RLL (*run-length limited*), em que o número mínimo de zeros entre uns consecutivos é d e o número máximo é k . O limiar superior tem como propósito evitar a perda de sincronismo, enquanto o limiar inferior mitiga interferência intersimbólica. Uma forma de caracterizar um código (d, k) -RLL é através da lista de palavras proibidas, que no caso $(1, 4)$ -RLL é $\{11, 00000\}$. Por poder ser caracterizado por um conjunto finito de palavras proibidas, a classe (d, k) -RLL é um caso particular de restrições de memória finita (SFT, *Shift of Finite Type*).

O avanço das técnicas digitais de armazenamento nas últimas décadas induziu o surgimento de novos códigos moduladores/restrição variantes no tempo. Ao contrário dos SFTs, em que as restrições são proibidas independentemente da posição na sequência, uma lista de palavras proibidas é associada a cada posição na sequência. Um caso de particular interesse prático é a família de códigos TMTR($j, j + 1$) (*Time-varying Maximum Transition Run codes*). Estes códigos limitam a ocorrência de uns consecutivos a j em posições ímpares e a $j + 1$ em posições pares [2], [3]. Estes códigos

são empregados em sistemas de equalização de alta ordem e resposta parcial, além de detectores de sequências de máxima verossimilhança. Também são utilizados para incrementar a distância de códigos, o que fazem ao eliminar padrões de bits que ocorrem majoritariamente quando há eventos erro. Versões generalizadas dos códigos TMTR permitem a limitação de sequências máximas de uns em mais de duas “fases” da sequência [4].

O emprego simultâneo de códigos moduladores e CCE requer a adoção de medidas para evitar que um deles inviabilize o outro. Na codificação, ao dispor o CCE após o código modulador, sequências de saída do transmissor poderão conter padrões proibidos. Por outro lado, na decodificação, ao dispor o código modulador antes do CCE, esse poderá propagar erros introduzidos no canal, com possível extrapolação da capacidade de correção do CCE [5]. A adoção de sistemas de codificação conjunta permitiram dirimir esses efeitos degeneradores [6]. A ideia é codificar uma sequência sem restrição em uma com restrições finitas em que certas posições são reservadas para o CCE. Nestas posições os bits podem ser alterados sem violar as restrições, portanto, um código sistemático insere nestas posições os bits de paridade. Identificada uma classe de códigos moduladores adequada para aplicação em codificação conjunta, fez-se necessário desenvolver métodos sistemáticos de representação desses códigos e de determinação dos codificadores. O segundo passo pode ser realizado através de procedimentos sistemáticos baseados na representação do código via grafos [7]. Uma técnica para determinação destes grafos foi apresentada em [8], inspirada em procedimentos voltados para SFTs.

Os códigos lineares abordados em [8], apesar de fidedignos ao proposto originalmente em [6], são casos particulares de restrições periódicas de memória finita (PFT, *Periodic Finite Type Shift Space*) [9]. Os PFTs permitem a descrição de sequências com restrições periódicas mais flexíveis que as tratadas em [8], permitindo a obtenção de códigos com maior taxa. Assim como descrito acima, faz-se necessário a determinação de grafos que representem o PFT para a posterior especificação do codificador. Neste trabalho empregamos o conceito de conjunto de restrição periódico [10] para determinação de grafos com número reduzido de estados para a classe de PFTs. O trabalho traz três contribuições: 1) Os conceitos de máscara e memória de restrições apresentados em [11] para SFTs são generalizados para PFTs; 2) A partir desses conceitos, demonstra-se que o algoritmo apresentado em [11] pode ser empregado para especificar os estados de um grafo reduzido do PFT; 3) A partir do conjunto de estados, descreve-se o procedimento para a geração de um grafo reduzido do PFT e demonstra-se a consistência do processo. Esta proposta herda as vantagens inerentes ao procedimento descrito em [11], a saber, obtém-se um grafo com número reduzido de estados.

V. Silva, Departamento de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba-PB, Brasil, E-mail: vilmarvazsilva@gmail.com. D. Chaves e C. Pimentel, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil, E-mails: daniel.chaves@ufpe.br, cecilio@ufpe.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq e pela FACEPE.

A seguir, a Seção II traz os conceitos preliminares e define-se notação. A Seção III define máscara e memória de restrição para PFTs. A Seção IV demonstra como gerar os estados de grafo reduzido para PFTs, o que é exemplificado na Seção V com a construção do grafo. A Seção VI traz as conclusões.

II. PRELIMINARES

Esta seção aborda conceitos essenciais para o trabalho e define a notação [10].

A. Dinâmica Simbólica

Seja $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto de todas as sequências bi-infinitas $x = \cdots x_{-2}x_{-1}x_0x_1\cdots$ de símbolos de um alfabeto finito \mathcal{A} . Uma sequência finita de símbolos consecutivos de \mathcal{A} é chamada uma palavra. Dizemos que uma palavra \mathbf{w} é um fator de um ponto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ se existem inteiros $i \leq j$, tais que $\mathbf{w} = x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \cdots x_j$. Escreve-se $\mathbf{w} \prec_i x$ para enfatizar que \mathbf{w} é um fator de x iniciando no índice i . O comprimento de \mathbf{w} é $|\mathbf{w}| = j - i + 1$. O conjunto de todas as palavras sobre \mathcal{A} incluindo a palavra nula ε , que satisfaz $\mathbf{w}\varepsilon = \varepsilon\mathbf{w} = \mathbf{w}$, é \mathcal{A}^* . A aplicação deslocamento $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é definida por $\sigma(x) = y$ com $y_i = x_{i+1}$. Denota-se por σ^k ($k > 0$) a composição de σ por ela mesma k -vezes. Um SS (Sistema Dinâmico Simbólico) $X = X_{\mathcal{F}}$ é um subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ consistindo de todos os pontos não contendo fatores no conjunto \mathcal{F} , por isso, denominado conjunto de palavras proibidas.

A linguagem de X é o conjunto de todas as palavras que ocorrem em pontos de X , incluindo a palavra vazia ε . Emprega-se a notação L ou $\mathcal{B}(X_{\mathcal{F}})$ para esse conjunto, preferencialmente a última quando é preciso enfatizar o SS. O contexto à direita de uma palavra \mathbf{w} , denotado por $F(\mathbf{w})$, é o conjunto de todas as palavras em L que podem seguir \mathbf{w} , isto é, $F(\mathbf{w}) = \{\mathbf{u} \in L : \mathbf{w}\mathbf{u} \in L\}$. Duas palavras \mathbf{w}, \mathbf{u} com o mesmo contexto são ditas equivalentes, ou seja, $F(\mathbf{w}) = F(\mathbf{u})$. Seja $\mathbf{u} \in \mathcal{A}^*$, o conjunto de prefixos de \mathbf{u} é definido como $\mathcal{P}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \mid \exists \mathbf{t} \in \mathcal{A}^* \text{ com } \mathbf{v}\mathbf{t} = \mathbf{u}\}$, como uma extensão natural, se $M \subseteq \mathcal{A}^*$ então $\mathcal{P}(M) = \bigcup_{\mathbf{u} \in M} \mathcal{P}(\mathbf{u})$. Similarmente, o conjunto de sufixos de \mathbf{u} é definido como $\mathcal{S}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \mid \exists \mathbf{t} \in \mathcal{A}^* \text{ com } \mathbf{t}\mathbf{v} = \mathbf{u}\}$ e para um subconjunto arbitrário M de \mathcal{A}^* , $\mathcal{S}(M) = \bigcup_{\mathbf{u} \in M} \mathcal{S}(\mathbf{u})$. Observe que $\mathbf{u} \in \mathcal{P}(\mathbf{u}), \mathcal{S}(\mathbf{u})$, pois, $\varepsilon \in \mathcal{A}^*$ e $\mathbf{u}\varepsilon = \varepsilon\mathbf{u} = \mathbf{u}$; daí, os conjuntos dos prefixos e sufixos próprios de \mathbf{u} são dados, respectivamente, por $\mathcal{P}(\mathbf{u}) \setminus \{\mathbf{u}\}$ e $\mathcal{S}(\mathbf{u}) \setminus \{\mathbf{u}\}$. A extensão de uma palavra $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^*$ por outra palavra $\mathbf{v} \in \mathcal{A}^*$ é $\mathbf{w}\mathbf{v}$. Dados dois conjuntos $B_1, B_2 \subseteq \mathcal{A}^*$, define-se $B_1 B_2^{-1} = \{\mathbf{w}_1 \in \mathcal{A}^* \mid \mathbf{w}_1 \mathbf{w} \in B_1 \text{ para } \mathbf{w} \in B_2\}$ e $B_1^{-1} B_2 = \{\mathbf{w}_2 \in \mathcal{A}^* \mid \mathbf{w}\mathbf{w}_2 \in B_2 \text{ para } \mathbf{w} \in B_1\}$.

B. Grafos Rotulados

Dados \mathcal{V} um conjunto de vértices, \mathcal{E} um conjunto de ramos e $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ uma função de rotulação, então $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{L})$ é um grafo rotulado, doravante chamado grafo. As funções $i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ e $t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ especificam o vértice inicial e o vértice final de um ramo, respectivamente. Um caminho em G é uma sequência de ramos $\pi = e_1 e_2 \cdots e_n$, tal que, o vértice

terminal de e_i é o vértice inicial de e_{i+1} . O rótulo de π é a palavra $\mathcal{L}(\pi) = \mathcal{L}(e_1) \mathcal{L}(e_2) \cdots \mathcal{L}(e_n)$. Um percurso em G é uma sequência bi-infinita de ramos $\xi = \cdots e_{-1} e_0 e_1 \cdots$ tal que $t(e_i) = i(e_{i+1})$ para todo i . Uma palavra $\mathbf{w} \in L$ é gerada por um caminho π em G se $\mathbf{w} = \mathcal{L}(\pi)$. Um sistema dinâmico simbólico X é representada por G , ou G é uma apresentação de X , se o rótulo de todo percurso em G é um elemento de X , com o contrário também verdadeiro. Assim como os fatores dos pontos em X formam uma linguagem, os rótulos dos caminhos em G também, sendo denominada por $\mathcal{B}(G)$. O conjunto de todas as palavras, de comprimento arbitrário, geradas a partir de caminhos em G que começam em I é o contexto de I , representado por $F(I)$. Dois vértices I, J são equivalentes se $F(I) = F(J)$. Um grafo G é reduzido se para todo $I, J \in \mathcal{V}$, então $F(I) = F(J)$ implica que $I = J$. O grafo de contextos é um grafo rotulado onde o conjunto de vértices é associado aos possíveis conjuntos de contextos, ou seja, $\mathcal{V} = \{F(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in L\}$. Como demonstrado em [11], dado o conjunto de palavras proibidas mínimo de um SFT, denotado por \mathcal{O} , o grafo de contexto pode ser determinado através de um algoritmo de complexidade linear com a cardinalidade do conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$. Tal procedimento é baseado na definição de conjunto de restrição, $\mathcal{C}(\mathbf{w})$, de uma palavra $\mathbf{w} \in L$, que é definido como o conjunto com menor número de palavras em L , tal que, para todo $\mathbf{v} \in L$, se $\mathbf{w}\mathbf{v} \notin L$ então existe $\mathbf{u} \in \mathcal{P}(\mathbf{v})$ com $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbf{w})$ [11]. Na próxima seção esse conceito é descrito para a classe dos PFTs.

C. PFT

Seja T um inteiro positivo chamado período e $\mathcal{F} = \{\mathbf{w}_1^{(k_1)}, \mathbf{w}_2^{(k_2)}, \dots, \mathbf{w}_n^{(k_n)}\}$ uma coleção finita de palavras em \mathcal{A}^* indexadas com inteiros $k_i \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ os quais serão denominados de fases. Chamamos o conjunto \mathcal{F} de conjunto proibido periódico. As restrições associadas a uma fase k são denotadas por $\mathcal{F}^{(k)} = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w}^{(n)} \in \mathcal{F} \text{ e } n = k\}$. O PFT $X = X_{\{\mathcal{F}, T\}}^{\mathcal{A}}$ é definido como o conjunto de todas as sequências bi-infinitas x sobre o alfabeto \mathcal{A} tal que existe algum inteiro $k \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ com a propriedade:

$$\mathbf{w} \prec_i \sigma^k(x), \forall i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbf{w} \notin \mathcal{F}^{(i \bmod T)}.$$

Quando não existir confusão sobre o alfabeto utilizado, podemos usar a notação mais simples $X_{\{\mathcal{F}, T\}}$ para representar o PFT. É importante perceber que um PFT $X_{\{\mathcal{F}, T\}}$ com período $T = 1$ é simplesmente um SFT. Seja $\mathcal{L}_x \subseteq \{0, \dots, T-1\}$ o conjunto de deslocamentos de um ponto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $\forall i \in \mathbb{Z}$ e $\ell_x \in \mathcal{L}_x$, se $\mathbf{v} \prec_i \sigma^{\ell_x}(x)$ então $\mathbf{v} \notin \mathcal{F}^{(i \bmod T)}$. A linguagem associada a fase k é $L^{(k)} = \{\mathbf{u} \prec_j \sigma^{\ell_x}(x) \mid x \in X_{\{\mathcal{F}, T\}}, \ell_x \in \mathcal{L}_x \text{ e } j \equiv k \bmod T\}$. Usaremos a notação mais simples $\mathbf{w}^{(k)}$ quando queremos dizer que $\mathbf{w} \in L^{(k)}$. Quando $\mathbf{w} \notin L^{(k)}$ então $\mathbf{w}^{(k)}$ não está definida, que não impede $\mathbf{w} \in L$, uma vez que esta pode pertencer a uma linguagem $L^{(j)}$ com $j \neq k$. A linguagem L de um PFT é $L = \bigcup_{k \in \{0, \dots, T-1\}} L^{(k)}$. Dizemos que $\mathbf{s}^{(j)}$ é um fator de $\mathbf{w}^{(k)}$ se $\mathbf{s} \prec_t \mathbf{w}$ e $j \equiv k + t \bmod T$. Se $\mathbf{s} \prec_0 \mathbf{w}$ então $\mathbf{s}^{(k)}$ é um prefixo de $\mathbf{w}^{(k)}$ (prefixo próprio se $|\mathbf{s}| < |\mathbf{w}|$). Quando $\mathbf{s} \prec_t \mathbf{w}$ e $k + t + |\mathbf{s}| \equiv k + |\mathbf{w}| \bmod T$ então $\mathbf{s}^{(k+t \bmod T)}$ é um sufixo de $\mathbf{w}^{(k)}$ (sufixo próprio se $t > 0$).

O conjunto mínimo periódico de palavras proibidas para um PFT é $\mathcal{O}_p = \{\mathbf{w}^{(k)}, k \in \{0, \dots, T-1\} \text{ e } \mathbf{w} = w_0 \dots w_n \mid \mathbf{w} \notin L^{(k)}, \text{ mas, todos os fatores próprios } \mathbf{u} \prec_i \mathbf{w} \text{ pertencendo a linguagem } L^{(k+i \bmod T)}\}$. O contexto à direita de $\mathbf{w} \in L$ associado a uma fase k é dado por $F(\mathbf{w}^{(k)}) = \{s \mid \mathbf{ws} \in L^{(k)}\}$. Caso \mathbf{w} não seja permitido na fase k , então para todo $s \in L$, $\mathbf{ws} \notin L^{(k)}$. Daí, para todo $\mathbf{w} \notin L^{(k)}$, segue que $F(\mathbf{w}^{(k)}) = \emptyset$.

Estabelecido o conceito de conjunto mínimo periódico, deste segue a descrição operacional para PFTs do conceito de conjunto de restrições apresentado na Seção II-B. O conjunto de restrições de uma palavra $\mathbf{w}^{(k)}$ associadas a um conjunto \mathcal{O}_p , denotado por $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$ é composto por dois conjuntos: $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)}) = \{s^{(0)} \mid \mathbf{ws}A^{-1} \in L^{(k \bmod T)} \text{ e existe } \mathbf{p} \in \mathcal{S}(\mathbf{w}) \setminus \{\varepsilon\} \text{ tal que } \mathbf{ps} \in \mathcal{O}_p^{(k+|\mathbf{w}|-|\mathbf{p}| \bmod T)}\}$ (conjunto de restrições dependentes) e $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)}) = \{\mathbf{u}^{(\ell)} \mid \forall s \in L \text{ tal que } \mathbf{u} \in \mathcal{S}(s) \setminus \{\varepsilon\} \text{ e } \mathbf{ws}A^{-1} \in L^{(k)} \text{ mas } \mathbf{ws} \notin L^{(k)}, \text{ com } \mathbf{u}^{(j)} \in \mathcal{O}_p \text{ e } j - k - |\mathbf{w}| \equiv \ell \bmod T\}$ (conjunto de restrições independentes). Observe que os dois conjuntos dependem da fase, contudo só $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$ depende efetivamente de \mathbf{w} .

Lema 1: ([10, Lema 4.2]) Se $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{u}^{(j)})$ então $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{u}^{(j)})$.

Teorema 1: ([10, Teorema 4.5]) Seja $\mathbf{w} \in L^{(k)}$ e $\mathbf{w}' \in L^{(j)}$, então $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}'^{(j)})$ se, e somente se, $F(\mathbf{w}^{(k)}) = F(\mathbf{w}'^{(j)})$.

Lema 2: ([10, Lema 4.6]) Para todo $\mathbf{w} \in L^{(k)}$, $\mathbf{u} \in L^{(j)}$ e $a \in \mathcal{A}$, se $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{u}^{(j)})$ então $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{wa}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{ua}^{(j)})$.

O teorema seguinte estabelece que o conjunto $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{O}_p A^{-1}) \cup \{\varepsilon^{(0)}, \dots, \varepsilon^{(T-1)}\}$ é a informação suficiente para identificar o conjunto de restrições de qualquer palavra na linguagem L de um PFT.

Teorema 2: ([10, Lema 4.7]) Seja L a linguagem de um PFT. Para todo $\mathbf{w} \in L^{(k)}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{v}^{(k+t \bmod T)})$, para $\mathbf{v}^{(k+t \bmod T)}$ o sufixo mais longo de $\mathbf{w}^{(k)}$ em \mathcal{W} .

Observação 1: Os elementos do conjunto de representantes devem ser interpretados como a informação mínima por fase, ou memória, para que as restrições de uma palavra sejam definidas. Assim, se uma palavra não possui sufixo entre os representantes não nulos, essa memória é a palavra nula. Portanto, faz-se necessário que o conjunto \mathcal{W} contenha palavras nulas para todas as fases.

Corolário 1: Seja L a linguagem de um PFT e seja $\mathbf{w} \in L^{(k)}$. Se $\mathbf{v}^{(l)}$ é o sufixo mais longo de $\mathbf{w}^{(k)}$ em \mathcal{W} , então $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{va}^{(l)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{wa}^{(k)})$ para $a \in \mathcal{A}$.

Demonstração: O resultado segue da aplicação do Teorema 2 seguido da aplicação do Lema 2. ■

III. MÁSCARA DE RESTRIÇÃO E MEMÓRIA DE RESTRIÇÃO DE PALAVRAS POR FASE NA LINGUAGEM DE UM PFT

Nesta seção os conceitos apresentados em [11] são estendidos para PFTs.

A. Máscara de restrição periódica

A máscara de restrição identifica através das marcas \square e \blacksquare a informação que um símbolo $a \in \mathcal{A}$ transmite sobre as restrições de uma palavra $\mathbf{w}^{(k)}$ na linguagem de um PFT.

Definição 1: Seja $\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$, onde \mathcal{O}_p é o conjunto mínimo periódico proibido de um PFT. Os elementos da máscara de restrição de $\mathbf{w}^{(k)}$, $\mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)}) \subset \mathcal{A} \times \{\square, \blacksquare\}$ satisfazem as seguintes propriedades:

- $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)}) \Leftrightarrow \mathbf{wa} \notin L^{(k)}, a \in \mathcal{A}$;
- $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)}) \Leftrightarrow \mathbf{wa} \in L^{(k)}$, para $a \in \mathcal{A}$ um prefixo próprio de $\mathbf{u}^{(0)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$;
- Se um símbolo $a \in \mathcal{A}$ não satisfaz as declarações anteriores, então não existe um par ordenado em $\mathcal{A} \times \{\square, \blacksquare\}$ com este símbolo.

Assim como no SFT, mantemos a estratégia de calcular a máscara de restrição das palavras mais curtas para as mais longas em \mathcal{W} . Primeiramente, determinam-se os $\mathbf{u}^{(l)} \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_p)$ tal que $\mathbf{wu}^{(k)} \notin L^{(k)}$, observando-se que $l \equiv k + |\mathbf{w}| \bmod T$. Se $|\mathbf{u}| = 1$, então $(\mathbf{u}, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, caso contrário $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, em que $a \in \mathcal{A}$ é sufixo de \mathbf{u} . Por fim, faz-se a inclusão dos elementos de $\mathcal{M}(\mathbf{v}^{(l)})$ em $\mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, para $\mathbf{v}^{(l)}$ sufixo próprio mais longo de $\mathbf{w}^{(k)}$ em \mathcal{W} , para elementos em \mathcal{A} ainda não presentes em pares de $\mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$. Como único caso relevante, não ocorrerá $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$ e $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{v}^{(l)})$, já que implicaria que $\mathbf{wa}^{(k)}$, um prefixo próprio em \mathcal{O}_p , possui como sufixo próprio um elemento em \mathcal{O}_p , o que contradiz a minimalidade deste conjunto.

B. Memória de restrição periódica

A seguir apresentamos a definição de memória de restrição de uma palavra $\mathbf{w} \in L$, onde L é a linguagem de um PFT.

Definição 2: Dado um PFT com linguagem L e uma palavra $\mathbf{w} \in L^{(k)}$, a memória de restrição de $\mathbf{w}^{(k)}$, denotada por $\mathcal{R}(\mathbf{w}^{(k)})$, é o sufixo mais longo de $\mathbf{w}^{(k)}$ em \mathcal{W} .

Segue do Teorema 2 que se $\mathbf{v}^{(l)} = \mathcal{R}(\mathbf{w}^{(k)})$ então $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{v}^{(l)})$. O cálculo da memória de restrição no caso periódico, levando em consideração a Definição 1 da máscara de restrição, exige também os mesmos quatro casos vistos [10], [11] para o SFT; porém, observando que para o segundo caso, em que $\mathbf{w}^{(k)} = \varepsilon^{(k)}$, tem-se que $\mathcal{R}(\varepsilon^{(k)}a) = \mathcal{R}(a^{(k)})$, para todo $0 \leq k < T$.

IV. ALGORITMO PARA PFTS

Nesta seção resumimos os passos do algoritmo proposto em [11] para obter os vértices de uma apresentação reduzida para um sistema dinâmico simbólico. O algoritmo cria sucessivas partições de \mathcal{W} até obter classes de palavras com o mesmo conjunto de restrições periódico. Este é baseado nos conceitos de máscara de restrição periódica e memória de restrição periódica, com o primeiro estabelecendo a primeira partição, enquanto o segundo estabelece recursivamente o refinamento desta pela aplicação do algoritmo de Moore. Quando o critério de parada é satisfeito, as classes de palavras em \mathcal{W} com mesmo contexto à direita por fase são obtidas. O pseudocódigo do algoritmo é apresentado em [11, Tabela 1]. A seguir descrevemos os seus três passos.

- **Passo 1.** Particionamento pela máscara de restrição periódica: Os elementos da partição inicial \mathcal{P}^1 são subconjuntos de \mathcal{W} cujas palavras possuem a mesma máscara de restrição periódica [11, *Definition 4*];
- **Passo 2.** Particionamento pela memória de restrição periódica: O algoritmo de Moore é aplicado de acordo com [11, *Definition 5*] para refinar as partições \mathcal{P}^k , $k \geq 1$;
- **Passo 3.** Critério de parada: O algoritmo termina quando refinamentos não são possíveis.

A Proposição 1 e o Teorema 3 estabelecem a consistência deste algoritmo para a classe dos PFTs.

Proposição 1: Em cada partição \mathcal{P}^k , as palavras em \mathcal{W} em classes distintas têm contextos à direita distintos.

Demonstração: A prova segue por indução. Para a partição \mathcal{P}^1 , sejam $\mathbf{u}^{(j)}$, $\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$ tais que $\mathcal{M}(\mathbf{u}^{(j)}) \neq \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$. Considere as possibilidades:

- Existe $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{u}^{(j)})$ tal que $(a, \square) \notin \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$. Segue da Definição 1 que $\mathbf{ua} \in L^{(j)}$ para $a \in \mathcal{A}$ um prefixo próprio de $\mathbf{v}^{(0)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$. Observe agora que $\mathbf{v}^{(0)} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$, caso contrário, teríamos $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, que é uma contradição.
- Existe $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{u}^{(j)})$ tal que $(a, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$. Pela Definição 1, $\mathbf{ua} \notin L^{(j)}$ e $a^{(0)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$. Observe que $a^{(0)} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$, caso contrário, teríamos $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, que é uma contradição. Portanto, nas duas possibilidades, temos $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)}) \neq \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$. Do Lema 1, $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{u}^{(j)}) \neq \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)})$ e, do Teorema 1, $F(\mathbf{u}^{(j)}) \neq F(\mathbf{w}^{(k)})$ e o resultado é válido para a partição inicial \mathcal{P}^1 no Passo 1.

Agora, assumamos que a afirmação é verdadeira para \mathcal{P}^k , $k \geq 2$. Sejam $\mathbf{u}^{(j)}$, $\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$ palavras na mesma classe em \mathcal{P}^k , mas em classes distintas em \mathcal{P}^{k+1} . Do Passo 3, isto ocorre porque existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{R}(\mathbf{ua}^{(j)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{wa}^{(k)})$ estão em classes distintas em \mathcal{P}^k . Pela hipótese de indução $\mathcal{R}(\mathbf{ua}^{(j)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{wa}^{(k)})$ possuem contextos à direita distintos e, portanto, $\mathbf{u}^{(j)}$ e $\mathbf{w}^{(k)}$ também possuem contextos à direita distintos. Logo, a proposição é válida para \mathcal{P}^{k+1} . ■

Teorema 3: O algoritmo proposto particiona \mathcal{W} em classes de palavras de contextos à direita equivalentes.

Demonstração: Empregando a Proposição 1, só precisamos demonstrar que na partição final as palavras em uma mesma classe possuem o mesmo contexto à direita. Suponha que $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}^{k+1}$ (condição de parada do algoritmo) e que existem palavras $\mathbf{u}^{(j)}$, $\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$ na mesma classe com contextos à direita distintos. Pelo Teorema 1 $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) \neq \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{u}^{(j)})$. Temos as possibilidades:

- Como o conjunto \mathcal{O}_p é finito, existe uma palavra $\mathbf{v} \in L$, $\mathbf{v} = v_1 v_2 \cdots v_n$ tal que $\mathbf{uv} \in L^{(j)}$, $\mathbf{wv} \in L^{(k)}$ mas, $\mathbf{uva} \notin L^{(j)}$ e $\mathbf{wva} \in L^{(k)}$ para algum $a \in \mathcal{A}$. Portanto, $(a, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathbf{wv}^{(k)}))$ e $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathbf{uv}^{(j)}))$. Daí, as memórias de restrição $\mathcal{R}(\mathbf{wv}^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{uv}^{(j)})$ devem pertencer a classes distintas em \mathcal{P}^1 .

Desde que \mathcal{P}^k e \mathcal{P}^{k+1} são iguais, então $\mathcal{R}(\mathbf{wv}_1^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{uv}_1^{(j)})$ estão na mesma classe em \mathcal{P}^k . Como consequência, $\mathcal{R}(\mathbf{wv}_1 v_2^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{uv}_1 v_2^{(j)})$ estão na mesma classe em \mathcal{P}^{k-1} . Em geral, $\mathcal{R}(\mathbf{wv}_1 v_2 \cdots v_i^{(k)})$

e $\mathcal{R}(\mathbf{uv}_1 v_2 \cdots v_i^{(j)})$ estão na mesma classe em \mathcal{P}^{k-i+1} . Finalmente, $\mathcal{R}(\mathbf{wv}^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{uv}^{(j)})$ devem pertencer a mesma classe em \mathcal{P}^{k-n+1} e isto é uma contradição, desde que $\mathcal{R}(\mathbf{wv}^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{uv}^{(j)})$ estão em classes distintas em \mathcal{P}^1 .

b) Suponha que $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$, mas $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)}) \neq \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{u}^{(j)})$. Assim, entre todos os elementos na diferença simétrica $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)}) \Delta \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{u}^{(j)})$, existe um $\mathbf{v}^{(l)}$ tal que $n = l + |\mathbf{v}|$ é mínimo. Sem perda de generalidade, suponha que $\mathbf{v}^{(l)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)})$. Portanto, existe $\mathbf{s} = s_1 s_2 \dots s_n$ tal que $\mathbf{v} \prec_l \mathbf{s}$, $\mathbf{wsA}^{-1} \in L^{(k)}$ e $\mathbf{ws} \notin L^{(k)}$. Conclui-se que $\mathbf{s} \in F(\mathbf{u}^{(j)})$, pois \mathbf{s} não é excluído por elementos em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$, já que este é igual a $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)})$, e isso implicaria que $\mathbf{v}^{(l')} \in \mathcal{O}_p$, $l' - k - |\mathbf{v}| \equiv l \pmod{T}$, é fator próprio de um outro elemento de \mathcal{O}_p ou que $\mathbf{wsA}^{(-1)} \notin L^{(k)}$, ambos são absurdos. Portanto, $\mathcal{R}(\mathbf{ws}_1 \dots s_{n-1}^{(k)})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{us}_1 \dots s_{n-1}^{(j)})$ estão em classes distintas em \mathcal{P}^1 , aplicando o raciocínio do item a), $\mathbf{w}^{(k)}$ e $\mathbf{u}^{(j)}$ também devem estar em classes distintas na partição final.

Logo, se $\mathbf{w}^{(k)}$ e $\mathbf{u}^{(j)}$ estão na mesma classe em \mathcal{P}^k , devemos ter $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(\mathbf{u}^{(j)})$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^i(\mathbf{u}^{(j)})$. Pelo Lema 1 temos $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{w}^{(k)}) = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}(\mathbf{u}^{(j)})$ e pelo Teorema 1 o resultado segue. ■

V. CONSTRUÇÃO DE UMA APRESENTAÇÃO REDUZIDA PARA PFTS

Nesta seção usamos o algoritmo apresentado na Seção IV para obter um grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{L})$ que é uma apresentação reduzida de um PFT.

Iniciamos definindo o conjunto \mathcal{V} , cujos elementos são as classes obtidas com o algoritmo apresentado na Seção IV. O conjunto de ramos do grafo, com os respectivos rótulos, é determinado a partir de \mathcal{V} como descrito a seguir.

Definição 3: Sejam $P_i \in \mathcal{V}$ e $\mathbf{w}^{(k)} \in P_i$. A relação $\delta : \mathcal{V} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$ é definida como:

$$\delta(P_i, a) = \left\{ P_j \mid \mathcal{R}(\mathbf{wa}^{(k)}) \in P_j \text{ para } a \in \mathcal{A} \text{ com } (a, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(P_i) \right\},$$

em que $\mathcal{M}(P_i) = \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$ para $\mathbf{w}^{(k)} \in P_i$. Observe que esta extensão do conceito de máscara está bem definida, já que pelo Passo 1 do algoritmo todas as palavras em uma mesma classe possuem a mesma máscara. Segue da Definição 3 e do Teorema 3 que o grafo G é determinístico, ou seja, dados ramos distintos $e_i, e_j \in \mathcal{E}$, se $i(e_i) = i(e_j)$ então $\mathcal{L}(e_i) \neq \mathcal{L}(e_j)$. Portanto, quaisquer caminhos distintos em G que partem de um mesmo vértice possuem rótulos distintos. Observe que palavras de mesmo contexto à direita quando estendidas por uma letra em \mathcal{A} geram palavras de mesmo contexto à direita. Disso, decorre do Teorema 2 e do Teorema 3 que a memória destas pertencem a mesma classe de \mathcal{W} , do que segue o determinismo de G .

Teorema 4: Seja $X = \mathcal{X}_{\{\mathcal{O}_p, T\}}$ um PFT. O grafo G é uma apresentação reduzida de X .

Demonstração: Mostraremos inicialmente que G é uma apresentação de $\mathcal{X}_{\{\mathcal{O}_p, T\}}$. Seja $\mathbf{v} = a_1 a_2 \dots a_n \in B(\mathcal{X}_{\{\mathcal{O}_p, T\}})$, logo \mathbf{v} pertence ao conjunto de contextos à

TABELA I
MÁSCARA DE RESTRIÇÃO PARA \mathcal{W} DO TMTR DO EXEMPLO 1

$\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$	$\mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$
$\varepsilon^{(0)}$	\emptyset
$\varepsilon^{(1)}$	\emptyset
$\varepsilon^{(2)}$	\emptyset
$1^{(0)}$	$\{(1, \square)\}$
$11^{(0)}$	$\{(1, \blacksquare)\}$

direita para alguma palavra em L . Segue do Teorema 2 que há $\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$ tal que $\mathbf{v} \in F(\mathbf{w}^{(k)})$. Suponha que $\mathbf{w}^{(k)} \in P_i$, como $\mathbf{w}a_1 \in L^{(k)}$, então $(a_1, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, portanto, há um ramo rotulado por a_1 de P_i para P_j em que $\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1^{(k)}) \in P_j$. De forma similar, $\mathbf{w}a_1a_2 \in L^{(k)}$, acarretando em $(a_2, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1^{(k)}))$ e, conseqüentemente, na existência de um ramo rotulado por a_2 de P_j para P_i , em que $\mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathbf{w}a_1^{(k)})a_2) \in P_i$. Seguindo esse processo, determina-se uma trajetória π em G tal que $\mathcal{L}(\pi) = \mathbf{v}$. Conclui-se que $F(\mathbf{w}^{(k)}) \subseteq F(P_i)$ e como, empregando o Teorema 2, a união dos conjuntos de contextos à direita das palavras em \mathcal{W} formam L , temos que $B(X_{\{\mathcal{O}_p, T\}}) \subset B(X_G)$.

Por outro lado, seja $\mathbf{v} = b_1b_2 \cdots b_m \in B(X_G)$, com \mathbf{v} iniciando em um vértice P_i com $\mathbf{w}^{(k)} \in P_i$. Vamos usar indução sobre m para provar que $\mathbf{v} \in F(\mathbf{w}^{(k)})$. Pela Definição 3 segue que $(b_1, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(P_i) = \mathcal{M}(\mathbf{w}^{(k)})$, ou seja, $\mathbf{w}b_1 \in L^{(k)}$ e o resultado é válido para $m = 1$. Suponha que o resultado é válido para todo $t \leq m-1$. Como $\mathbf{w}b_1 \cdots b_{m-1} \in L^{(k)}$ e G é determinístico, existe único estado P_j terminal de $\mathbf{w}b_1 \cdots b_{m-1}$. Se $\mathbf{w}b_1 \cdots b_m \notin L^{(k)}$, então $(b_m, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}(\mathbf{w}b_1 \cdots b_{m-1})) = \mathcal{M}(P_j)$ e, pela Definição 3 $\mathbf{v} \notin B(X_G)$ que é uma contradição. Logo, $\mathbf{v} \in F(\mathbf{w}^{(k)})$ e $B(X_G) \subset B(X_{\{\mathcal{O}_p, T\}})$. Portanto, G é uma apresentação do PFT caracterizada por $F(P_i) = F(\mathbf{w}^{(k)})$, $P_i \in \mathcal{V}$ e $\mathbf{w}^{(k)} \in P_i$. Por fim, o fato de G ser uma apresentação reduzida segue diretamente da Proposição 1 e do Teorema 3. ■

Exemplo 1: Seja $X_{\mathcal{O}_p}$ o PFT tal que $\mathcal{O}_p = \{111^{(0)}\}$ e $T = 3$. Temos que $\mathcal{O}_p\mathcal{A}^{-1} = \{\mathbf{w}^{(k)} \in L : \mathbf{w}a^{(k)} \in \mathcal{O}_p \text{ para } a \in \mathcal{A}\} = \{11^{(0)}\}$. Daí, $\mathcal{P}(\mathcal{O}_p\mathcal{A}^{-1}) = \{\varepsilon^{(0)}, 1^{(0)}, 11^{(0)}\}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{O}_p\mathcal{A}^{-1}) \cup \{\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}\} = \{\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, 1^{(0)}, 11^{(0)}\}$. Vamos utilizar o Passo 1 do algoritmo e determinar a partição inicial \mathcal{P}^1 . Observe que $\mathcal{M}(\varepsilon^{(0)}) = \mathcal{M}(\varepsilon^{(1)}) = \mathcal{M}(\varepsilon^{(2)}) = \emptyset$. Pela Descrição do conjunto de restrições periódicas, obtemos $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_p}^d(1^{(0)}) = \{11^{(0)}\}$. Como 1 é prefixo próprio de $11^{(0)}$, pelo item 2) da Definição 1, $(1, \square) \in \mathcal{M}(1^{(0)})$. Como o máximo sufixo próprio de $1^{(0)}$ em \mathcal{W} é $\varepsilon^{(1)}$ cuja máscara é vazia então, $\mathcal{M}(1^{(0)}) = \{(1, \square)\}$. Por outro lado, $111 \notin L^{(0)}$ e pelo item 1 da Definição 1, $(1, \blacksquare) \in \mathcal{M}(11^{(0)})$. Como o máximo sufixo próprio de $11^{(0)}$ em \mathcal{W} é $\varepsilon^{(2)}$ cuja máscara é vazia então, $\mathcal{M}(11^{(0)}) = \{(1, \blacksquare)\}$. As respectivas máscaras de restrição estão listadas na Tabela I.

Observando a Tabela I, segue que $\mathcal{P}^1 = \{P_1 = \{\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}\}, P_2 = \{1^{(0)}\}, P_3 = \{11^{(0)}\}\}$. Para o Passo 2, observe que $\mathcal{R}(\varepsilon^{(0)}1) = 1^{(0)} \in P_2$ enquanto que $\mathcal{R}(\varepsilon^{(1)}1) = \varepsilon^{(2)}$, $\mathcal{R}(\varepsilon^{(2)}1) = \varepsilon^{(0)} \in P_1$. Daí, P_1 deve ser particionado e temos a partição $\mathcal{P}^2 = \{P'_1 = \{\varepsilon^{(0)}\}, P'_2 = \{\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}\}, P'_3 =$

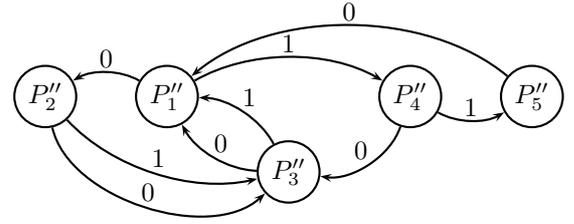


Fig. 1. Grafo reduzido do PFT apresentado no Exemplo 1.

$\{1^{(0)}\}, P'_4 = \{11^{(0)}\}\}$. Por fim, $\mathcal{R}(\varepsilon^{(1)}1) = \varepsilon^{(2)} \in P'_2$ e $\mathcal{R}(\varepsilon^{(2)}1) = \varepsilon^{(0)} \in P'_1$. Portanto, P'_2 deve ser particionado e temos a partição $\mathcal{P}^3 = \{P''_1 = \{\varepsilon^{(0)}\}, P''_2 = \{\varepsilon^{(1)}\}, P''_3 = \{\varepsilon^{(2)}\}, P''_4 = \{1^{(0)}\}, P''_5 = \{11^{(0)}\}\}$. Observe agora que refinamentos não são mais possíveis, o critério de parada no passo 3 é atingido, \mathcal{P}^3 é a partição mais fina e o grafo reduzido possui 5 estados. Por fim, utilizando a Definição 3 é possível reproduzir a apresentação dada na Fig. 1.

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi demonstrado que o algoritmo apresentado em [11] para a classe de SFTs pode ser aplicado a classe mais ampla de PFTs sem modificação, expandindo seu escopo de aplicação. Para tanto, foram introduzidos os conceitos de máscara e memória de restrições para PFTs e demonstrados uma série de resultados de corretude e consistência. Por fim, foi exemplificado o procedimento para a determinação de um grafo com número reduzido de estados para um PFT.

REFERÊNCIAS

- [1] D. Lind and B. H. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [2] B. E. Moision, et al., "Distance-enhancing codes for digital recording", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no.1, pp. 69-74, Jan. 1998.
- [3] R. Karabed, P. H. Siegel and E. Soljanin, "Constrained coding for binary channels with high intersymbol interference", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 45, no. 6, pp. 1777-1797, Sept. 1999.
- [4] T. L. Poo and B. H. Marcus, "Time-varying maximum transition run constraints", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 10, pp. 4464-4480, Oct. 2006.
- [5] D. P. B. Chaves and C. Pimentel, "Caracterização de Sequências com Restrições Periódicas", in *Revista de Tecnologia da Informação e Comunicação*, vol. 4, no.1, pp. 10-15, 2014.
- [6] A. Wijngaarden and K. S. Immink, "Maximum run-length limited codes with error control properties", *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 19, no. 4, pp. 602-611, Apr. 2001.
- [7] B. H. Marcus, R. M. Roth and P. H. Siegel, "Constrained systems and coding for recording channels", in *Handbook of Coding Theory*, V. Pless and W. Huffman, Eds. Amsterdam, The Netherlands: North Holland, 1998, vol. II, ch. 20, pp. 1635-1764.
- [8] M. P. Béal, et al., "Presentations of constrained systems with unconstrained positions", in *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 5, pp. 1891-1900, May 2005.
- [9] M. P. Béal, et al., "Periodic finite-type shifts spaces", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 6, pp. 3677-3691, 2011.
- [10] D. P. B. Chaves, *Representação de sistemas dinâmicos simbólicos de memória finita usando grafos*. Dissertação de Mestrado, UFPE, Recife, 2006.
- [11] D. P. B. Chaves and C. Pimentel, "On the Follower Set Graph of Shifts of Finite Type", in *Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, (Honolulu, HI, USA), pp. 1802-1806, 2014.
- [12] I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, Second Ed., Wiley, 1975.