

Análise do desempenho do método Dey-Mittra para Geometrias Bidimensionais em FDTD

Lucas Lobo Latorre Fortes e Sandro Trindade Mordente Gonçalves

Resumo—Neste trabalho estuda-se a precisão do método Dey-Mittra na otimização do método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD). Formula-se o Dey-Mittra (D-FDTD) para o contexto bidimensional (2D) e aplica-se o D-FDTD em um disco 2D de condutor elétrico perfeito (PEC) com diferentes discretizações. Analisa-se a precisão do D-FDTD para as situações aplicadas, avaliando sua queda de desempenho em discretizações muito pobres, interesse de sua aplicação.

Palavras-Chave—Dey-Mittra, FDTD, Otimização, Precisão.

Abstract—In this work the precision of the Dey-Mittra method of optimization of the Finite Difference Time Domain (FDTD) method is studied. The Dey-Mittra method (D-FDTD) is formulated into the two-dimensional (2D) context and the D-FDTD is applied to a 2D perfect electric conductor (PEC) disk with different discretizations. The precision of the D-FDTD for the applied situations is analyzed, evaluating its performance drop in very poor discretizations, interest of it's application.

Keywords—Dey-Mittra, FDTD, Optimization, Precision.

I. INTRODUÇÃO

O método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (*Finite-Difference Time-Domain* ou FDTD) é um método simples e robusto de simulação de propagação de ondas eletromagnéticas diretamente no domínio do tempo. O método é muito eficiente em simulações de elevado grau de complexidade quando a banda de frequências é larga.

A sua natureza de construção em malha com células cúbicas não aproxima adequadamente superfícies curvas, sendo necessário o uso de malhas extremamente densas em regiões de análise complexas ou a aplicação de métodos de modificação da malha.

Algumas geometrias 2D podem apresentar elevada complexidade na geometria e material sendo o FDTD uma ferramenta interessante a ser utilizada [1]-[4].

Dentro dos métodos de modificação de malha, diversas alternativas de modificação podem ser utilizadas e estas são amplamente descritas na literatura, como em [5], e exploradas em pesquisas, como em [6]-[11].

Para propostas que sugerem a alteração da geometria das células da própria malha, é possível uma melhor aproximação em relação ao uso de células originais [5]. Porém, esses métodos não são modificações na malha, mas sim uma construção diferente que, portanto, exigem um novo código de simulação. Embora avanços tenham sido feitos no intuito de mitigar a instabilidade inerente destes métodos, os empecilhos citados tornam a opção menos atrativa quando visa-se uma implementação prática e estável [12].

Nas propostas que sugerem a modificação das células ou da análise de malha localmente, a praticidade de adaptação dessas propostas em algoritmos de FDTD convencionais é um fator atrativo para utilização dessa abordagem [6]-[11]. O método desenvolvido por Supriyo Dey e Raj Mittra (Dey-Mittra ou D-FDTD) tem o grande atrativo de ser simples e muito eficiente sendo desenvolvido em formulação bidimensional [8] e [11]. Seu único inconveniente é a exigência de passos de tempos, ocasionalmente extremamente pequenos.

Neste trabalho, busca-se avaliar a aplicação do Dey-Mittra formulado para 2D em uma geometria canônica, um cilindro PEC, que no contexto 2D é convertido para um disco 2D. Observa-se o efeito na faixa de frequência escolhida (0,8 a 10 GHz) e o desempenho do método quando é realizada a alteração da discretização.

Na Seção II aborda-se sucintamente a formulação adotada para as equações do FDTD no contexto 2D. Na Seção III, apresentam-se as modificações de equação de atualização de campo que caracterizam o D-FDTD. Na Seção IV, apresentam-se os resultados obtidos para a aplicação do D-FDTD formulado via simulação programada e visualizada com auxílio do *software Matlab*®. Por fim, na seção V, são feitas as análises e discussões dos resultados obtidos.

II. FDTD BIDIMENSIONAL

A aplicação do FDTD para simulações 2D ou 2,5D (três dimensões, porém com uma delas significativamente maior que as demais e a área seção constante) é recorrente[1]-[3]. Sendo a geometria sob estudo passível de rotação axial, a análise da simulação apenas de uma seção reta da geometria é capaz de reproduzir resultados tridimensionais [1]-[3].

Esse artifício possibilita uma economia de processamento computacional ao remover a necessidade de uma terceira dimensão de análise. Além disso, a simulação 2D elimina uma parcela das componentes de campo calculadas para simular o espalhamento, fato que foi considerado no algoritmo de execução.

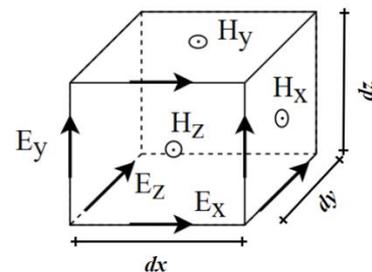


Fig. 1: Representação dos campos elétricos e magnéticos na Célula de Yee.

Conhecendo e modificando as próprias equações de Maxwell para a célula de Yee, apresentada na Figura 1, a formulação do FDTD pode ser reduzida para a formulação 2D onde uma das dimensões de célula (Δx , Δy ou Δz) deixa de participar no cálculo dos campos e é possível verificar o desacoplamento dos campos de modo transversal elétrico (TE) e transversal magnético (TM) [5] e [13].

Tomando como exemplo um caso onde apenas os campos do modo TE (E_x , E_y e H_z) são presentes (ilustrado nas células da Figura 2), as equações resultantes seriam (1), (2) e (3), onde Δt é o passo de tempo, α é um coeficiente de discretização e consideram-se a permissividade (ϵ_0), permeabilidade (μ_0) e condutividade do vácuo.

$$E_{x12}|^{n+\frac{1}{2}} \cong E_{x12}|^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\epsilon_0 \Delta t} \left(\frac{H_{z12}|^n - H_{z11}|^n}{\alpha \Delta y} \right) \quad (1)$$

$$E_{y21}|^{n+\frac{1}{2}} \cong E_{y21}|^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\epsilon_0 \Delta t} \left(\frac{H_{z21}|^n - H_{z11}|^n}{\alpha \Delta x} \right) \quad (2)$$

$$H_{z11}|^n \cong H_{z11}|^{n-1} + \frac{1}{\mu_0 \Delta t} \left(\frac{E_{x12}|^{n-\frac{1}{2}} - E_{x11}|^{n-\frac{1}{2}}}{\alpha \Delta y} - \frac{E_{y21}|^{n-\frac{1}{2}} - E_{y11}|^{n-\frac{1}{2}}}{\alpha \Delta x} \right) \quad (3)$$

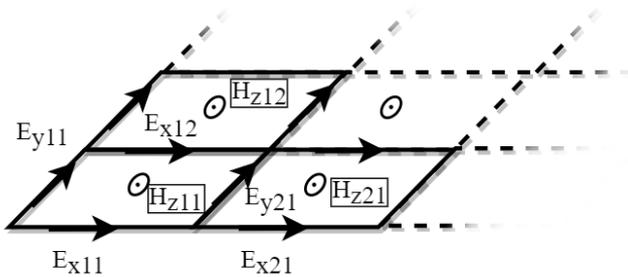


Fig. 2: Campos elétricos e magnéticos da Célula de Yee envolvidos na redução de dimensão explorada.

Para este trabalho, optou-se por simular um disco 2D de PEC de raio 30 mm estendido no eixo z (Figura 3). Foram utilizadas células de face quadrada ($\Delta x = \Delta y$) com aresta de 1,5 mm no algoritmo desenvolvido por Kunz em [13]. O algoritmo em questão utiliza uma formulação de solução de onda plana analítica para um pulso gaussiano e fronteiras absorventes Mur de segunda ordem.

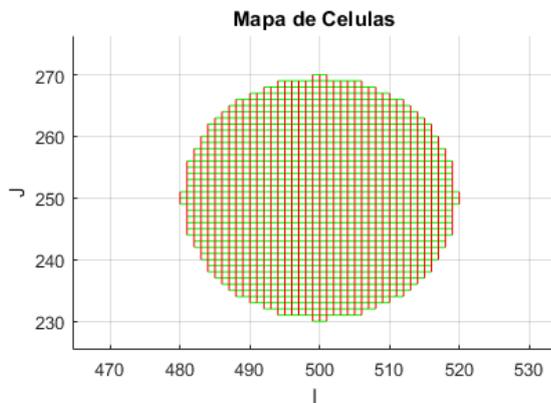


Fig. 3: Simulação inicial para cilindro 3D desenhada em *Matlab*. Eixos do gráfico indicam os valores de células em cada eixo.

O algoritmo foi modificado para a configuração 2D descrita ($\Delta z = 100\text{km}$) com onda plana incidente de pulso gaussiano e, então, efetuaram-se as simulações para a análise comparativa.

A geometria proposta apresenta 1000 e 500 células nos eixos x e y de, respectivamente.

Modificou-se o valor de α para valores entre dez sétimos e dez terços, reduzindo a discretização da geometria a uma densidade de 70% a 30% da geometria original. A quantidade de células utilizadas em cada simulação de discretização reduzida é apresentada na Tabela I. As modificações remanescentes entram no mérito da aplicação do D-FDTD, descrito na Seção III.

TABELA I. RESULTADOS OBTIDOS COM O FDTD PARA DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES

Alpha (α)	10/3	10/5	10/6	10/7	1
Discretização [%]	9	25	36	49	100
Celulas em x	300	500	600	700	1000
Celulas em y	150	250	300	350	500

III. FORMULAÇÃO D-FDTD

A proposta do D-FDTD, tanto no contexto bidimensional quanto tridimensional, é de possibilitar a redução da discretização, diminuindo o tempo de simulação sem degradar a precisão dos resultados, como foi documentado em [11]. Tendo em vista essa proposta, é interessante uma exploração do método para aplicação no contexto bidimensional.

A modificação proposta pelo método D-FDTD em [8] e [11] implica na alteração local do cálculo das componentes magnéticas das equações de Maxwell na célula de Yee quando o material do local é PEC. Os campos envolvidos para o caso explorado nesse artigo são os campos de modo TE, apresentados na Figura 4 para ilustração do D-FDTD.

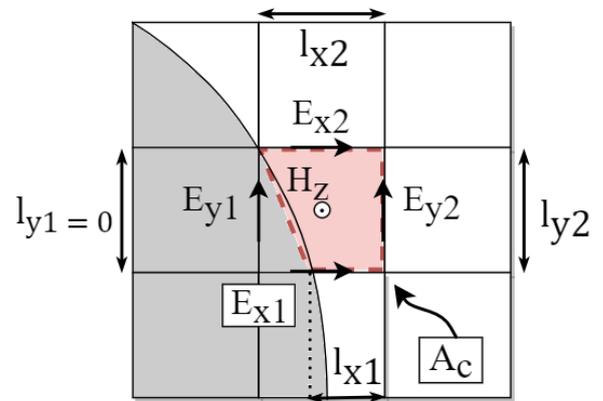


Fig. 4: Campos elétricos e magnéticos envolvido na modificação proposta pelo D-FDTD.

Nas células onde ocorrem interseções de PEC com o vácuo, leva-se em consideração a parcela de ar presente em cada uma das células, contabilizando a área da célula (A_c) preenchida por ar e ajustando um coeficiente de comprimento das arestas de células interceptadas proporcional à parte da aresta imersa em ar (l_x e l_y), como ilustrado na Figura 4. No caso de arestas completamente imersas, o coeficiente pode ser zerado para garantir que o não exista uma propagação de campo dentro do PEC.

Esses valores são utilizados apenas nas equações de cálculo de campo magnético, formulando novas equações de campo que, para o caso bidimensional TE, é apenas da componente H_z descrita por (4) de maneira similar a (3).

$$H_{z1}|^n \cong H_{z1}|^{n-1} + \frac{1}{\mu_0 A_c \Delta t} \left(\frac{l_{x2} E_{x2}|^{n-\frac{1}{2}} - l_{x1} E_{x1}|^{n-\frac{1}{2}}}{\alpha \Delta y} - \frac{l_{y2} E_{y2}|^{n-\frac{1}{2}} - l_{y1} E_{y1}|^{n-\frac{1}{2}}}{\alpha \Delta x} \right) \quad (4)$$

Com base em estudos já feitos para garantir a estabilidade da aplicação do método de [8] e [11], relata-se que o critério de estabilidade de Courant, descrito por (5), deve ser modificado para que o valor de N_c seja menor que a unidade.

$$\frac{c \cdot \Delta t}{N_c} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \quad (5)$$

em que c é a velocidade da luz no vácuo e Δt o passo de tempo utilizado na simulação.

De acordo com o valor de N_c , as células interceptadas devem atender aos seguintes critérios: porcentagem de área preenchida por ar e razão de dimensão de célula.

O primeiro critério estabelece que para dado valor do número de Courant, existe um valor mínimo de área preenchida com ar para o qual a célula não insere energia capaz de tornar a simulação instável. O segundo critério estabelece que há um limite para a razão entre o maior comprimento (l_x e l_y) de uma célula interceptada e a área de ar A_c que a preenche.

Caso qualquer um dos critérios seja desrespeitado, a célula interceptada é preenchida completamente de PEC e os campos são calculados normalmente através de (3) considerando os parâmetros do PEC. Para um N_c de 0,5, o primeiro critério é limitado a uma área máxima de 1,5% e o segundo a uma máxima razão definida como 15 vezes a razão entre o maior comprimento de uma célula não interceptada (Δx ou Δy) e a área da célula interceptada (produto de Δx e Δy) [11].

O código de formulação do D-FDTD foi desenvolvido aproximando as áreas de ar das células interceptadas considerando o cálculo aproximado por um triângulo ou trapézio por célula, de acordo com a forma de interseção.

IV. RESULTADOS

Nesta seção, apresentam-se, primeiramente, os resultados observados em relação à aplicação do D-FDTD no disco de PEC e, em seguida, apresentam-se os resultados obtidos para os diferentes valores de α com e sem a influência do D-FDTD. As simulações são analisadas para os parâmetros de tempo de execução transcorrido, para avaliação do desempenho, e Erro Médio Quadrático (EMQ), para avaliação da precisão na faixa de frequência de interesse.

Os resultados obtidos foram amostrados em um ponto fixo, posicionado a 61,845 mm do centro do cilindro PEC e formando um ângulo de 164,25° com a direção de propagação da onda plana, que, na simulação, foi no sentido positivo do eixo x . O computador utilizador conta com um processador Intel(R) Core(TM) i5-7200U 2,70 GHz e 8 GB de RAM.

Para o estudo do desempenho do D-FDTD, simulou-se, primeiramente, o disco de PEC ilustrado na Figura 3 no FDTD 2D convencional (PEC 2D) para os diferentes valores de α propostos. Em seguida, fez-se o mesmo, porém agora com o Dey-Mittra aplicado.

Os resultados foram comparados com a solução analítica, deduzida em [14], para um campo TE incidindo normalmente na direção do eixo x em um cilindro infinitamente longo de PEC, situação onde é válida a análise do cilindro na forma 2D.

Reunindo os resultados obtidos, estes estão organizados e apresentados nas Tabelas II e III. Nestas, estão descritos a quantidade de passos de tempo considerados necessários para a reflexão completa do pulso incidente, o tempo de execução e o EMQ para cada simulação em função do coeficiente de discretização.

TABELA II. RESULTADOS OBTIDOS COM O FDTD PARA DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES

Alpha (α)	10/3	10/5	10/6	10/7	1
Discretização [%]	9	25	36	49	100
Passos de Tempo	360	600	720	840	1200
Tempo de Execução [s]	39,03	161,96	267,37	547,94	929,88
EMQ [10^{-6}]	2690,85	640,95	339,32	232,92	217,61

TABELA III. RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DO D-FDTD PARA DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES

Alpha (α)	10/3	10/5	10/6	10/7	1
Discretização [%]	9	25	36	49	100
Passos de Tempo	720	1200	1440	1680	2400
Tempo de Execução [s]	61,88	312,84	532,82	852,26	1796,34
EMQ [10^{-6}]	3642,1	410,286	160,121	541,500	56,405

Para avaliação e verificação visual dos resultados obtidos por conta da aplicação do D-FDTD, plotaram-se alguns gráficos para comparar determinadas situações interessantes para análise em vista dos valores obtidos nas Tabelas II e III.

Para a análise do efeito do D-FDTD com α unitário, as simulações da Figura 5 (PEC 2D e PEC D-FDTD) mostram o erro absoluto do parâmetro S_{11} de cada simulação em relação à solução analítica.

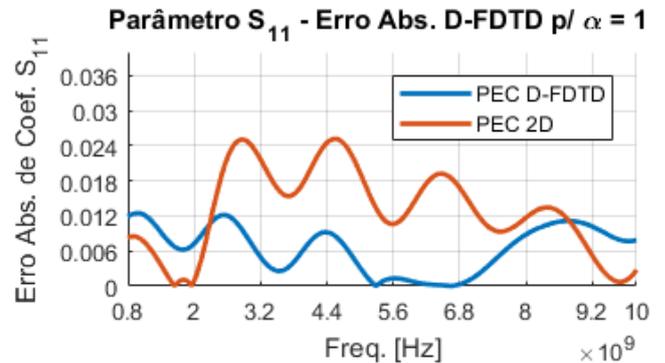


Fig. 5: Comparação do erro absoluto de S_{11} para as simulações com $\alpha = 1$ da geometria 2D proposta (em laranja) e com D-FDTD aplicado (em azul).

Para a análise do efeito do D-FDTD com diferentes valores de α , plota-se também, na Figura 6, o erro absoluto para os valores de “ $\alpha = 10/5$ ” e “ $\alpha = 10/6$ ” com D-FDTD para comparação com o FDTD convencional com valor de unitário de α . Os valores de α dessa comparação foram escolhidos propositalmente para análise em vista dos parâmetros avaliados neste trabalho.

Por fim, para análise individual do efeito da variação da discretização na aplicação do D-FDTD, plota-se o erro absoluto de S_{11} para três dos valores propostos, obtendo a Figura 7.

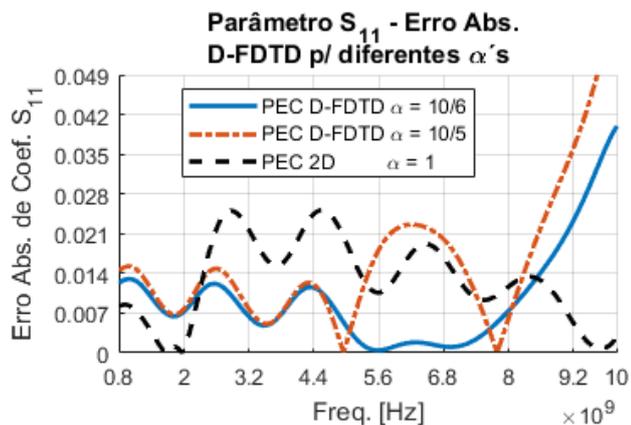


Fig. 6: Comparação dos erros absolutos de S_{11} obtidos para a geometria 2D proposta com α unitário (em azul) e com D-FDTD aplicado (em laranja) para valores de α selecionados.

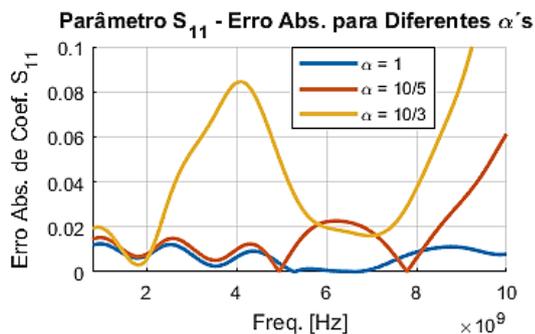


Fig. 7: Comparação dos erros absolutos de S_{11} obtidos para o D-FDTD. Utilizam-se alguns dos valores de α propostos para análise do comportamento com a variação da discretização.

V. DISCUSSÕES E CONCLUSÃO

Analisando os resultados obtidos na Seção IV, começa-se avaliando o efeito do D-FDTD nos resultados obtidos, comparando-se os parâmetros obtidos com e sem sua aplicação para diferentes valores de α .

Observando nas Tabelas II e III a quantidade de passos de tempo e os tempos de execução gastos, verifica-se que um padrão de proporcionalidade é mantido na maior parte dos casos, exceto no caso de “ $\alpha = 10/7$ ”. Esse padrão é, de certa forma, coerente por conta da modificação do número de Courant para 0,5, o que é necessário para aplicação do Dey-Mittra e, por sua vez, diminui o máximo passo de tempo limitado por (5).

Já no critério do EMQ, em dois dos cinco casos analisados a aplicação do D-FDTD não produziu uma melhora de resultados, apenas os piorou. Essa degradação ocorreu não só em relação à aplicação do Dey-Mittra como também em relação a casos com o Dey-Mittra aplicado com discretizações ainda menores. No caso, observa-se, por exemplo, a situação de D-FDTD com “ $\alpha = 10/7$ ”, que produziu um EMQ pior que o obtido com o FDTD convencional para o mesmo α e pior que os casos de D-FDTD com “ $\alpha = 10/5$ ” ou “ $\alpha = 10/6$ ”.

Dado que não foi observado um padrão no EMQ com as diferentes discretizações, como, por exemplo, resultados piores apenas nas discretizações muito pobres, destaca-se a necessidade de um estudo dedicado à validade e confiabilidade do método na melhora de resultados.

Ainda assim, de maneira geral, observa-se que o D-FDTD melhorou os parâmetros avaliados para determinados valores

de α , como pode ser visto na Tabela IV. A razão entre os EMQ’s menor que 100% indica uma melhora de resultado.

TABELA IV. COMPARAÇÃO DE EMQ’S PARA DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES

Alpha (α)	10/3	10/5	10/6	10/7	1
EMQ – FDTD Convencional [10^{-6}]	2690,85	640,95	339,32	232,92	217,61
EMQ-D – D-FDTD [10^{-6}]	3642,1	410,286	160,121	541,500	56,405
EMQ-D/EMQ [%]	135%	64%	47%	232%	26%

Voltando no gráfico plotado na Figura 5 para uma verificação visual dos resultados, confirma-se que a simulação “PEC D-FDTD” foi mais eficiente no rastreo da solução analítica em comparação com a simulação 2D original “PEC 2D”.

A simulação com o Dey-Mittra aplicado demandou um tempo de execução cerca de duas vezes maior, entretanto melhorou-se razoavelmente o EMQ obtido em relação à proposta de FDTD convencional, atendendo a proposta do método Dey-Mittra pelo menos para esse caso de uma mesma discretização. Entende-se, pelo resultado, que o D-FDTD foi corretamente formulado e produziu a melhora de resultados desejada.

Tendo em vista a proposta do D-FDTD, é interessante uma análise que seja coerente com sua proposta. Analisando os resultados da Figura 6 e das tabelas para os valores de α escolhidos para este caso, verifica-se que o D-FDTD com discretizações reduzidas conseguiu produzir resultados razoáveis quando comparado com o FDTD convencional.

Sua aplicação melhorou ora o tempo de simulação, ora ambos os parâmetros de validação. Porém, como comentado anteriormente, dado que essas melhoras não foram observadas em todos os casos, valida-se apenas parcialmente o D-FDTD formulado, pois não há garantia de melhoria de resultados.

Explorando, na Figura 7, o uso do D-FDTD para diferentes valores de discretização, tentou-se encontrar algum padrão no método formulado para justificar parte dos resultados discordantes do esperado. Verificou-se um desvio observado no extremo superior da faixa de análise (próximo a 10 GHz), indicando que o D-FDTD piorou o resultado da simulação conforme aumentou-se a dimensão das células.

De certa forma, o comportamento é plausível, tendo em vista que conforme a discretização diminui, a aproximação por um triângulo ou trapézio por célula pode gerar erros mais significativos quanto à contabilização parcela de ar efetivamente preenchida na célula. Plota-se a geometria construída para o “ $\alpha = 10/3$ ” na Figura 8 para verificar a curvatura enunciada do traçado de interseção nas células.

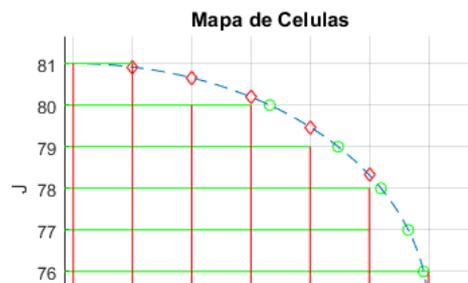


Fig. 8: Avaliação da discretização pobre na aproximação do disco de PEC por triângulos e trapézios inteiros.

Em síntese, verificou-se que o método atendeu sua proposta de melhora dos resultados obtidos em simulação ao contabilizar as parcelas de ar nos cálculos de atualização dos campos, sendo, assim, ferramenta útil para aplicação em simulações que utilizam PEC. Entretanto, a aplicação do Dey-Mitra apresentou alguns comportamentos não desejados e teve limitações quanto à discretização.

No caso da limitação por conta da discretização, seria de se esperar tal comportamento para uma aproximação por triângulos e trapézios em células maiores onde a geometria curva é mais pronunciada dentro da célula. É interessante uma abordagem mais precisa da contabilização das parcelas de ar para verificação da limitação do D-FDTD ou da necessidade de uma contabilização adequada das parcelas de ar em discretizações mais pobres.

AGRADECIMENTOS

Agradece-se aos financiadores parciais do projeto CNPq, Capes, FAPEMIG e CEFET-MG.

REFERÊNCIAS

- [1] M. N. Miskiewicz, S. Schmidt and M. J. Escuti, "A 2D FDTD Algorithm for Whole-Hemisphere Incidence on Periodic Media," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 62, no. 3, pp. 1348-1353, Março de 2014.
- [2] S. Van den Bulcke and A. Franchois, "A Full-Wave 2.5D Volume Integral Equation Solver for 3D Millimeter-Wave Scattering by Large Inhomogeneous 2D Objects," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 2, pp. 535-545, Feb. 2009.
- [3] H. Chanal, P. Borderies, J-P.Segaud, M. Saillard, "Computation of effective propagation parameters in the optical domain with a finite difference time domain method", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 100, Pp. 77-90, 2006.
- [4] A. Tsarev, "Modified effective index method to fit the phase and group index of 3D photonic wire waveguide," *Opt. Lett.* 38, 293-295, 2013.
- [5] A. Taflove, S.C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. 3. ed. Norwood, USA/MA: Artech House, 2005.
- [6] T. G. Jurgens, A. Taflove, K. Umashankar and T. G. Moore, "Finite-difference time-domain modeling of curved surfaces [EM scattering]," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, no. 4, pp. 357-366, Abril de 1992.
- [7] M. W. Steeds, S. L. Broschat and J. B. Schneider, "A comparison of two conformal methods for FDTD modeling," in *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 38, no. 2, pp. 181-187, May 1996.
- [8] S. Dey and R. Mittra, "A locally conformal finite-difference time-domain (FDTD) algorithm for modeling three-dimensional perfectly conducting objects," in *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 7, no. 9, pp. 273-275, Setembro de 1997.
- [9] Z. Noroozi, F. Hojjat-Kashani, "Three-Dimensional FDTD Analysis of the Dual-Band Implantable Antenna for Continuous Glucose Monitoring", *Progress In Electromagnetics Research Letters*, vol. 28, pp. 9-21, 2012.
- [10] W. Yu and R. Mittra, "A conformal FDTD software package modeling antennas and microstrip circuit components," in *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 42, no. 5, pp. 28-39, Outubro de 2000.
- [11] G. Waldschmidt and A. Taflove, "Three-dimensional CAD-based mesh Generator for the Dey-Mitra conformal FDTD algorithm," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 7, pp. 1658-1664, Julho de 2004.
- [12] V. Douvalis, Y. Hao and C. G. Parini, "Stable non-orthogonal FDTD method," in *Electronics Letters*, vol. 40, no. 14, pp. 850-851, Julho de 2004.
- [13] Kunz, K. S.; Luebbers, R. J. *The finite difference time domain method for electromagnetics*. CRC press, 1993.
- [14] C. A. Balanis. *Advanced engineering electromagnetics*. New York, Wiley, 1989.