

# Estimação Cega de Assinaturas Espaciais para Arranjos em Formato L Baseada em Modelagem Tensorial de Correlações Cruzadas

Paulo R. B. Gomes, André L. F. de Almeida e João C. M. Mota

**Resumo**— A estimação de assinaturas espaciais ou direção de chegada (do inglês, DoA - *Direction of Arrival*) é um problema chave em processamento de sinais em arranjos com aplicações em radar, sonar, comunicações móveis e outras. Neste artigo, propomos um método tensorial para resolver o problema de estimação cega de assinaturas espaciais. Considerando que um arranjo receptor em formato L é dividido em sub-arranjos menores, a decomposição de Tucker de um tensor de quarta ordem é formulada a partir da matriz de correlação cruzada dos dados recebidos nos diferentes sub-arranjos. Baseado nessa estrutura de ordem superior, o algoritmo iterativo proposto em [1] é adaptado para estimar de forma cega os ângulos de elevação e azimute dos sinais incidentes no arranjo em formato L. Os resultados de simulação obtidos mostram um melhor desempenho do método proposto quando confrontado com os algoritmos clássicos *Propagator Method* (PM), *Multiple Signal Classification* (MUSIC) e *Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Techniques* (ESPRIT).

**Palavras-Chave**— Processamento de sinais em arranjos, estimação de DoA, decomposição tensorial.

**Abstract**— Spatial signature or direction of arrival (DoA) estimation is a key problem in array signal processing with applications in radar, sonar, mobile communications and others. In this paper, we propose a tensor-based method to solve the blind spatial signature estimation problem. By assuming that a L-shaped receiver array is divided into smaller subarrays, the Tucker decomposition of a fourth-order tensor is formulated from the cross-correlation matrix of received data in the different subarrays. Based on this higher-order structure, the iterative algorithm proposed in [1] is adapted to estimate blindly the elevation and azimuth angles of the incident signals in L-shaped arrays. Simulation results obtained shows that the proposed method gives better performance than the classical algorithms *Propagator Method* (PM), *Multiple Signal Classification* (MUSIC) and *Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Techniques* (ESPRIT).

**Keywords**— Array signal processing, DoA estimation, tensor decomposition.

## I. INTRODUÇÃO

A estimação da direção de chegada (do inglês, DoA - *Direction of Arrival*) de múltiplos sinais é um problema fundamental em processamento de sinais em arranjos. Devido ao grande número de aplicações práticas em áreas como radar, sonar, sismologia, rádio astronomia e comunicações móveis, o interesse por métodos de estimação de DoA de alta resolução têm recebido atenção considerável nas últimas

décadas [2]. Entre as inúmeras configurações de arranjos existentes, a ULA (do inglês, *Uniform Linear Array*) tem sido amplamente explorada na literatura. Entretanto, sua utilização limita-se à estimativas de DoA em apenas uma dimensão. Por outro lado, os arranjos em formato L têm recebido atenção especial. Essas estruturas possibilitam uma identificação de DoA mais ampla, ou seja, duas dimensões espaciais (elevação e azimute) podem ser estimadas. Além disso, estimativas mais precisas são obtidas com o uso de arranjos em L em comparação aos arranjos com geometria circular e retangular [3]. Como resultado dessa expansão, técnicas tradicionais de estimação de DoA amplamente utilizadas para arranjos lineares uniformes como *Propagator Method* (PM) [4], *Multiple Signal Classification* (MUSIC) [5] e *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques* (ESPRIT) [6] foram extendidas para configurações de arranjos em formato L conforme [7], [8], [9] e [10], respectivamente.

No decorrer dos anos, as decomposições tensoriais vêm sendo aplicadas com sucesso em processamento de sinais para estimação de parâmetros, pois fornecem uma melhor identificabilidade em comparação aos métodos matriciais. A mais popular e amplamente explorada na literatura é a decomposição PARAFAC (do inglês, *Parallel Factor Analysis*) [11], em virtude de suas condições de unicidade bem definidas [12]. Nesse contexto, alguns esquemas baseados na decomposição PARAFAC foram propostos, por exemplo: (i) sistema de recepção com invariância múltipla de sub-arranjos [13], (ii) sistema radar MIMO para localização de múltiplos alvos [14] e (iii) modelagem tensorial de arranjos polarimétricos para estimação de parâmetros de polarização e DoA [15]. Em [1] um método baseado na decomposição de Tucker de um tensor de quarta ordem foi proposto para solucionar o problema de estimação cega de assinaturas espaciais. Tal abordagem dispensa o conhecimento *a priori* da geometria do arranjo e pode ser utilizada independente da estrutura do receptor. Entretanto, uma limitação desse método está associada à necessidade de transmitir a mesma sequência de símbolos em diferentes blocos de tempo o que acarreta uma redução considerável no *Throughput* do sistema.

Neste artigo, adaptamos o método de estimação cega de assinaturas espaciais proposto em [1] para o contexto de arranjos em formato L. Ao dividirmos o arranjo receptor em sub-arranjos menores, uma modelagem tensorial via decomposição de Tucker é formulada a partir da matriz de correlação cruzada dos dados recebidos nos diferentes sub-arranjos. A partir da estrutura tensorial obtida, um

algoritmo iterativo baseado em mínimos quadrados alternados (do inglês, ALS - *Alternating Least Squares*) é proposto para estimar conjuntamente e de forma cega a DoA dos sinais incidentes. Em comparação a modelagem realizada em [1], nossa proposta descarta a necessidade de repetir os símbolos nos diferentes blocos de transmissão assim como o uso de um sistema de controle de potência com canal de *feedback* (para detalhes sobre esse esquema de transmissão consultar [16]).

Este artigo está organizado da seguinte forma: O modelo de sinal para um arranjo em formato L é introduzido na Seção II. O método proposto para resolver o problema de estimação cega de assinaturas espaciais é desenvolvido na Seção III. Os resultados de simulação são apresentados e discutidos na Seção IV e o artigo é concluído na Seção V.

*Notação:* Escalares são representados por letras minúsculas  $a$ , vetores por letras minúsculas em negrito  $\mathbf{a}$ , matrizes por letras maiúsculas em negrito  $\mathbf{A}$  e tensores por letras caligráficas em negrito  $\mathcal{A}$ . Os símbolos  $^T, ^H, \dagger$  e  $*$  representam o transposto, conjugado transposto, pseudo-inversa e complexo conjugado, respectivamente. O operador  $\text{diag}(\mathbf{a})$  forma uma matriz diagonal a partir do vetor  $\mathbf{a}$ . A  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times R}$  é representada por  $\mathbf{A}(i, :)$   $\in \mathbb{C}^{1 \times R}$ , enquanto sua  $r$ -ésima coluna é representada por  $\mathbf{A}(:, r)$   $\in \mathbb{C}^{I \times 1}$ . O operador  $\text{vec}(\mathbf{A})$  converte  $\mathbf{A}$  em um vetor  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{IR \times 1}$ , enquanto  $\text{unvec}_{I \times R}(\mathbf{a})$  converte  $\mathbf{a}$  como uma matriz  $I \times R$ . O operador  $\mathbf{D}_i(\mathbf{A})$  forma uma matriz diagonal cujo argumento é a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{A}$  e  $\|\cdot\|_F$  denota a norma de Frobenius de uma matriz ou tensor. O produto de Kronecker é representado por  $\otimes$ . O produto de Khatri-Rao entre as matrizes  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times R}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{J \times R}$ , representado por  $\diamond$ , é definido como:

$$\mathbf{A} \diamond \mathbf{B} = [\mathbf{A}(:, 1) \otimes \mathbf{B}(:, 1), \dots, \mathbf{A}(:, R) \otimes \mathbf{B}(:, R)] \quad (1)$$

No decorrer desse trabalho, a seguinte propriedade do produto de Kronecker é utilizada:

$$\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{B}), \quad (2)$$

em que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são matrizes com dimensões compatíveis. As operações envolvendo tensores, produto modo- $n$  representado por  $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times_n \mathbf{A}$  e matriciação modo- $n$  representada por  $[\mathcal{X}]_{(n)}$  são definidas conforme [17].

## II. MODELO DE SINAL

Considere um arranjo receptor em formato de L composto por  $N_x + N_z - 1$  elementos posicionados no plano  $x - z$ , conforme a Figura 1. Cada arranjo linear é formado por  $N_x$  e  $N_z$  elementos igualmente espaçados de  $d_x$  e  $d_z$ , respectivamente. Assumindo que  $M$  fontes em campo distante, com mesmo comprimento de onda  $\lambda$  e de banda-estreita incidem simultaneamente sobre o arranjo com direções de chegada  $(\alpha_m, \beta_m), m = 1, \dots, M$ , em que  $\alpha_m$  e  $\beta_m$  são os ângulos de elevação e azimute da  $m$ -ésima fonte, respectivamente. O sinal recebido nos  $N_x$  elementos posicionados no eixo  $x$

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_{N_x}(k)]^T \quad (3)$$

é dado por

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_x \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_x(k) \in \mathbb{C}^{N_x \times 1} \quad (4)$$

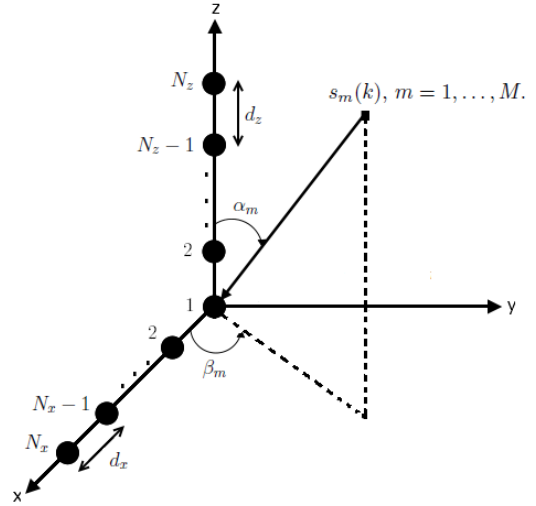


Fig. 1. Configuração de um arranjo receptor em formato L formado por  $N_x + N_z - 1$  elementos.

em que

$$\mathbf{A}_x = [\mathbf{a}_1^{(x)}, \dots, \mathbf{a}_M^{(x)}] \in \mathbb{C}^{N_x \times M}, \quad (5)$$

$$\mathbf{a}_m^{(x)} = [a_{1,m}^{(x)}, \dots, a_{N_x,m}^{(x)}]^T, \quad (6)$$

$$a_{n_x,m}^{(x)} = \exp\left(-j \frac{2\pi(n_x - 1)d_x \sin \alpha_m \cos \beta_m}{\lambda}\right) \quad (7)$$

$n_x = 1, \dots, N_x$  e  $m = 1, \dots, M$ .

O sinal recebido nos  $N_z$  elementos posicionados no eixo  $z$

$$\mathbf{z}(k) = [z_1(k), z_2(k), \dots, z_{N_z}(k)]^T \quad (8)$$

é dado por

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{A}_z \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_z(k) \in \mathbb{C}^{N_z \times 1} \quad (9)$$

em que

$$\mathbf{A}_z = [\mathbf{a}_1^{(z)}, \dots, \mathbf{a}_M^{(z)}] \in \mathbb{C}^{N_z \times M}, \quad (10)$$

$$\mathbf{a}_m^{(z)} = [a_{1,m}^{(z)}, \dots, a_{N_z,m}^{(z)}]^T, \quad (11)$$

$$a_{n_z,m}^{(z)} = \exp\left(-j \frac{2\pi(n_z - 1)d_z \cos \alpha_m}{\lambda}\right) \quad (12)$$

$n_z = 1, \dots, N_z$  e  $m = 1, \dots, M$ .

e  $\mathbf{s}(k) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  é o vetor que contém o sinal das fontes associado ao  $k$ -ésimo instante de observação,  $k = 1, \dots, K$ ,  $\mathbf{n}_x(k) \in \mathbb{C}^{N_x \times 1}$  e  $\mathbf{n}_z(k) \in \mathbb{C}^{N_z \times 1}$  são os termos de ruído aditivo Gaussiano branco assumidos descorrelacionados em relação aos sinais das fontes.

Nesse artigo, investigamos o problema de estimação conjunta dos ângulos de elevação e azimute das fontes a partir dos sinais recebidos  $\mathbf{x}(k)$  e  $\mathbf{z}(k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ . A seguir, apresentamos nossa contribuição e na Seção IV uma análise de desempenho baseada em simulações computacionais é realizada a fim de confrontar nossa proposta com os métodos matriciais competidores PM, MUSIC e ESPRIT.

## III. MÉTODO PROPOSTO

Considere que os arranjos lineares posicionados nos eixos  $x$  e  $z$  sejam divididos em  $P$  e  $W$  sub-arranjos, respectivamente. Cada sub-arranjo é formado por  $N_x^{(\text{sub})} = N_x - P + 1$  e  $N_z^{(\text{sub})} = N_z - W + 1$  elementos. O sinal recebido no  $p$ -ésimo sub-arranjo,  $p = 1, \dots, P$ , é dado por

$$\mathbf{x}^{(p)}(k) = \mathbf{A}_x^{(s)} \mathbf{D}_p(\Phi_x) \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_x^{(p)}(k) \in \mathbb{C}^{N_x^{(\text{sub})} \times 1} \quad (13)$$

e o sinal recebido no  $w$ -ésimo sub-arranjo,  $w = 1, \dots, W$  é dado por

$$\mathbf{z}^{(w)}(k) = \mathbf{A}_z^{(s)} \mathbf{D}_w(\Phi_z) \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_z^{(w)}(k) \in \mathbb{C}^{N_z^{(\text{sub})} \times 1} \quad (14)$$

em que

- $\mathbf{A}_x^{(s)} \in \mathbb{C}^{N_x^{(\text{sub})} \times M}$  e  $\mathbf{A}_z^{(s)} \in \mathbb{C}^{N_z^{(\text{sub})} \times M}$  são as matrizes de assinaturas espaciais referentes ao primeiro sub-arranjo (ou sub-arranjo de referência) de cada eixo;
- $\mathbf{n}_x^{(p)}(k) \in \mathbb{C}^{N_x^{(\text{sub})} \times 1}$  e  $\mathbf{n}_z^{(w)}(k) \in \mathbb{C}^{N_z^{(\text{sub})} \times 1}$  são os termos de ruído referentes ao  $p$ -ésimo e  $w$ -ésimo sub-arranjos;
- $\mathbf{D}_p(\Phi_x)$  e  $\mathbf{D}_w(\Phi_z)$  são matrizes diagonais cuja diagonal principal contém a  $p$ -ésima e  $w$ -ésima linha de  $\Phi_x \in \mathbb{C}^{P \times M}$  e  $\Phi_z \in \mathbb{C}^{W \times M}$ , respectivamente.

As linhas de  $\Phi_x$  e  $\Phi_z$  capturam a defasagem sofrida pelos sinais incidentes no  $p$ -ésimo e  $w$ -ésimo sub-arranjos em relação ao sub-arranjo de referência e são definidas a partir das Equações (7) e (12) como

$$\Phi_x(p, :) = [a_{p,1}^{(x)}, a_{p,2}^{(x)}, \dots, a_{p,M}^{(x)}] \quad (15)$$

$$\Phi_z(w, :) = [a_{w,1}^{(z)}, a_{w,2}^{(z)}, \dots, a_{w,M}^{(z)}] \quad (16)$$

$$p = 1, \dots, P \quad \text{e} \quad w = 1, \dots, W.$$

A partir das Equações (13) e (14) vetores que coletam os sinais recebidos em todos os sub-arranjos, para cada eixo separadamente, são obtidos realizando as seguintes concatenações

$$\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}^{(1)}(k), \dots, \mathbf{x}^{(P)}(k)]^T \in \mathbb{C}^{N_x^{(\text{sub})} P \times 1} \quad (17)$$

$$\mathbf{z}(k) = [\mathbf{z}^{(1)}(k), \dots, \mathbf{z}^{(W)}(k)]^T \in \mathbb{C}^{N_z^{(\text{sub})} W \times 1}, \quad (18)$$

ou de forma equivalente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x^{(s)} \mathbf{D}_1(\Phi_x) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_x^{(s)} \mathbf{D}_P(\Phi_x) \end{bmatrix} \mathbf{s}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x^{(1)}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{n}_x^{(P)}(k) \end{bmatrix} \\ &= (\Phi_x \diamond \mathbf{A}_x^{(s)}) \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_x(k), \end{aligned} \quad (19)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_z^{(s)} \mathbf{D}_1(\Phi_z) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_z^{(s)} \mathbf{D}_W(\Phi_z) \end{bmatrix} \mathbf{s}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_z^{(1)}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{n}_z^{(W)}(k) \end{bmatrix} \\ &= (\Phi_z \diamond \mathbf{A}_z^{(s)}) \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_z(k). \end{aligned} \quad (20)$$

Baseado na decorrelação entre o ruído aditivo e os sinais das fontes e assumindo um total de  $K$  observações, introduzimos a matriz de correlação cruzada

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{xz}} &= E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{z}^H(k) \}, \quad k = 1, \dots, K. \\ &= (\Phi_x \diamond \mathbf{A}_x^{(s)}) \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} (\Phi_z \diamond \mathbf{A}_z^{(s)})^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (21)$$

em que  $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}} = E \{ \mathbf{s}(k) \mathbf{s}^H(k) \}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , é a matriz de correlação dos sinais das fontes,  $\sigma_n^2$  é a variância do ruído e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. A Equação (21) descreve uma forma matriciada multimodo do tensor de correlação cruzada  $\mathcal{R}_{\mathbf{xz}} \in \mathbb{C}^{N_x^{(\text{sub})} \times P \times N_z^{(\text{sub})} \times W}$  em que o primeiro e segundo modos são mesclados nas linhas e o terceiro e quarto modos nas colunas, ou seja,  $[\mathcal{R}_{\mathbf{xz}}]_{(1,2);(3,4)} = \mathbf{R}_{\mathbf{xz}} \in \mathbb{C}^{N_x^{(\text{sub})} P \times N_z^{(\text{sub})} W}$ . Utilizando notação produto modo- $n$  o tensor  $\mathcal{R}_{\mathbf{xz}}$  é dado por

$$\mathcal{R}_{\mathbf{xz}} = \mathcal{R}_{\mathbf{ss}} \times_1 \mathbf{A}_x^{(s)} \times_2 \Phi_x \times_3 \mathbf{A}_z^{(s)*} \times_4 \Phi_z^* + \mathcal{V}_{\mathbf{xz}} \quad (22)$$

em que  $\mathcal{V}_{\mathbf{xz}}$  é um tensor de tamanho  $N_x^{(\text{sub})} \times P \times N_z^{(\text{sub})} \times W$  que contém a potência do ruído e  $\mathcal{R}_{\mathbf{ss}} \in \mathbb{C}^{M \times M \times M \times M}$  é o tensor de correlação dos sinais das fontes, diretamente relacionado com a matriz de correlação  $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}$  pela expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathbf{ss}}(:, :, m, m) &= \text{diag}(\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}(:, m)) \\ m &= 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (23)$$

Na Equação (23), a matriz  $\mathcal{R}_{\mathbf{ss}}(:, :, m, m)$  denota o  $m$ -ésimo *slice* frontal do tensor de correlação  $\mathcal{R}_{\mathbf{ss}}$  obtido fixando-se os modos três e quatro. Na Equação (22), o termo de correlação livre de ruído  $\mathcal{R}_o = \mathcal{R}_{\mathbf{xz}} - \mathcal{V}_{\mathbf{xz}}$  denota a decomposição de Tucker do tensor de quarta ordem  $\mathcal{R}_o \in \mathbb{C}^{N_x^{(\text{sub})} \times P \times N_z^{(\text{sub})} \times W}$ , em que  $\mathbf{A}_x^{(s)}$ ,  $\Phi_x$ ,  $\mathbf{A}_z^{(s)*}$  e  $\Phi_z^*$  são as matrizes fatores da decomposição e  $\mathcal{R}_{\mathbf{ss}}$  é o tensor núcleo.

Em notação matricial, o tensor de correlação cruzada  $\mathcal{R}_o$  é decomposto em função das matrizes fatores e do tensor núcleo, e admite as seguintes fatorações conforme [17]:

$$[\mathcal{R}_o]_{(1)} = \mathbf{A}_x^{(s)} [\mathcal{R}_{\mathbf{ss}}]_{(1)} (\Phi_z^* \otimes \mathbf{A}_z^{(s)*} \otimes \Phi_x)^T \quad (24)$$

$$[\mathcal{R}_o]_{(2)} = \Phi_x [\mathcal{R}_{\mathbf{ss}}]_{(2)} (\Phi_z^* \otimes \mathbf{A}_z^{(s)*} \otimes \mathbf{A}_x^{(s)})^T \quad (25)$$

$$[\mathcal{R}_o]_{(3)} = \mathbf{A}_z^{(s)*} [\mathcal{R}_{\mathbf{ss}}]_{(3)} (\Phi_z^* \otimes \Phi_x \otimes \mathbf{A}_x^{(s)})^T \quad (26)$$

$$[\mathcal{R}_o]_{(4)} = \Phi_z^* [\mathcal{R}_{\mathbf{ss}}]_{(4)} (\mathbf{A}_z^{(s)*} \otimes \Phi_x \otimes \mathbf{A}_x^{(s)})^T, \quad (27)$$

em que  $[\mathcal{R}_o]_{(n)}$  e  $[\mathcal{R}_{\mathbf{ss}}]_{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, 4$ , são as formas matriciadas dos tensores  $\mathcal{R}_o \in \mathbb{C}^{N_x^{(\text{sub})} \times P \times N_z^{(\text{sub})} \times W}$  e  $\mathcal{R}_{\mathbf{ss}} \in \mathbb{C}^{M \times M \times M \times M}$  no  $n$ -ésimo modo, respectivamente.

## A. Algoritmo para Estimacão Cega de Assinaturas Espaciais

Nosso objetivo é obter de forma cega estimativas para os ângulos de elevacão e azimute das fontes ( $\hat{\alpha}_m, \hat{\beta}_m$ ),  $m = 1, \dots, M$ . O algoritmo proposto consiste em estimar inicialmente as matrizes de interesse  $\hat{\mathbf{A}}_x^{(s)}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_z^{(s)}$ ,  $\hat{\Phi}_x$  e  $\hat{\Phi}_z$  a partir das formas matriciadas do tensor de dados recebido  $[\mathcal{R}_o]_{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, 4$ . A partir das Equações (24)-(27) quatro problemas de mínimos quadrados são formulados:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_x^{(s)} &= \min_{\mathbf{A}_x^{(s)}} \| [\mathcal{R}_o]_{(1)} - \mathbf{A}_x^{(s)} [\mathcal{R}_{\mathbf{ss}}]_{(1)} (\Phi_z^* \otimes \mathbf{A}_z^{(s)*} \otimes \Phi_x)^T \|_F^2 \\ \hat{\Phi}_x &= \min_{\Phi_x} \| [\mathcal{R}_o]_{(2)} - \Phi_x [\mathcal{R}_{\mathbf{ss}}]_{(2)} (\Phi_z^* \otimes \mathbf{A}_z^{(s)*} \otimes \mathbf{A}_x^{(s)})^T \|_F^2 \end{aligned}$$

TABELA I  
 ALGORITMO PROPOSTO

1) Inicialize as matrizes fatores $\hat{\Phi}_x$ , $\hat{A}_z^{(s)}$ , $\hat{\Phi}_z$ e o tensor núcleo $\hat{\mathcal{R}}_{ss}$ de forma aleatória; 2) Obtenha as formas matriciadas $[\hat{\mathcal{R}}_{ss}]_{(n)}$ , $n = 1, \dots, 4$ ; 3) Obtenha uma estimativa para $\hat{A}_x^{(s)}$ : $\hat{A}_x^{(s)} = [\mathcal{R}_{xz}]_{(1)} \left[ [\hat{\mathcal{R}}_{ss}]_{(1)} \left( \hat{\Phi}_z^* \otimes \hat{A}_z^{(s)*} \otimes \hat{\Phi}_x \right)^T \right]^\dagger$ ; 4) Obtenha uma estimativa para $\hat{\Phi}_x$ : $\hat{\Phi}_x = [\mathcal{R}_{xz}]_{(2)} \left[ [\hat{\mathcal{R}}_{ss}]_{(2)} \left( \hat{\Phi}_z^* \otimes \hat{A}_z^{(s)*} \otimes \hat{A}_x^{(s)} \right)^T \right]^\dagger$ ; 5) Obtenha uma estimativa para $\hat{A}_z^{(s)*}$ : $\hat{A}_z^{(s)*} = [\mathcal{R}_{xz}]_{(3)} \left[ [\hat{\mathcal{R}}_{ss}]_{(3)} \left( \hat{\Phi}_z^* \otimes \hat{\Phi}_x \otimes \hat{A}_x^{(s)} \right)^T \right]^\dagger$ ; 6) Obtenha uma estimativa para $\hat{\Phi}_z^*$ : $\hat{\Phi}_z^* = [\mathcal{R}_{xz}]_{(4)} \left[ [\hat{\mathcal{R}}_{ss}]_{(4)} \left( \hat{A}_z^{(s)*} \otimes \hat{\Phi}_x \otimes \hat{A}_x^{(s)} \right)^T \right]^\dagger$ ; 7) Obtenha uma estimativa para $\hat{\mathcal{R}}_{ss}$ : $\hat{\Psi}_1 = \left( \hat{\Phi}_z \diamond \hat{A}_z^{(s)} \right)^*$ e $\hat{\Psi}_2 = \hat{\Phi}_x \diamond \hat{A}_x^{(s)}$ ; $\text{vec} \left( \hat{\mathcal{R}}_{ss} \right) = \left[ \hat{\Psi}_1 \otimes \hat{\Psi}_2 \right]^\dagger \text{vec} \left( \mathcal{R}_{xz} \right)$ ; $\hat{\mathcal{R}}_{ss} = \text{unvec}_{M \times M} \left( \text{vec} \left( \hat{\mathcal{R}}_{ss} \right) \right)$ ; para $m = 1 : M$ $\hat{\mathcal{R}}_{ss}(:, :, m, m) = \text{diag} \left( \hat{\mathcal{R}}_{ss}(:, :, m) \right)$ ; fim 8) Repita os passos 2-7 até a convergência.
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$\hat{A}_z^{(s)*} = \min_{\hat{A}_z^{(s)*}} \left\| [\mathcal{R}_o]_{(3)} - \hat{A}_z^{(s)*} [\hat{\mathcal{R}}_{ss}]_{(3)} \left( \hat{\Phi}_z^* \otimes \hat{\Phi}_x \otimes \hat{A}_x^{(s)} \right)^T \right\|_F^2$$

$$\hat{\Phi}_z^* = \min_{\hat{\Phi}_z^*} \left\| [\mathcal{R}_o]_{(4)} - \hat{\Phi}_z^* [\hat{\mathcal{R}}_{ss}]_{(4)} \left( \hat{A}_z^{(s)*} \otimes \hat{\Phi}_x \otimes \hat{A}_x^{(s)} \right)^T \right\|_F^2$$
(28)

Para um cenário em que a matriz de correlação das fontes  $\mathcal{R}_{ss}$  possui uma estrutura arbitrária e desconhecida no receptor, um quinto problema de mínimos quadrados é formulado aplicando a propriedade (2) no termo livre de ruído  $\mathcal{R}_o = \mathcal{R}_{xz} - \sigma_n^2 \mathbf{I}$  da Equação (21), obtendo

$$\text{vec} \left( \hat{\mathcal{R}}_{ss} \right) = \min_{\mathcal{R}_{ss}} \left\| \text{vec} \left( \mathcal{R}_o \right) - \left( \hat{\Psi}_1 \otimes \hat{\Psi}_2 \right) \text{vec} \left( \mathcal{R}_{xz} \right) \right\|_F^2$$
(29)

em que  $\hat{\Psi}_1 = \left( \hat{\Phi}_z \diamond \hat{A}_z^{(s)} \right)^*$  e  $\hat{\Psi}_2 = \hat{\Phi}_x \diamond \hat{A}_x^{(s)}$ .

Sendo as Equações (28) e (29) funções não-lineares nos parâmetros a serem estimados, propomos resolver o problema de estimação cega de assinaturas espaciais utilizando um método iterativo baseado no algoritmo ALS [18]. Na nossa proposta, cada iteração do algoritmo é composta por cinco etapas principais. Em cada etapa, uma matriz fator é estimada enquanto as outras permanecem fixas com os valores obtidos em iterações anteriores. Este procedimento é realizado até que a convergência do algoritmo seja alcançada.

O algoritmo proposto para resolver o problema de estimação cega de assinaturas espaciais, a partir do tensor de correlação cruzada  $\mathcal{R}_{xz}$  corrompido com ruído aditivo obtido com um arranjo em L, é mostrado detalhadamente na Tabela I.

A convergência do algoritmo na  $i$ -ésima iteração é declarada quando o erro entre o tensor de dados recebido e sua versão reconstruída a partir das matrizes fatores estimadas não varia

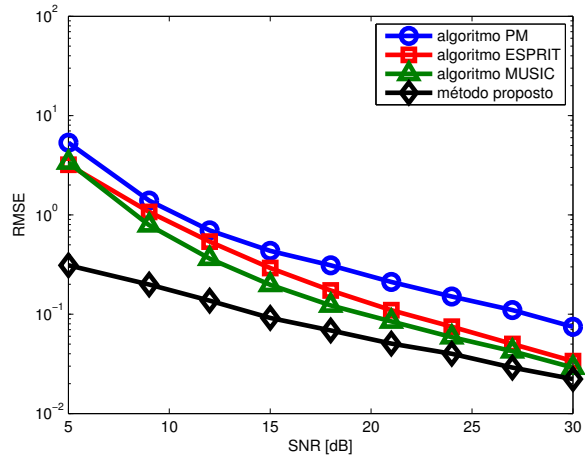


Fig. 2. RMSE total vs. SNR (comparação com os métodos competidores).

consideravelmente entre duas iterações sucessivas. Sendo  $e(i)$  o erro residual na  $i$ -ésima iteração, em nossos experimentos a convergência é assumida quando  $|e(i) - e(i-1)| \leq 10^{-6}$ . Após a convergência, estimações para os ângulos de elevação e azimute das fontes ( $\hat{\alpha}_m, \hat{\beta}_m$ ), são obtidas como a média aritmética entre os valores extraídos de cada linha das matrizes de assinaturas espaciais estimadas  $\hat{A}_x^{(s)}$  e  $\hat{A}_z^{(s)}$ .

#### IV. RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, avaliamos o desempenho do método proposto através de simulações computacionais. O arranjo receptor possui um formato L com elementos uniformemente espaçados de  $\lambda/2$ . Em cada experimento, consideramos que  $M = 2$  sinais atingem o arranjo simultaneamente com direções de chegada ( $30^\circ, 45^\circ$ ) e ( $50^\circ, 55^\circ$ ), respectivamente. Cada ULA é dividida em  $P = 2$  e  $W = 2$  sub-arranjos. Os resultados obtidos representam o comportamento médio de 1000 realizações de Monte Carlo independentes.

Na Figura 2 investigamos o desempenho da estimação dos ângulos de elevação e azimute das fontes em função da relação sinal-ruído (SNR), considerando  $K = 500$  amostras do sinal e  $N = 13$  elementos. A métrica utilizada é o RMSE total (do inglês, *Root Mean Square Error*), definido como

$$\text{RMSE} = \frac{1}{1000} \sum_{\tau=1}^{1000} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left( \alpha_m - \hat{\alpha}_m^{(\tau)} \right)^2 + \left( \beta_m - \hat{\beta}_m^{(\tau)} \right)^2}$$
(30)

em que  $\hat{\alpha}_m^{(\tau)}$  e  $\hat{\beta}_m^{(\tau)}$  são os ângulos de elevação e azimute da  $m$ -ésima fonte estimados na  $\tau$ -ésima realização de Monte Carlo, respectivamente. Nesse experimento, o desempenho do método proposto é confrontado com os algoritmos clássicos PM [7], MUSIC [8] e ESPRIT [10]. Note que o método proposto apresenta desempenho superior em relação as técnicas competidoras, com ganhos mais acentuados para baixa e média SNR. Para uma SNR elevada o desempenho do algoritmo MUSIC se aproxima do nosso método. Entretanto, o uso da nossa proposta torna-se mais atraente pois dispensa

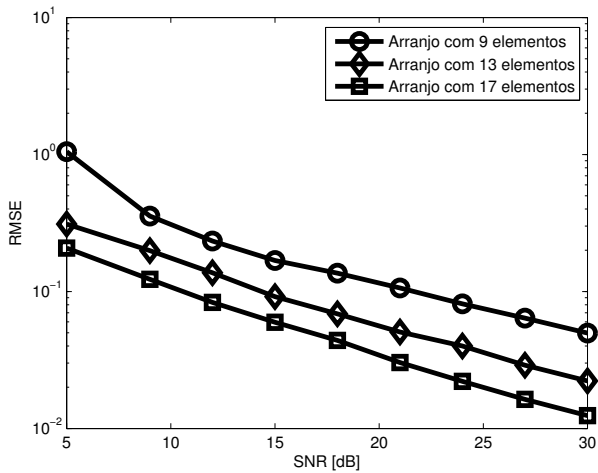


Fig. 3. RMSE total vs. SNR (desempenho do método proposto para diferentes configurações do arranjo em formato L).

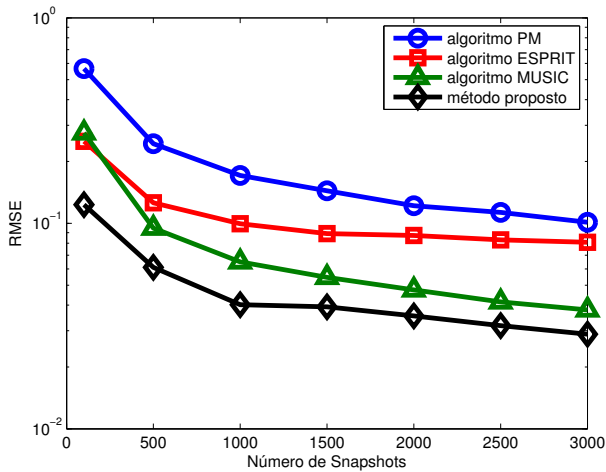


Fig. 4. RMSE total vs. Número de Snapshots (comparação com os métodos competidores).

um processo de estimação via *Peak Search* bidimensional no espectro MUSIC.

A Figura 3 mostra o desempenho do método proposto assumindo diferentes configurações de arranjo no receptor. Nesse experimento utilizamos  $K = 500$  amostras do sinal. Nota-se que um melhor desempenho na estimação da direção de chegada é obtido com o aumento do número de sensores que compõem o arranjo para toda a faixa de SNR simulada.

Na Figura 4 analisamos a influência do número  $K$  de amostras do sinal no desempenho do método proposto. Nesse experimento, consideramos os mesmos parâmetros utilizados na Figura 2, exceto a SNR que é fixa em 20dB e o número de amostras que varia entre 50 e 3000. A partir desse resultado, podemos ver que o desempenho dos algoritmos melhora com o aumento do número de amostras coletadas no arranjo. Assim como na Figura 2, o método proposto retorna estimativas mais precisas em comparação aos algoritmos matriciais PM, ESPRIT e MUSIC.

## V. CONCLUSÃO

Neste artigo, propomos uma adaptação do método tensorial proposto em [1] para seu uso em arranjos em formato L. Nossa proposta descarta a repetição dos símbolos em diferentes blocos de transmissão, retornando um maior *Throughput* em comparação ao trabalho citado anteriormente. Quando confrontado com os métodos matriciais PM, MUSIC e ESPRIT nossa abordagem, baseada em decomposição tensorial, se mostrou mais eficiente apresentando ganhos significativos em todos os experimentos realizados.

## REFERÊNCIAS

- [1] Paulo R. B. Gomes, André L. F. de Almeida and João Paulo C. L. da Costa, "Fourth-order tensor method for blind spatial signature estimation," *IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP'14)*, May. 2014, Florence, Italy.
- [2] K. Krim and M. Viberg, "Two decades of array signal processing research: the parametric approach," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, no. 4, p. 67-94, 1996.
- [3] Y. Hua, T. K. Sarkar and D. D. Weiner, "An L-shaped array for estimation 2-D directions of wave arrival," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 2, p. 143-145, 1991.
- [4] S. Marcos, A. Marsal and M. Benidir, "The propagator method for source bearing estimation," *Signal Processing*, vol. 42, p. 121-138, 1995.
- [5] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276-280, 1986.
- [6] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984-995, 1989.
- [7] N. Tayem and H. M. Kwon, "L-shape 2-dimensional arrival angle estimation with propagator method," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 5, pp. 1622-1630, 2005.
- [8] H. Changuel, F. Harabi and A. Gharsallah, "2-L-shape two-dimensional arrival angle estimation with a classical subspace algorithm," *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE'06)*, Jul. 2006, Montreal, Canada.
- [9] J. Chen, S. Wang and X. Wei, "New method for estimating two dimensional direction of arrival based on L-shaped array," *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, vol. 36, no. 4, pp. 590-593, 2006.
- [10] X. Zhang, X. Gao and W. Chen, "Improved blind 2D-direction of arrival estimation with l-shaped array using shift invariance property," *Journal of Eletromagnetics Waves and Applications*, vol. 23, pp. 593-606, 2009.
- [11] R. Harshman, "Foundations of the PARAFAC procedure: models and conditions for an explanatory multimodal factor analysis," *UCLA Working Papers in Phonetics*, vol. 16, no. 1, 1970.
- [12] R. A. Harshman and M. E. Lundy, "Uniqueness proof for a family of models sharing features of Tucker's three-mode factor analysis and PARAFAC/CANDECOMP," *Psychometrika*, vol. 61, pp. 133-154, 1996.
- [13] N. D. Sidiropoulos, R. Bro and G. B. Giannakis, "Parallel factor analysis in sensor array processing," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 58, no. 8, pp. 2377-2388, 2000.
- [14] Dimitri Nion and Nicholas D. Sidiropoulos, "Tensor algebra and multidimensional harmonic retrieval in signal processing for MIMO radar," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 58, no. 11, pp. 5693-5705, 2000.
- [15] S. Miron, X. Guo and D. Brie, "DOA estimation for polarized sources on a vector-sensor array by PARAFAC decomposition of the fourth-order covariance tensor," *16-th European Signal Processing Conference (EUSIPCO'08)*, Aug. 2008, Lausanne, Switzerland.
- [16] Y. Rong, S. A. Vorobyov, A. B. Gershman and Nicholas D. Sidiropoulos, "Blind spatial signature estimation via time-varying user power loading and parallel factor analysis," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1697-1710, 2005.
- [17] T. G. Kolda and B. W. Bader, "Tensor decompositions and applications," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 51, no. 3, p. 45, 2009.
- [18] A. Smilde, R. Bro and P. Geladi, "Multi-way Analysis with Applications in the Chemical Sciences," Wiley, 2004.