

O Método do Gradiente Conjugado Aplicado à Localização em Ambientes Fechados

Rebeca A. F. Cunha, Vinicius M. de Pinho e Marcello L. R. de Campos

Resumo— Este trabalho utiliza o método do Gradiente Conjugado para a solução de sistemas de grande porte de equações afins simultâneas. O algoritmo é aplicado ao problema de localização em ambientes fechados utilizando *WLAN fingerprinting*.

Palavras-Chave— Gradiente Conjugado, *WLAN fingerprinting*, localização em ambientes fechados.

Abstract— This paper uses the Conjugate Gradient method for solving large-scale systems of simultaneous affine equations. The algorithm is applied to the indoor localization problem using *WLAN fingerprinting*.

Keywords— Conjugate Gradient, *WLAN fingerprinting*, indoor localization.

I. INTRODUÇÃO

Diante do cenário atual de desenvolvimento, a sofisticação dos serviços e a criação de novas tecnologias exigem que lidemos com um amplo volume de informação em tempo hábil. Deparamo-nos com problemas que envolvem matrizes de dados extremamente grandes e que em muitos casos podem ser aproximados para um modelo linear. Devido à magnitude dos dados, abordagens que fazem uso de métodos diretos, como a Decomposição de Cholesky, mostram-se ineficientes. Todavia, métodos iterativos são alternativas que estão conquistando cada vez mais espaço nas mais diversas áreas que lidam com *big data*, como as redes sociais, a bioinformática e a ciência da computação. Neste trabalho, temos como objetivo descrever o Gradiente Conjugado (*CG*, sigla em inglês para *Conjugate Gradient*), método iterativo deveras eficiente quando trabalha com matrizes esparsas e de grande porte, e aplicá-lo a questão da localização em lugares fechados utilizando *WLAN fingerprinting*, mostrando então que esse problema presente nas cidades modernas pode ser resolvido por regressão linear, cujos parâmetros são obtidos empregando o *CG*.

II. O MÉTODO DO GRADIENTE CONJUGADO

Muitos fenômenos podem ser descritos por um sistema de m equações afins independentes e n incógnitas ($\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{g}$, onde $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$). Mesmo quando $m > n$ e o sistema não tem solução, há interesse em encontrar \mathbf{x} que minimize a norma quadrática $f(\mathbf{x}_{(i)}) = \|\mathbf{D}\mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{g}\|^2$. Ao calcularmos o gradiente dessa função e igualarmos a zero, nos resta buscar a solução para a equação normal $\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{D}^T\mathbf{g}$. Fazemos $\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{D}^T\mathbf{g} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Rebeca A. F. Cunha, Vinicius M. de Pinho e Marcello L. R. de Campos, Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, Brasil, E-mails: rebeccaarripe@poli.ufrj.br, viniciusmesquita@poli.ufrj.br e campos@smt.ufrj.br. Este trabalho foi parcialmente financiado por CNPq, CAPES (Projeto PRODEFESA 23038.009094/2013-83) e FINEP (Projeto Comunicações Submarinas FINEP-01.13.0421.00).

O método do Gradiente Conjugado é um método numérico iterativo robusto que pode ser usado para a solução de sistemas do tipo $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, \mathbf{A} simétrica e positiva definida. O método converge em até n iterações caso não haja problemas com arredondamentos.

Dada uma estimativa inicial $\mathbf{x}_{(0)}$ da solução \mathbf{x} , a cada iteração o método dá um passo em uma direção $\mathbf{d}_{(i)}$ A-conjugada a todas as direções anteriores, escolhendo uma nova solução $\mathbf{x}_{(i)}$ que minimize $f(\mathbf{x}_{(i)})$ naquela direção:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{(i+1)} &= \mathbf{x}_{(i)} + \alpha_{(i)}\mathbf{d}_{(i)} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_{(i+1)})}{\partial \alpha} &= 0 \\ f'(\mathbf{x}_{(i+1)})^T \frac{\partial \mathbf{x}_{(i+1)}}{\partial \alpha} &= 0\end{aligned}$$

Como o resíduo, $\mathbf{r}_{(i)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{(i)}$, é igual em módulo e está na mesma direção e sentido oposto ao gradiente da função, escrevemos $\mathbf{r}_{(i+1)}^T\mathbf{d}_{(i)} = 0$, que equivale a $\mathbf{d}_{(i)}^T\mathbf{A}\mathbf{e}_{(i+1)} = 0$, onde $\mathbf{e}_{(i)}$ é o erro a cada iteração descrito por $\mathbf{e}_{(i)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{(i)}$.

Desse modo, o algoritmo vai eliminando a componente do erro correspondente a cada $\mathbf{d}_{(i)}$, levando vantagem nesse quesito sobre métodos como o Gradiente Descendente, que eventualmente dá passos em direções já percorridas anteriormente, atrasando o processo de convergência.

No *CG*, esse conjunto de direções A-conjugadas é formado dos próprios resíduos pelo processo de Gram-Schmidt Conjugado, que elimina suas componentes não A-conjugadas às direções anteriores. Assim, o subespaço gerado por eles é o mesmo que o gerado pelas direções conjugadas, ou seja $\{\mathbf{r}_{(0)}, \mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(i-1)}\}$ equivale a $D_i = \{\mathbf{d}_{(0)}, \mathbf{d}_{(1)}, \dots, \mathbf{d}_{(i-1)}\}$.

Como $\mathbf{r}_{(i+1)} = -\mathbf{A}\mathbf{e}_{(i+1)} = \mathbf{r}_{(i)} - \alpha_{(i)}\mathbf{A}\mathbf{d}_{(i)}$, observamos que o resíduo $\mathbf{r}_{(i+1)}$ é uma combinação linear entre o resíduo anterior $\mathbf{r}_{(i)}$ e a direção conjugada anterior transformada por \mathbf{A} , $\mathbf{A}\mathbf{d}_{(i)}$. Portanto o subespaço D_{i+1} é uma união de D_i com $\mathbf{A}D_i$. Obtemos então o subespaço de Krylov $D_{i+1} = \{d_{(0)}, \mathbf{A}d_{(0)}, \mathbf{A}^2d_{(0)}, \dots, \mathbf{A}^i d_{(0)}\}$.

O fato do próximo resíduo $\mathbf{r}_{(i+1)}$ ser sempre ortogonal aos resíduos anteriores implica que ele é também ortogonal ao subespaço formado pelos resíduos antigos:

$$\mathbf{r}_{(i+1)}^T D_{i+1} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}_{(i+1)}^T \{\mathbf{d}_{(0)}, \mathbf{A}\mathbf{d}_{(0)}, \mathbf{A}^2\mathbf{d}_{(0)}, \dots, \mathbf{A}^i\mathbf{d}_{(0)}\} = 0$$

Para que essa igualdade se verifique, $\mathbf{r}_{(i+1)}$ deve ser A-conjugado a todos os subespaços de Krylov que formam D_i , e portanto a todas as direções de busca anteriores, exceto a imediatamente anterior $\mathbf{d}_{(i)}$. O fato de não haver necessidade de guardar na memória todas as direções antigas para realizar o Gram-Schmidt Conjugado constitui uma grande vantagem em relação a algoritmos como o método das Direções Conjugadas.

Para problemas muito grandes, erros de arredondamentos estão presentes e é possível que não cheguemos à solução \mathbf{x} , mas sim a uma boa aproximação dela. O CG é em resumo:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{(0)} = \mathbf{r}_{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 & \quad \alpha_{(i)} = \frac{\mathbf{r}_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i)}}{\mathbf{d}_{(i)}^T \mathbf{A} \mathbf{d}_{(i)}} \\ \mathbf{x}_{(i+1)} = \mathbf{x}_{(i)} + \alpha_{(i)} \mathbf{d}_{(i)} & \quad \mathbf{r}_{(i+1)} = \mathbf{r}_{(i)} - \alpha_{(i)} \mathbf{A} \mathbf{d}_{(i)} \\ \beta_{(i+1)} = \frac{\mathbf{r}_{(i+1)}^T \mathbf{r}_{(i+1)}}{\mathbf{r}_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i)}} & \quad \mathbf{d}_{(i+1)} = \mathbf{r}_{(i+1)} + \beta_{(i+1)} \mathbf{d}_{(i)} \end{aligned}$$

III. APLICAÇÃO

A popularização da tecnologia móvel e de serviços cuja funcionalidade dependem da localização geográfica do usuário demanda sistemas de posicionamento cada vez mais eficientes. Embora o Sistema de Posicionamento Global (*GPS*, na abreviação em inglês) seja majoritariamente utilizado, torna-se ineficiente para locais fechados, onde há má recepção de sinais de satélite. Desse modo, sistemas alternativos estão sendo desenvolvidos e aprimorados pela comunidade científica.

Este trabalho aborda um sistema que emprega a intensidade do sinal recebido (*RSSI*) no dispositivo utilizado pelo usuário e advindo de aparelhos da rede sem fio local (*WLAN*) preexistentes. O aproveitamento da infraestrutura que já se encontra hoje em dia em boa parte dos ambientes é um diferencial positivo desse sistema, classificado como *infrastructure-less*.

A base de dados que utilizamos, *UJIIndoorLoc* [3], é introduzida em [4]. A matriz de dados é formada por 520 colunas referentes a 520 WAP (Wireless Access Points) distintos. Cada coluna é composta por 21048 instâncias (linhas), sendo 19937 delas utilizadas na aplicação do CG e 1111 utilizadas para validação dos resultados. Cada linha indica a intensidade do sinal do WAP recebido pelo aparelho em um determinado local. A área total utilizada nesta coleta de dados é de 108703 m^2 , que engloba 3 prédios de 4 ou 5 andares.

IV. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Na base de dados, quando um WAP não é detectado em uma determinada instância, seu nível de *RSSI* é marcado como 100. Como a faixa de detecção está no intervalo $[-100,0]$ dBm, onde -100 é um sinal extremamente fraco e 0 representa um ótimo sinal, substituímos o nível de não detecção para -200 para não prejudicar o aprendizado do CG. Quanto aos vetores de latitude e longitude, subtraímos seus valores médios, de modo que não perdemos informação sobre a relação entre os níveis de *RSSI* e a coordenada.

A solução de mínimos quadrados nos levou a uma matriz inicial com 520 linhas e colunas e número de condicionamento igual a $3,2148 \cdot 10^{38}$. Reduzimos o número de colunas da matriz de dados \mathbf{D} eliminando aquelas com o menor número de medições válidas, ou seja, diferentes de -200 dBm. Os resultados apresentados a seguir foram obtidos com uma matriz de dados com 266 atributos (WAP), levando a um número de condicionamento da matriz \mathbf{A} igual a $5,2717 \cdot 10^5$. A origem foi escolhida como o \mathbf{x} inicial. O algoritmo usado foi baseado no pseudo-código apresentado em [2].

A norma do resíduo convergiu para 0 em apenas 246 iterações para a estimação da longitude, como pode ser visto

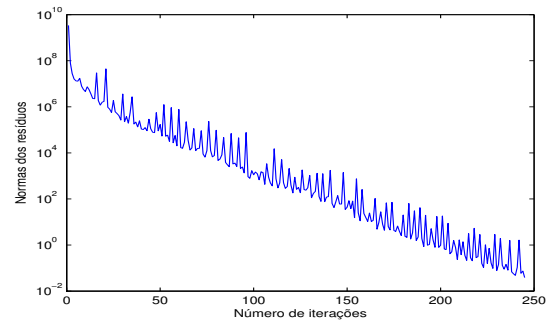


Fig. 1. Curva de aprendizado do CG.

na curva de aprendizado apresentada acima, e em apenas 257 iterações para a estimação da latitude. Em ambos os casos, a convergência se deu em menos de n iterações.

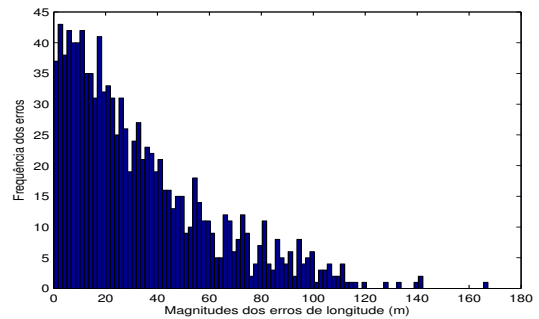


Fig. 2. Distribuição de erros da longitude para as 1111 coletas de validação.

Calculamos a diferença entre as latitudes e longitudes da base de validação e as coordenadas obtidas com a regressão usando as soluções do CG. As médias dos erros encontrados foram 33,5386 e 32,8202 metros para longitude e latitude, respectivamente. O histograma na Fig. 2 mostra a distribuição das magnitudes dos erros para a longitude, que ilustra uma concentração de erros de pequena magnitude. As médias das discrepâncias relativas foram $5,8837 \cdot 10^{-4}\%$ para a latitude e $0,047\%$ para a longitude.

Considerando que as coletas foram realizadas em uma área total de 108703 m^2 , obtivemos resultados bastante satisfatórios. Podemos inferir que o problema de localização em ambientes fechados por meio de *WLAN Fingerprinting* pode ser linearizado e o CG é uma ferramenta poderosa a ser empregada, principalmente quando o número de atributos é grande.

REFERÊNCIAS

- [1] M. R. Hestenes e E. Stiefel, *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 49, No. 6, December 1952.
- [2] J. R. Schewchuck, *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*, Edition 1.1.4. School of Computer Science - Carnegie Mellon University, August 4, 1994.
- [3] UCI Machine Learning Repository: <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/UJIIndoorLoc>
- [4] J. Torres-Sospedra, R. Montoliu, J. Huerta. *UJIIndoorLoc: A New Multi-building and Multi-floor Database for WLAN Fingerprint-based Indoor Localization Problems*, In Proceedings of the Fifth International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation, 2014.