

Considerações sobre a Distribuição de Ganho do Algoritmo EIAF-PNLMS

Fábio Luis Perez, Francisco das Chagas de Souza e Rui Seara

Resumo—Este artigo apresenta uma nova estratégia para implementação do algoritmo EIAF-PNLMS (*enhanced individual-activation-factor proportionate normalized least-mean-square*). Baseado em uma avaliação de convergência global, o algoritmo EIAF-PNLMS troca sua política de ganho proporcional para ganho uniforme. A nova abordagem segue a mesma filosofia do EIAF-PNLMS; no entanto, aloca ganho superior ao uniforme (porém, inferior ao ganho proporcional) a coeficientes com magnitude significativa. Como resultado, para casos em que a resposta ao impulso da planta tem alta esparsidade, o algoritmo proposto (EIAF-PNLMS modificado) melhora suas características de convergência, quando comparadas com o EIAF-PNLMS original.

Palavras-Chave—Algoritmo EIAF-PNLMS, convergência dos coeficientes, filtragem adaptativa, identificação de sistemas.

Abstract—This paper presents a new implementation strategy for the enhanced individual-activation-factor proportionate normalized least-mean-square (EIAF-PNLMS) algorithm. Based on a global convergence assessment, the EIAF-PNLMS algorithm changes its gain policy from proportionate to uniform gain. The new approach follows the same philosophy as the EIAF-PNLMS algorithm; however, it allocates larger gain than the uniform one (but, less than the proportionate gain) to coefficients with significant magnitude. As a result, for plant impulse responses with high sparseness, the proposed algorithm (termed here modified EIAF-PNLMS) improves its convergence characteristics, as compared with the original EIAF-PNLMS.

Keywords—EIAF-PNLMS algorithm, coefficient convergence, adaptive filtering, system identification.

I. INTRODUÇÃO

Plantas esparsas são encontradas em diversas áreas de aplicação do mundo real, tais como acústica, comunicações, processos químicos e sísmicos [1], [2]. Nesse cenário, algoritmos que utilizam o mesmo valor de passo de adaptação para todos os coeficientes do filtro, tais como o LMS (*least-mean-square*) e o LMS normalizado (NLMS – *normalized LMS*) [3], apresentam baixa velocidade de convergência [5]. Assim, visando explorar a natureza esparsa da resposta ao impulso de alguns sistemas, Duttweiler [6] propôs um

Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, e-mail: seara@linse.ufsc.br.

Fábio Luis Perez – Departamento de Engenharia Elétrica e Telecomunicações da Universidade Regional de Blumenau (FURB), Blumenau, SC, Brasil, email: fabiotek@furb.br.

Francisco das Chagas de Souza, LSAPS - Laboratório de Sistemas Adaptativos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia de Eletricidade, Universidade Federal do Maranhão, São Luís-MA, Brasil, e-mail: francisco.souza@ufma.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

algoritmo, denominado NLMS proporcional (PNLMS – *proportionate NLMS*), no qual cada coeficiente do filtro adaptativo é atualizado proporcionalmente à sua magnitude, resultando assim em maior velocidade de convergência. Entretanto, essa melhor característica de convergência do PNLMS não é mantida em todo o processo de adaptação [7]-[9]. Além disso, o algoritmo PNLMS apresenta degradação de desempenho quando a planta possui esparsidade média ou baixa [9]. Para contornar tais problemas, diversas versões do algoritmo PNLMS vêm sendo propostas [5], [7], [10]-[14].

Baseados na minimização do erro quadrático médio (EQM) em cada iteração para dados de entrada brancos, dois novos algoritmos da classe proporcional, denominados “*water-filling*” e proporcional ao desvio médio dos coeficientes (PDMQC), foram propostos em [15]. Esses algoritmos utilizam uma estimativa polarizada do desvio quadrático médio dos coeficientes para determinar o ganho de adaptação. O algoritmo PDMQC (denominado originalmente por seus autores *z²-proportionate* [15]), é uma versão derivada do “*water-filling*”, exibindo resultados similares ao seu predecessor, porém com menor complexidade computacional.

Em [16], o algoritmo PNLMS com fatores de ativação individuais (IAF-PNLMS – *individual activation factor PNLMS*) é introduzido, o qual usa fatores de ativação individuais para cada coeficiente do filtro adaptativo ao invés de um fator global, como o utilizado pelo PNLMS original. Tal estratégia conduz a um aumento de ganho atribuído a coeficientes ativos em relação ao algoritmo PNLMS e, para casos em que a resposta ao impulso da planta apresenta alta esparsidade, maior velocidade de convergência é alcançada. Em [17], o algoritmo IAF-PNLMS melhorado (EIAF-PNLMS – *enhanced IAF-PNLMS*) é proposto, o qual considera que a filosofia proporcional não precisa ser aplicada durante todo o processo de adaptação. Esse algoritmo usa uma versão suavizada do erro quadrático instantâneo $e^2(k)$ como medida de proximidade do regime permanente para alterar a política de ganho proporcional para ganho uniforme, isto é, o mesmo ganho é atribuído a todos os coeficientes do filtro adaptativo e, desse modo, melhorando as características de convergência em regime permanente.

Neste trabalho, uma nova estratégia para implementar a distribuição de ganho do algoritmo EIAF-PNLMS é apresentada. A abordagem proposta, após a mudança de distribuição de ganho, aloca ganho de adaptação superior ao ganho uniforme para coeficientes com magnitude significativa, aumentando dessa forma sua velocidade de convergência. O algoritmo EIAF-PNLMS modificado supera o algoritmo original em termos de características de convergência para plantas com resposta ao impulso exibindo alta esparsidade. Através de simulações numéricas, a efetividade do algoritmo EIAF-PNLMS modificado é avaliada.

Este artigo está organizado como segue. Na Seção II, o algoritmo EIAF-PNLMS é revisitado. A Seção III apresenta uma discussão sobre a mudança de distribuição de ganho do algoritmo EIAF-PNLMS e a evolução dos coeficientes em plantas com alta esparsidade. Na Seção IV, uma nova implementação de distribuição de ganho para o algoritmo EIAF-PNLMS é introduzida. Na Seção V, resultados de simulação numérica confirmam o desempenho do algoritmo EIAF-PNLMS modificado. Finalmente, a Seção VI apresenta os comentários e conclusões deste trabalho de pesquisa.

II. REVISITANDO O ALGORITMO EIAF-PNLMS

Nesta seção, o algoritmo EIAF-PNLMS é revisitado bem como uma breve discussão sobre sua estratégia de distribuição de ganho é apresentada. Para isso, a formulação geral do algoritmo IAF-PNLMS é inicialmente descrita.

A. Formulação Geral do Algoritmo IAF-PNLMS

Em contraste com o algoritmo PNLMS padrão, que atribui ganho proporcional apenas a coeficientes ativos, o algoritmo IAF-PNLMS usa fatores de ativação individuais para alocar ganho proporcional a todos os coeficientes do filtro adaptativo e, dessa forma, obter maior velocidade de convergência para casos em que a planta é esparsa. O algoritmo IAF-PNLMS é formulado pelo seguinte conjunto de equações [16]:

Atualização dos coeficientes

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \frac{\beta \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) e(k)}{\mathbf{x}^T(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) + \xi} \quad (1)$$

Sinal de erro

$$e(k) = d(k) - \mathbf{w}^T(k) \mathbf{x}(k) + v(k) \quad (2)$$

Matriz diagonal de distribuição de ganho

$$\mathbf{G}(k) = \text{diag}[g_1(k) \ g_2(k) \ \cdots \ g_N(k)] \quad (3)$$

Ganho individual

$$g_i(k) = \frac{\phi_i(k)}{\sum_{j=1}^N \phi_j(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

Função de proporcionalidade

$$\phi_i(k) = \max[f_i(k), |w_i(k)|] \quad (5)$$

Fator de ativação individual

$$f_i(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} |w_i(k)| + \frac{1}{2} \phi_i(k-1), & k = mN, m = 1, 2, 3, \dots \\ f_i(k-1), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

onde β é o parâmetro de passo, $\xi > 0$ é um parâmetro de regularização que previne a divisão por zero em (1) e estabiliza a solução. A variável $d(k)$ denota o sinal desejado e $v(k)$ é um ruído de medição independente e identicamente distribuído (i.i.d.) de média zero e variância σ_v^2 . As variáveis $\mathbf{x}(k) = [x(k) \ x(k-1) \ \cdots \ x(k-N+1)]^T$ e $\mathbf{w}(k) = [w_1(k) \ w_2(k) \ \cdots \ w_N(k)]^T$ denotam, respectivamente, os vetores de entrada e de coeficientes adaptativos, ambos de dimensão N .

B. Algoritmo EIAF-PNLMS

A filosofia do algoritmo EIAF-PNLMS considera que ganho proporcional não precisa ser aplicado durante todo o processo adaptativo, visto que alocar ganhos maiores a coeficientes ativos que já atingiram a vizinhança de seus valores ótimos não tem praticamente efeito na convergência global do algoritmo. Assim, o algoritmo EIAF-PNLMS propõe a seguinte modificação na equação de ganho individual [17]:

$$g_i(k) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & |w_i^o - w_i(L_i)| \leq K_o \\ \frac{\phi_i(k)}{\sum_{j=1}^N \phi_j(k)}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

onde w_i^o representa o i -ésimo coeficiente ótimo da planta e L_i é o número de iterações necessárias para o i -ésimo coeficiente adaptativo alcançar a proximidade K_o de seus valores ótimos. Assim, coeficientes que alcancem tal proximidade têm seus ganhos alterados para $1/N$. Contudo, a implementação de (7) requer o conhecimento *a priori* dos coeficientes da planta, o que em geral não está disponível em aplicações práticas. Então, para contornar tal problema e viabilizar a implementação do algoritmo, uma avaliação de convergência global do filtro adaptativo é proposta. Desse modo, o ganho individual do i -ésimo coeficiente é revisado para

$$g_i(k) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & \psi(k) \leq K \\ \frac{\phi_i(k)}{\sum_{j=1}^N \phi_j(k)}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8)$$

com

$$\psi(k) = \alpha \psi(k-1) + (1-\alpha) e^2(k) \quad (9)$$

onde $0 < \alpha < 1$ representa o fator de suavização de erro quadrático e K , o limiar de convergência que define o instante no qual um ganho uniforme deve ser aplicado a todos os coeficientes do filtro adaptativo.

Visto que o valor do erro quadrático $e^2(k)$ tende a ser alto no início do processo de convergência, sua versão suavizada $\psi(k)$ tende a ser maior do que K . Nesse caso, o algoritmo EIAF-PNLMS utiliza a mesma política de ganho do IAF-PNLMS [veja (8)] e, dessa forma, a maior velocidade inicial de convergência do algoritmo IAF-PNLMS é mantida no EIAF-PNLMS. Conforme o processo de convergência evolui e o algoritmo se aproxima do regime permanente, o erro quadrático instantâneo $e^2(k)$ diminui, assim como $\psi(k)$. Quando a condição $\psi(k) \leq K$ é atendida, o algoritmo EIAF-PNLMS atribui ganho $1/N$ a todos os coeficientes do filtro adaptativo. Desse modo, o EIAF-PNLMS troca sua política de ganho proporcional para ganho uniforme, ou seja, ele passa a operar como o algoritmo NLMS.

III. AVALIAÇÃO DE CONVERGÊNCIA GLOBAL E PROXIMIDADE DO COEFICIENTE ADAPTATIVO EM RELAÇÃO A SEU VALOR ÓTIMO

Visando redistribuir ganhos de adaptação de coeficientes ativos que atingiram a vizinhança K_0 de seus valores ótimos, sempre que a condição $|w_i^0 - w_i(L_i)| \leq K_0$ é satisfeita, o algoritmo EIAF-PNLMS propõe reduzir o ganho atribuído ao coeficiente w_i para $1/N$ [veja (7)]; contudo, tal condição necessita do conhecimento *a priori* de w_i^0 , o que em geral não está disponível. Assim, para viabilizar sua implementação, ao invés de uma avaliação individual de convergência, o algoritmo EIAF-PNLMS usa o sinal de erro quadrático $e^2(k)$ como um indicador de convergência global. Então, assim que o sinal de erro quadrático suavizado seja menor ou igual ao limiar K , o algoritmo EIAF-PNLMS atribui o mesmo ganho a todos os coeficientes do filtro adaptativo [veja (8)].

Entretanto, os instantes no qual os coeficientes adaptativos atingem a vizinhança K_0 de seus valores ótimos não são os mesmos. Dessa forma, o uso de uma avaliação global de convergência, ao invés de individual, leva o algoritmo a atribuir ganho não proporcional a coeficientes que ainda não atingiram a vizinhança K_0 . Tal fato impacta diretamente nas características de convergência do algoritmo adaptativo. Para ilustrar esse comportamento, simulações de Monte Carlo (média de 100 realizações independentes) são mostradas na Fig. 1. Nessa figura, é apresentada a evolução da magnitude de 3 coeficientes adaptativos distintos do algoritmo EIAF-PNLMS, considerando um ambiente de alta esparsidade. Aqui, para quantificar a esparsidade da resposta ao impulso da planta, usa-se uma medida comum na literatura [2], [16] baseada na relação entre as normas ℓ_1 e ℓ_2 da resposta ao impulso \mathbf{w}^0 , definida como

$$S(\mathbf{w}^0) \triangleq \frac{N}{N - \sqrt{N}} \left(1 - \frac{\|\mathbf{w}^0\|_1}{\sqrt{N} \|\mathbf{w}^0\|_2} \right). \quad (10)$$

A resposta ao impulso da planta utilizada, com comprimento $N = 512$ e grau de esparsidade $S(\mathbf{w}^0) = 0,90$, é obtida a partir do Modelo 1 definido na Recomendação G.168 da ITU-T [18]. Aqui, o sinal de entrada é branco com variância unitária σ_x^2 , variância do ruído de medição $\sigma_v^2 = 0,01$ ($\text{SNR}^1 = 20$ dB), passo de adaptação $\beta = 0,1$, limiar de convergência $K = 2 \times 10^{-2}$, fator de suavização $\alpha = 0,98$ e fator de ativação inicial $f_i(0) = 10^{-4}$.

A partir da Fig. 1, pode-se observar o instante em que o algoritmo EIAF-PNLMS troca a distribuição de ganho proporcional para uniforme, reduzindo o ganho dos coeficientes ativos. Note que a magnitude do coeficiente $w_{199}(k)$, no instante de mudança de ganho, já tinha alcançado seu valor em regime permanente [veja Fig. 1(a)]; a magnitude do coeficiente $w_{202}(k)$ está se aproximando do seu valor em regime permanente [veja Fig. 1(b)]; por outro lado, a magnitude do coeficiente $w_{196}(k)$ não está ainda nas proximidades de seu valor ótimo quando a distribuição de ganho é mudada [veja Fig. 1(c)]. Tais diferenças na proximidade dos coeficientes adaptativos, em relação aos seus valores ótimos, confirmam que pode ocorrer mudança de ganho para coeficientes ativos que ainda não atingiram a vizinhança K_0 , levando o algoritmo a atribuir ganho não proporcional a esses coeficientes.

¹SNR – signal-to-noise ratio (razão sinal-ruído).

Assim, considerando as características de convergência do algoritmo EIAF-PNLMS (ilustradas pela Fig. 1), na próxima seção, uma nova estratégia para implementar a distribuição de ganho do algoritmo EIAF-PNLMS é proposta. Visando aumentar a velocidade de convergência do algoritmo, após a mudança da política de ganho proporcional para não proporcional, a nova abordagem atribui ganho superior a $1/N$ a coeficientes com magnitude significativa quando $\psi(k) \leq K$.

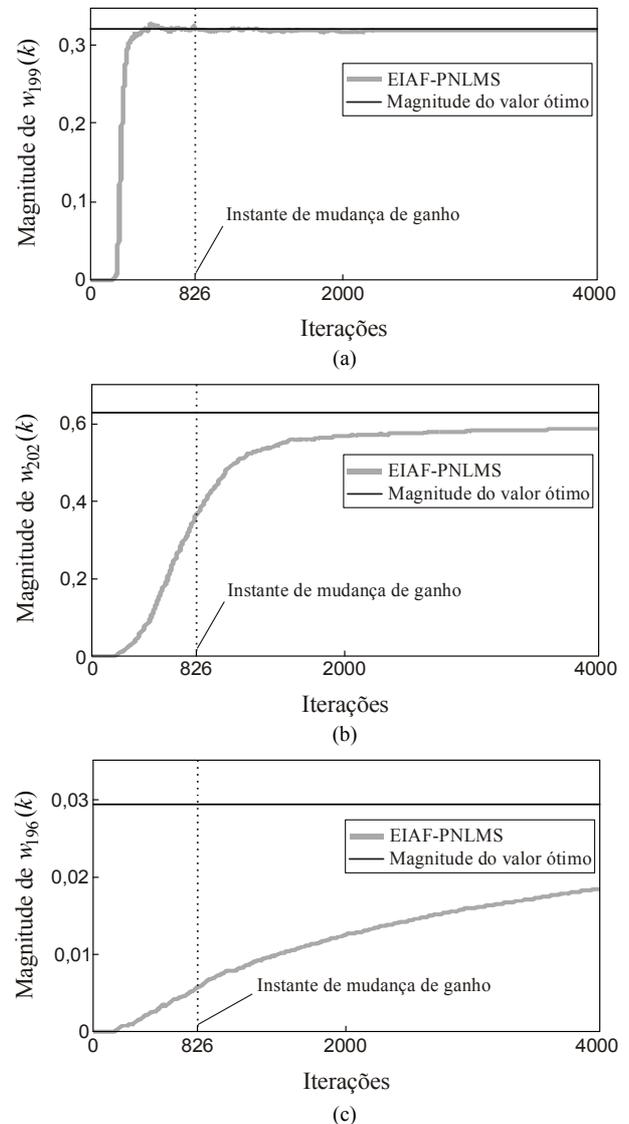


Fig. 1. Evolução da magnitude de alguns coeficientes adaptativos do algoritmo EIAF-PNLMS para resposta ao impulso \mathbf{w}^0 e dados de entrada brancos. (a) $|w_{199}(k)|$. (b) $|w_{202}(k)|$. (c) $|w_{196}(k)|$.

IV. ALGORITMO EIAF-PNLMS MODIFICADO

Nesta seção, uma nova estratégia de implementação da distribuição de ganho do EIAF-PNLMS é discutida. Em decorrência do fato de que há coeficientes ativos que ainda não atingiram a vizinhança K_0 no instante de mudança de ganho, a nova estratégia aloca ganho superior a $1/N$ (no entanto, inferior ao ganho proporcional) a coeficientes com magnitude significativa, em contraste com o algoritmo EIAF-PNLMS original que atribui o mesmo ganho a todos os coeficientes do filtro adaptativo. Assim, a expressão de ganho individual do algoritmo EIAF-PNLMS é substituída por

$$g_i(k) = \begin{cases} \frac{\lambda_i(k)}{\sum_{j=1}^N \lambda_j(k)}, & \psi(k) \leq K \\ \frac{\phi_i(k)}{\sum_{j=1}^N \phi_j(k)}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (11)$$

onde

$$\lambda_i(k) = \begin{cases} \lambda_a, & |w_i(k)| \geq \rho \max(|w_i(k)|) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (12)$$

sendo λ_a ($2 \leq \lambda_a \leq 6$) o ganho atribuído a coeficientes com magnitude significativa e ρ ($0,001 \leq \rho \leq 0,01$), o parâmetro que controla a quantidade de ganho atribuído aos coeficientes cuja magnitude é maior ou igual a $\rho \max(|w_i(k)|)$.

Visto que, para plantas com alta esparsidade a velocidade de convergência global é muito dependente da taxa de convergência dos coeficientes ativos, o algoritmo modificado aloca um ganho λ_a aos coeficientes mais significativos quando $\psi(k) \leq K$, dessa forma aumentando a velocidade de convergência. Observe que, apesar de o ganho alocado a coeficientes com magnitudes significativas no algoritmo EIAF-PNLMS modificado ser maior do que o alocado pelo EIAF-PNLMS original após a troca de distribuição de ganho, em geral, tal ganho é muito menor do que o ganho atribuído na fase proporcional; assim, a filosofia do algoritmo EIAF-PNLMS original, isto é, reduzir o ganho de coeficientes ativos que estejam na proximidade de seus valores ótimos, é mantida no EIAF-PNLMS modificado.

V. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, o desempenho do algoritmo EIAF-PNLMS modificado é avaliado. Para tal, simulações de Monte Carlo (média de 100 realizações independentes) são realizadas considerando um problema de identificação de sistema. Para todos os exemplos, é utilizada a resposta ao impulso da planta \mathbf{w}^0 [$S(\mathbf{w}^0) = 0,90$], sinal de entrada com média zero e variância σ_x^2 unitária, fator de suavização $\alpha = 0,98$, parâmetro de regularização $\xi = 10^{-4}$ e fator de ativação inicial $f_i(0) = 10^{-4}$. Para o algoritmo EIAF-PNLMS modificado, $\lambda_a = 4$ e $\rho = 0,001$.

A. Exemplo 1

Neste exemplo, o comportamento do algoritmo EIAF-PNLMS modificado é avaliado considerando um sinal de entrada branco e diferentes níveis de ruído de medição, isto é, 20, 30 e 40 dB. Para o algoritmo EIAF-PNLMS, o passo de adaptação é $\beta = 0,1$ e, para o modificado, é utilizado $\beta = 0,13$ para ruído de medição de 20 e 30 dB e $\beta = 0,11$ para 40 dB.

Aqui, para propósito de avaliação dos algoritmos, é usado o desalinhamento normalizado definido como (para detalhes, veja [7] e [16])

$$\kappa(k) \triangleq 10 \log_{10} \frac{\|\mathbf{w}^0(k) - \mathbf{w}(k)\|_2^2}{\|\mathbf{w}^0(k)\|_2^2}. \quad (13)$$

A Fig. 2 mostra as curvas de desalinhamento normalizado, dos algoritmos EIAF-PNLMS original e o modificado.

Observe que o algoritmo EIAF-PNLMS modificado apresenta melhores características de convergência, independentemente do nível do ruído de medição presente no sistema.

B. Exemplo 2

Este exemplo ilustra o comportamento do algoritmo EIAF-PNLMS modificado considerando uma perturbação na resposta ao impulso da planta. Para tal, usando o mesmo cenário do Exemplo 1 para SNR = 30 dB, a resposta ao impulso da planta \mathbf{w}^0 é deslocada de 12 amostras para a direita na iteração $k = 25000$. A Fig. 3 ilustra as curvas de desalinhamento normalizado dos algoritmos EIAF-PNLMS original e o modificado. A partir da Fig. 3, constata-se que o algoritmo modificado novamente apresenta características de convergência melhores do que a do EIAF-PNLMS original, mesmo na presença de perturbações abruptas na resposta ao impulso da planta.

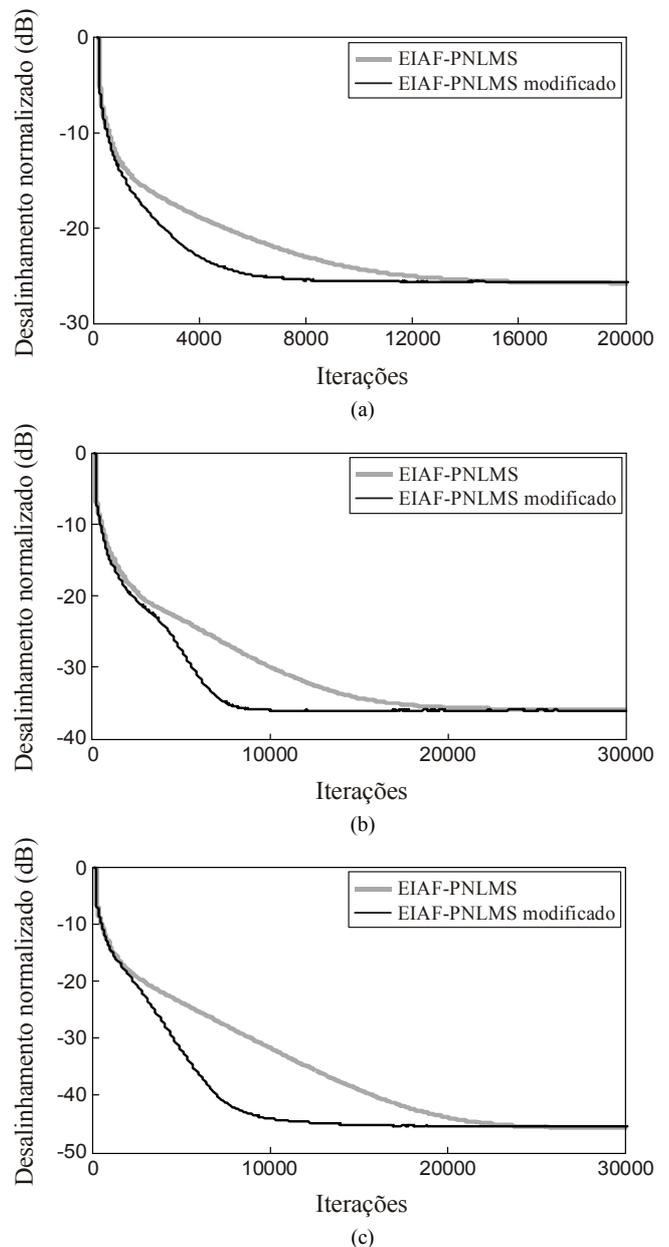


Fig. 2. Exemplo 1. Curvas de desalinhamento normalizado dos algoritmos EIAF-PNLMS original e o modificado para sinal de entrada branco. (a) SNR = 20 dB para $K = 2 \times 10^{-2}$. (b) SNR = 30 dB para $K = 2 \times 10^{-3}$. (c) SNR = 40 dB para $K = 3 \times 10^{-3}$.

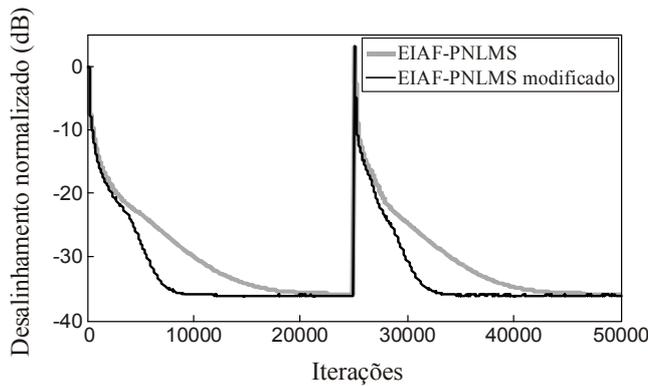


Fig. 3. Exemplo 2. Curvas de desalinhamento normalizado dos algoritmos EIAF-PNLMS original e o modificado para sinal de entrada branco e SNR = 30 dB. A resposta ao impulso da planta w^o é deslocada de 12 amostras para a direita na iteração $k = 25000$.

C. Exemplo 3

Aqui, o comportamento do algoritmo EIAF-PNLMS modificado é avaliado considerando um sinal de entrada correlacionado, obtido através de um processo AR(2), dado por

$$x(k) = 0,75x(k-1) - 0,75x(k-2) + \eta(k) \quad (14)$$

onde $\eta(k)$ é um sinal branco com variância $\sigma_\eta^2 = 0,36$, resultando em uma dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do vetor de entrada $\chi = 120$. Para o algoritmo EIAF-PNLMS, o passo de adaptação é $\beta = 0,1$ e para o modificado, $\beta = 0,13$. A Fig. 4 mostra as curvas de desalinhamento normalizado dos algoritmos avaliados. Note que o algoritmo EIAF-PNLMS modificado novamente supera o algoritmo original para o caso de dados de entrada correlacionados.

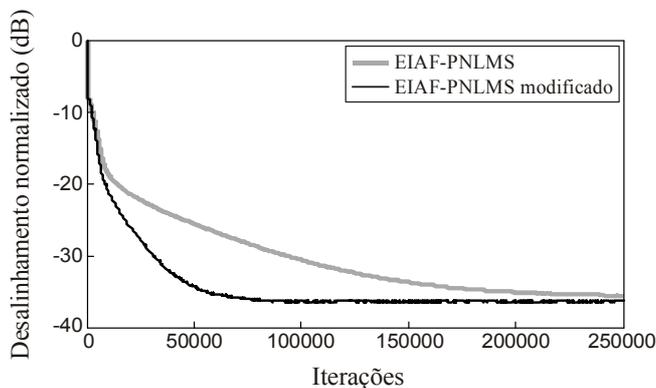


Fig. 4. Exemplo 3. Curvas de desalinhamento normalizado dos algoritmos EIAF-PNLMS original e o modificado para sinal de entrada correlacionado e SNR = 30 dB.

VI. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Neste trabalho, uma nova estratégia de implementação de distribuição de ganho para o algoritmo EIAF-PNLMS foi apresentada e discutida. Em contraste com o EIAF-PNLMS original, a distribuição de ganho do algoritmo EIAF-PNLMS modificado aloca ganho de adaptação superior a $1/N$ (no entanto, inferior ao ganho proporcional) a coeficientes com magnitude significativa após a mudança de política de ganho proporcional para não proporcional. Resultados de simulação

mostraram que o algoritmo EIAF-PNLMS modificado, para casos em que a resposta ao impulso da planta exibe alta esparsidade, apresenta características de convergência significativamente melhoradas, quando comparado com o algoritmo EIAF-PNLMS original.

REFERÊNCIAS

- [1] R. K. Martin, W. A. Sethares, R. C. Williamson, and C. R. Johnson, Jr., "Exploiting sparsity in adaptive filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 8, pp. 1883-1894, Aug. 2002.
- [2] Y. Huang, J. Benesty, and J. Chen, *Acoustic MIMO Signal Processing*. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [3] B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*. New Jersey: Prentice-Hall, 1985.
- [4] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
- [5] J. Cui, P. A. Naylor, and D. T. Brown, "An improved IPNLMS algorithm for echo cancellation in packet-switched networks," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Montreal, CA, May 2004, vol. 4, pp. 141-144.
- [6] D. L. Duttweiler, "Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers," *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 8, no. 5, pp. 508-518, Sep. 2000.
- [7] J. Benesty and S. L. Gay, "An improved PNLM algorithm," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Orlando, FL, May 2002, vol. 2, pp. 1881-1884.
- [8] F. das C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "Alternative approach for computing the activation factor of the PNLM algorithm," in *Proc. Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Glasgow, Scotland, Aug. 2009, pp. 2633-2637.
- [9] A. Deshpande and S. L. Grant, "A new multi-algorithm approach to sparse system adaptation," in *Proc. Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Antalya, Turkey, Sep. 2005, pp. 1-4.
- [10] H. Deng and M. Doroslovacki, "Improving convergence of the PNLM algorithm for sparse impulse response identification," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 12, no. 3, pp. 181-184, Mar. 2005.
- [11] P. Loganathan, A. W. H. Khong, and P. A. Naylor, "A sparseness-controlled proportionate algorithm for acoustic echo cancellation," in *Proc. Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Lausanne, Switzerland, Aug. 2008, pp. 1-5.
- [12] A. W. H. Khong and P. A. Naylor, "Efficient use of sparse adaptive filters," in *Proc. 40th Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput.*, Pacific Grove, CA, Oct 2006, pp. 1375-1379.
- [13] H. Deng and M. Doroslovacki, "Improving convergence of the PNLM algorithm for sparse impulse response identification," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 12, no. 3, pp. 181-184, Mar. 2005.
- [14] K. T. Wagner and M. I. Doroslovacki, "Gain allocation in proportionate-type NLMS algorithms for fast decay of output error at all times," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Taipei, Taiwan, April 2009, pp. 3117-3120.
- [15] K. Wagner and M. Doroslovacki, "Proportionate-type normalized least-mean-square algorithms with gain allocation motivated by mean-square-error minimization for white input," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 59, no. 5, pp. 2410-2415, May 2011.
- [16] F. das C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "A PNLM algorithm with individual activation factors," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 4, pp. 2036-2047, Apr. 2010.
- [17] F. das C. de Souza, R. Seara, and D. R. Morgan, "An enhanced IAF-PNLMS adaptive algorithm for sparse impulse response identification," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 6, pp. 3301-3307, Jun. 2012.
- [18] *ITU-T Recommendation G.168, Digital Network Echo Cancellers*, Geneva, Switzerland: Int. Telecomm. Union, 2007.