Classes de Códigos Coloridos em Superfícies com Gênero $g \geq 2$

Clarice Dias de Albuquerque e Reginaldo Palazzo Junior

***Resumo*— Neste artigo apresentamos as construções de três classes de códigos coloridos em superfícies compactas com gênero $g \geq 2$. Tais classes derivam das tesselações hiperbólicas $\{8,3\}, \{10,3\}$ e $\{12,3\}$ e possuem taxas de codificação assintoticamente iguais a $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$ e $\frac{1}{2}$, respectivamente. Além disso, a distância mínima dos códigos cresce com o gênero da superfície.**

***Palavras-Chave*— Códigos Coloridos, Códigos de Superfície, Tesselações Hiperbólicas, Códigos Quânticos.**

***Abstract*— In this paper we present the construction of three classes of color codes in compact surface with genus $g \geq 2$. Such classes are derived from the hyperbolic tessellations $\{8,3\}, \{10,3\}$ and $\{12,3\}$ and have coding rates asymptotically $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$ and $\frac{1}{2}$, respectively. In addition, the minimum distance of the codes grows with the surface genus.**

***Keywords*— Color Code, Surface Code, Hyperbolic Tessellations, Quantum Code.**

I. INTRODUÇÃO

É conhecido que a decoerência em um canal é um grande desafio para se realizar computação quântica e que os códigos quânticos corretores de erros (QECC) são um caminho para a superação dessa dificuldade. Dentre esses códigos, uma classe promissora é a dos códigos quânticos topológicos, que fazem uso de propriedades topológicas do sistema físico para desenvolver computação quântica tolerante à falhas.

Os códigos quânticos topológicos foram introduzidos por Kitaev [1] e são baseados em homologia-cohomologia. Sua construção se dá sobre o reticulado quadrado do toro, associando qubits às arestas, e operadores estabilizadores aos vértices e faces do reticulado. Assim, os códigos tóricos, como ficaram conhecidos, codificam $k = 2$ qubits em n *qubits*, onde n é o número de arestas do reticulado. A distância mínima do código é dada pelo menor ciclo homologicamente não-trivial do reticulado ou do reticulado dual, o que consiste no número de arestas contidas em um de seus eixos verticais ou horizontais. Uma generalização dessa construção para superfícies compactas com gênero $g \geq 2$ foi apresentada em [2]. Nesta generalização os códigos são descritos em tesselações hiperbólicas regulares de polígonos que geram as superfícies de gênero $g \geq 2$, ou g-toros.

A principal característica dos códigos topológicos é o contraste entre o caráter local dos geradores do estabilizador e o global dos erros não detectáveis, [3]. Isso implica na simplicidade dos geradores estabilizadores e na distância do código que cresce com o tamanho geométrico destes. Ou seja, a distância pode ser arbitrariamente grande mesmo que os geradores atuem sobre um número limitado de qubits.

Uma outra proposta de códigos estabilizadores topológicos é a dos códigos coloridos (*color codes*) introduzidos em [4]. Tais códigos possuem propriedades mais interessantes do que os códigos topológicos tradicionais. A maior vantagem dos códigos coloridos é que permitem a implementação transversal do grupo de Clifford cujos operadores são fundamentais em informação quântica, podem ser usados em protocolos de destilação e teleportação. Os códigos coloridos não são baseados em homologia-cohomologia, apesar de se fundamentar em certa homologia de triângulos, e também em uma propriedade geométrtica chamada *cor* para efeito de visualização. Nos códigos coloridos, os *qubits* estão localizados nos vértices de uma tesselação trivalente cujas faces devem ser 3-colorida, e os geradores do grupo estabilizador estão associados às faces da tesselação [4].

Considerando a importância dos códigos coloridos, e o fato dos códigos em superfícies de gênero $g \geq 2$ possibilitarem mais opções de tesselações e melhores parâmetros, além da conjectura de que tais códigos podem apresetar melhor probabilidade de erro ([5] e [6]), neste artigo apresentamos três classes de códigos coloridos em superfícies compactas com gênero $g \geq 2$ seguindo o princípio da generalização dos códigos tóricos proposta em [2], ou seja, considerando tesselações regulares adequadas do plano hiperbólico e a geometria inerente a este.

II. CÓDIGOS COLORIDOS

Os códigos coloridos são construídos em um reticulado bidimensional mergulhado em um toro de gênero arbitrário tal que: (i) o grafo seja trivalente, isto é, devem incidir três arestas em cada vértice, e (ii) deve ser 3-colorido, ou seja, possível colorir suas faces com três cores de tal modo que faces adjacentes não tenham a mesma cor. Por exemplo, são tomadas as cores vermelho, verde e azul. Pode-se anexar uma cor à aresta do reticulado de acordo com a face a ela conectada, de modo que uma aresta que conecta duas faces vermelhas é vermelha, e assim por diante, veja a Figura 1 da referência [7].

Os qubits estão associados aos vértices do reticulado e os geradores do grupo estabilizador estão associados às faces, para cada face f existem dois operadores B_f^X e B_f^Z. Seja I um conjunto de índices para os qubits no bordo de f, então:

$$B_f^\sigma = \bigotimes_{i \in I} \sigma_i,$$

Clarice Dias de Albuquerque ¸ CCT, Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte-CE, Brasil, E-mail: clarice.albuquerque@ufca.edu.br. Reginaldo Palazzo Junior, FEEC, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, E-mail:palazzo@dt.fee.unicamp.br.

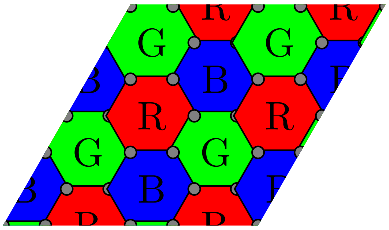

Fig. 1. Reticulado $\{6,3\}$ do toro planar.

onde $\sigma = X, Z$, [7].

Os códigos coloridos codificam o dobro de qubits dos códigos quânticos topológicos tradicionais, [4]. De fato, dado um reticulado de uma superfície, um código quântico topológico codifica $k = 2-\chi$ qubits, onde χ é a característica de Euler $\chi = V - E + F$, com V, E e F sendo, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces do reticulado em questão, ou ainda $\chi = 2-2g$, onde g é o gênero da superfície, assim $k = 2-(2-2g) = 2g$. Enquanto em um código colorido $k = 4 - 2\chi$, logo $k = 2(2 - \chi) = 4g$. Isso acontece porque nos códigos quânticos topológicos existem $F - 1$ operadores face e $V - 1$ operadores vértice independentes, ou seja, dois geradores são descartáveis [1], e como $k = n - s$, onde n é o comprimento do código $n = E$ e s é o número de geradores, $s = F + V - 2$, tem-se $k = E - F - V + 2 = 2 - \chi$. Já nos códigos coloridos, quatro geradores são descartáveis, [4]. Note que o número de qubits codificados depende apenas da superfície e não do reticulado.

A distância de um código colorido C é calculada a partir do menor comprimento entre aqueles operadores em Z que agem não-trivialmente em C, [4]. Assim, a distância é o comprimento mínimo entre caminhos com homologia não-trivial.

Assim como nos códigos quânticos topológicos originais, cada gerador age em um número limitado de qubits e cada qubit aparece em um número limitado de geradores, segue que os códigos coloridos são locais. Ou seja, independentemente do tamanho do código, as medidas necessárias para correção apresentam sempre a mesma dificuldade porque envolvem o mesmo número de qubits. Por outro lado, não há limite para a distância uma vez que ela cresce com o tamanho geométrico do código, devido ao fato dos operadores não-detectáveis ter um suporte topologicamente não-trivial, ou seja, dependem de caminhos com homologia não-trivial que, por sua vez, estão sobre geodésicas que ligam lados opostos do modelo planar da superfície.

Nos códigos de superfícies tradicionais a realização geométrica dos operadores de Pauli codificados tomam a forma de cordas fechadas sobre a superfície, enquanto nos códigos de cor podem ser definidos três tipos de cordas, uma para cada cor (vermelha, verde e azul), de modo que essas três cordas de cores diferentes podem confluir, [8].

Nos códigos de Kitaev a homologia é dada pelas curvas na superfície, a partir de um par de operadores bordo ∂, que transformam as faces em suas arestas e as arestas em seus extremos. No caso dos códigos coloridos, os operadores bordo relevantes são melhor visualizados no reticulado dual, composto inteiramente por faces triangulares, ∂ transforma os vértices em seus triângulos adjacentes e os triângulos em seus vértices. Assim, os grupos de homologia de triângulos contém duas cópias do grupo de homologia para as curvas em uma superfície, daí a razão dos códigos coloridos codificarem o dobro de qubits, [8]. Contudo, apesar dos códigos coloridos codificarem mais qubits, eles precisam de menos qubits para fazê-lo.

A grande vantagem dos códigos coloridos é que eles permitem a implementação transversal de portas lógicas unitárias Hadamard H e $\frac{\pi}{4}$ além das portas X, Z e $CNOT$ que os códigos de superfície tradicionais permitem. Essas portas geram o grupo de Clifford, composto pelos operadores que deixam invariante sob conjugação o grupo de Pauli. Tal grupo é suficiente para realizar protocolos de teleportação e destilação, e portanto, realizar computação universal, [8].

III. Novas Classes de Códigos Coloridos em Superfícies Compactas com $g \geq 2$

Para a construção dos códigos coloridos em superfícies com gênero $g \geq 2$, é necessário um polígono (hiperbólico) que corresponda ao modelo planar da supérficie e as tesselações desse polígono, assim como no caso do toro ($g = 1$) cujo modelo planar é dado por um retângulo e pode ter as tesselações quadrada, hexagonal e triangular. Como a obtenção do modelo planar e suas tesselações já foi apresentada com detalhes em [2] para a generalização dos códigos quânticos topológicos, aqui será feito um breve resumo dos pontos fundamentais para seu entendimento. Deve-se lembrar que em superfícies com gênero $g \geq 2$, a geometria a ser considerada é a *geometria hiperbólica*, portanto recomendam-se as referências [2], [9], [10], [11], [12] para maior compreensão desta seção.

Dada uma superfície compacta $\mathbf{M}$ com gênero $g \geq 2$, o modelo planar da mesma é dado por um polígono hiperbólico regular P' com p' arestas, chamado p'-gon, que satisfaz as condições de lado e ângulo para emparelhamento dos lados do polígono. Tais condições garantem que cada lado do polígono é emparelhado com um único outro lado do mesmo, e que a cada conjunto de vértices identificados pelo emparelhamento dos lados, a soma dos ângulos desses vértices é igual a 2π, [12].

Para gerar superfícies compactas de gênero $g \geq 2$, pode-se usar P' como um $4g$-gon, ou seja, polígonos de $4g$ lados com ângulos internos medindo $\frac{2\pi}{4g}$, com emparelhamento de lados opostos, [2].

De posse do modelo planar da superfície, procura-se agora, pelas tesselações hiperbólicas do mesmo.

Uma tesselação regular do plano hiperbólico, é uma cobertura de todo o plano por polígonos regulares, todos com o mesmo número de lados, sem superposições de tais polígonos, encontrando-se somente ao longo de arestas completas ou em vértices. Denota-se por $\{p, q\}$ a tesselação regular com q polígonos de p lados encontrando-se em cada vértice. A tesselação dual é dada por $\{q, p\}$.

Para que exista a tesselação hiperbólica, deve-se satisfazer a desigualdade $(p-2)(q-2) > 4$, devido ao fato da soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico ser menor que π.

Assim, as possíveis tesselações hiperbólicas $\{p, q\}$ do $4g$-gon são definidas por meio da equação (1)

$$\mu(P') = n_f \mu(P), \quad (1)$$

onde $\mu(P')$ é a área do $4g$-gon, $\mu(P)$ é a área do polígono da tesselação $\{p, q\}$ e n_f (o número de faces da tesselação) é um inteiro positivo, [2].

Lembrando que $\mu(P') = 4\pi(g-1)$, e que pelo Teorema de Gauss-Bonnet, a área de um triângulo hiperbólico é π menos a soma dos seus ângulos internos, obtém-se a equação (2)

$$n_f = \frac{4q(g-1)}{pq - 2p - 2q}, \quad (2)$$

[2].

A. Construção das Novas Classes de Códigos Coloridos

Neste artigo, iremos trabalhar com as tesselações $\{8, 3\}, \{10, 3\}$ e $\{12, 3\}$ do $4g$-gon que satisfazem as condições para definição de códigos coloridos, ou seja, tais tesselações são trivalentes ($q = 3$) e 3-colorida. Além disso, pode-se verificar que essas tesselações existem para todo gênero $g \geq 2$. De fato, substituindo os valores de p e $q = 3$ em (2), temos $n_f = 6(g-1)$ para a tesselação $\{8, 3\}$, $n_f = 3(g-1)$ para a tesselação $\{10, 3\}$ e $n_f = 2(g-1)$ para a tesselação $\{12, 3\}$.

Como foi visto na Seção II, o comprimento de um código colorido é dado por $n = V$, onde V é o número de vértices da tesselação, o número de qubits codificados é $k = 4g$ e a distância é o comprimento mínimo entre caminhos com homologia não-trivial, isto é, a distância será o mínimo entre o número de arestas do menor ciclo homologicamente não-trivial da tesselação e da tesselação dual. Tais ciclos são dados pelas geodésicas de menor comprimento que ligam os lados identificados de P', assim, em termos de arestas, o menor ciclo homologicamente não-trivial é o caminho sobre as arestas que mais se aproxima das geodésicas de menor comprimento. Esse conceito de distância coincide com a distância dos código quânticos topológicos dada em [2].

Como $n = V = n_f \frac{p}{q}$, temos $n = n_f \frac{p}{3}$, $k = 4g$, e a distância mínima d é dada pela equação (3), [2]

$$d_{TQC} = \lceil \frac{d_h}{l(p,q)} \rceil, \quad (3)$$

onde

$$d_h = 2 \text{ arccosh} \left[\frac{\cos(\pi/4g)}{\sin(\pi/4g)} \right], \quad (4)$$

e

$$l(p,q) = \text{arccosh} \left[\frac{\cos^2(\pi/q) + \cos(2\pi/p)}{\sin^2(\pi/q)} \right]. \quad (5)$$

Assim, para a tesselação $\{8, 3\}$, obtemos a classe de códigos coloridos com parâmetros $[[16(g-1), 4g, d]]$, para a tesselação $\{10, 3\}$, obtemos a classe de códigos coloridos com parâmetros $[[10(g-1), 4g, d]]$ e para a tesselação $\{12, 3\}$, obtemos a classe de códigos coloridos com parâmetros $[[8(g-1), 4g, d]]$.

Calculando a taxa de codificação $\frac{k}{n}$ para essas classes temos, assintoticamente $\frac{1}{4}$ para os códigos derivados da tesselação $\{8, 3\}$, $\frac{2}{5}$ para os códigos derivados da tesselação $\{10, 3\}$ e $\frac{1}{2}$ para os códigos derivados da tesselação $\{12, 3\}$. Tais classes existem para todo gênero $g \geq 2$.

A taxa topológica de correção de erros $\frac{n}{d^2}$ é melhor para o caso dos códigos coloridos em comparação com os códigos topológicos tradicionais, uma vez que a distância de ambos os códigos é a mesma e o comprimento do código é menor para o caso dos códigos coloridos.

As tabelas I, II e III mostram exemplos de códigos derivados das tesselações $\{8, 3\}, \{10, 3\}$ e $\{12, 3\}$, respectivamente, em superfícies de gênero $g = 2, 3, 4, 5$.

TABELA I

CLASSE DE CÓDIGOS COLORIDOS DERIVADOS DA TESSELAÇÃO $\{8, 3\}$.

$\{p, q\}$	g	n_f	d	$[[n, k, d]]$
$\{8, 3\}$	2	6	4,2049	$[[16, 8, 2]]$
$\{3, 8\}$	2	16	2	$[[16, 8, 2]]$
$\{8, 3\}$	3	12	5,4788	$[[32, 12, 3]]$
$\{3, 8\}$	3	32	2,6059	$[[32, 12, 3]]$
$\{8, 3\}$	4	18	6,3215	$[[48, 16, 4]]$
$\{3, 8\}$	4	48	3,0067	$[[48, 16, 4]]$
$\{8, 3\}$	5	24	6,9585	$[[64, 20, 4]]$
$\{3, 8\}$	5	64	3,3097	$[[64, 20, 4]]$

TABELA II

CLASSE DE CÓDIGOS COLORIDOS DERIVADOS DA TESSELAÇÃO $\{10, 3\}$.

$\{p, q\}$	g	n_f	d	$[[n, k, d]]$
$\{10, 3\}$	2	3	3,4773	$[[10, 8, 2]]$
$\{3, 10\}$	2	10	1,4403	$[[10, 8, 2]]$
$\{10, 3\}$	3	6	4,5307	$[[20, 12, 2]]$
$\{3, 10\}$	3	20	1,8767	$[[20, 12, 2]]$
$\{10, 3\}$	4	9	5,2276	$[[30, 16, 3]]$
$\{3, 10\}$	4	30	2,1653	$[[30, 16, 3]]$
$\{10, 3\}$	5	12	5,7543	$[[40, 20, 3]]$
$\{3, 10\}$	5	40	32,3835	$[[40, 20, 3]]$

TABELA III

CLASSE DE CÓDIGOS COLORIDOS DERIVADOS DA TESSELAÇÃO $\{12, 3\}$.

$\{p, q\}$	g	n_f	d	$[[n, k, d]]$
$\{12, 3\}$	2	2	3,2125	$[[8, 8, 2]]$
$\{3, 12\}$	2	8	1,1973	$[[8, 8, 2]]$
$\{12, 3\}$	3	4	4,1857	$[[16, 12, 2]]$
$\{3, 12\}$	3	16	1,56	$[[16, 12, 2]]$
$\{12, 3\}$	4	6	4,8295	$[[24, 16, 2]]$
$\{3, 12\}$	4	24	1,8	$[[24, 16, 2]]$
$\{12, 3\}$	5	8	5,3162	$[[32, 20, 2]]$
$\{3, 12\}$	5	32	1,9813	$[[32, 20, 2]]$

IV. CONCLUSÕES

Dada a importância dos códigos coloridos propostos em [4], e as vantagens das superfícies com gênero $g \geq 2$, neste trabalho é proposto a construção de algumas classes de códigos coloridos em tais superfícies. Apesar de ser mencionado na literatura a possibilidade dessa construção, não é explicitado nenhuma dessas que mostre as tesselações regulares ou que faça uso da geometria inerente a essas superfícies. Além disso, as classes apresentadas neste artigo são uma motivação para o trabalho futuro de generalização dos códigos coloridos em superfícies com gênero $g \geq 2$.

Analisando os códigos coloridos sob o ponto de vista da geometria hiperbólica inerente às superfícies com gênero $g \geq 2$, como feito na generalização dos códigos tóricos, explicitamos três classes de códigos coloridos. Tais códigos, derivados das tesselações hiperbólicas $\{8,3\}, \{10,3\}$ e $\{12,3\}$, possuem parâmetros $[[16(g-1), 4g, d]], [[10(g-1), 4g, d]]$ e $[[8(g-1), 4g, d]]$ e taxas de codificação assintoticamente $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$ e $\frac{1}{2}$, respectivamente. Essas tesselações existem para todo $g \geq 2$ e a distância mínima dos códigos cresce com o gênero da superfície. Além disso, a taxa de correção de erros $\frac{n}{d^2}$ é muito melhor para os códigos coloridos.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (processo n.$2013/25977-7$) e ao CNPq pelo suporte financeiro recebido durante o período desta pesquisa, e aos revisores pelas importantes sugestões e considerações.

Referências

[1] A. Yu. Kitaev, “Fault-tolerant quantum computation by anyons,” *Annals of Physics*, 303, pp. 2-30 2003.
[2] C. D. de Albuquerque, R. Palazzo Jr. and E. B. da Silva, “Topological quantum codes on compact surfaces with genus $g \geq 2$,” *J. Math. Phys.*, 50, pp. 023513, 2009.
[3] H. Bombin and M. A. Martin-Delgado, “Homological error correction: classical and quantum codes,” *J. Math. Phys.*, 48, pp. 052105, 2007.
[4] H. Bombin and M. A. Martin-Delgado, “Topological quantum distillation,” *Physical Review Letters*, vol. 97, pp. 180501, 2006.
[5] R. G. Cavalcante, H. Lazari, J. D. Lima and R. Palazzo Jr., in *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science - DIMACS Series, Editors A. Ashikhimin and A. Barg*, American Mathematical Society, vol. **68**, 145-177, 2005.
[6] E. B. Silva, M. Firer, S. R. Costa and R. Palazzo Jr., *Journal the Franklin Institute*, **343**, 69, 2006.
[7] P. Sarvepalli and R. Raussendorf, “Efficient decoding of topological color codes,” *Physical Review A*, vol. 5, pp. 022317, 2012.
[8] H. Bombin, “Órdenes Topológicos en Información y Computación Cuánticas,” *Tese de doutorado*, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Físicas, 2008.
[9] S. Katok, *Fuchsian Groups*. The University of Chicago Press, 1992.
[10] A. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag (New York), 1983.
[11] P. A. Firby and C. F. Gardiner, *Surface Topology*. Ellis Horwood series in mathematics and its applications, 1991.
[12] J. Stillwell, *Geometry of Surfaces*. Springer-Verlag, (2000).