

# Estimação DOA usando SEAD e Nelder-Mead Simplex

Lucas Rodrigues Ferreira e Rodrigo Pinto Lemos

**Resumo**— Antenas inteligentes são fundamentais nos sistemas móveis de última geração, pois conseguem mitigar interferências e rastrear usuários pela estimação das direções das frentes de onda incidentes. O estimador MODEX é muito difundido mas tem seu desempenho degradado em baixas relações sinal-ruído, devido a empregar a função objetivo de máxima verossimilhança. O SEAD utiliza a mesma função objetivo mas alcança melhor desempenho de estimação pois se baseia no espectro diferencial que é menos susceptível ao ruído. Assim, este trabalho propõe uma nova função objetivo baseada exclusivamente no espectro diferencial para melhorar o desempenho do SEAD em baixas relações sinal-ruído.

**Palavras-Chave**—DOA, ED, Nelder-Mead, SEAD.

**Abstract**— Smart antennas are fundamental in next-generation mobile systems because they can mitigate interference and track users by estimating the directions of arrival of signal wavefronts. MODEX is a widespread estimator but shows severely degraded performance at low signal-to-noise ratio scenarios due to the use of the maximum likelihood objective function. SEAD uses the same objective function but achieves better estimation performance since it is based on the differential spectrum, which is less susceptible to noise. Thus, this work proposes a new objective function based exclusively on the differential spectrum to improve the performance of SEAD at low signal-to-noise ratio scenarios.

**Keywords**—DOA, ED, Nelder-Mead, SEAD.

## I. INTRODUÇÃO

Os arranjos de “antenas inteligentes” têm experimentado uso crescente em comunicações móveis por serem capazes de aumentar a eficiência do sistema, expandir a área de cobertura e aumentar a capacidade de atendimento a usuários simultâneos. Isso é possível através da conformação dos diagramas de radiação do arranjo (*beamforming*) de tal forma a incrementar sua diretividade nas direções de incidência dos sinais de interesse, inserindo nulos nas direções dos sinais interferentes ou dos múltiplos percursos de reflexão do sinais. Neste sentido, a correta estimação dos ângulos de incidência das frentes de onda (DOA – *Direction Of Arrival*) torna-se de fundamental importância [1].

Muitos métodos de estimação DOA baseiam-se no critério de máxima verossimilhança (ML – *Maximum Likelihood*), que minimiza uma função objetivo não-linear e multimodal [2]. Dentre os métodos ML-DOA iterativos de alta resolução mais conhecidos, destacam-se o MODE (*Method Of Direction Estimation*) [3] que reparametriza o problema ML numa otimização quadrática; o MODEX (*MODE with eXtra roots*) [3], originário do MODE mas empregando raízes extras cujas combinações geram estimativas de DOA, selecionando-se a melhor através de um procedimento de ML. Apesar do desempenho de estimação do MODEX ser melhor do que o do MODE, a função objetivo de ML mostra-se muito sensível ao ruído, tornando-o menos confiável com a diminuição da relação sinal-ruído (SNR – *signal-to-noise ratio*) [3].

Na busca de um método mais robusto, foi criado o SEAD (*SEArch of direction by Differential spectrum*) [4] que utiliza a diferença entre os valores singulares principais da matriz de covariância espacial aumentada para gerar o espectro diferencial (ED), cujos picos permitem produzir estimativas iniciais para os DOA. O *Improved SEAD* [5] refina essas estimativas, minimizando a função objetivo de ML através de uma estratégia inspirada no *branch-and-bound*, o que resulta em um desempenho superior ao do MODEX em baixas SNR.

Assim, buscando melhorar o desempenho da estimação DOA em baixas SNR, neste trabalho se propõe um método alternativo que minimiza uma função objetivo baseada exclusivamente no ED em vez da função objetivo de ML [5].

Este trabalho está assim dividido: na seção II descreve-se o modelo de sinal e na seção III o método SEAD; o método proposto é descrito na seção IV e na seção V ele é avaliado. Finalmente, as conclusões serão apresentadas na seção VI.

## II. MODELO DE SINAL

Sejam  $M$  ondas planas de faixa estreita incidindo em um arranjo linear uniforme de  $K$  sensores espaçados entre si de metade do comprimento de onda da portadora, onde o número de fontes  $M < K$  é conhecido e os ângulos de incidência são medidos à partir da normal ao arranjo. O vetor das entradas nos  $K$  elementos de saída do arranjo, na presença de ruído aditivo gaussiano branco, é dado no instante  $n$  por [2]:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \mathbf{e}(n), \quad (1)$$

onde  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\omega_1) \dots \mathbf{a}(\omega_m)]$  é uma matriz  $K \times M$  de Vandermonde composta por vetores diretores  $K \times 1$   $\mathbf{a}(\omega_m) = [1 e^{-j\omega_m} \dots e^{-j(K-1)\omega_m}]^T$  para cada fonte  $m$ , sendo  $\omega_m = \pi \text{sen}(\theta_m)$  os ângulos elétricos relativos aos ângulos mecânicos  $\theta_m$ , para  $m = 1, 2, \dots, M$ . Além disso,  $\mathbf{s}(n)$  é um vetor  $M \times 1$  de amplitudes complexas do sinal e  $\mathbf{e}(n)$  é um vetor  $K \times 1$  de ruído aditivo [4]. A matriz de covariância espacial é obtida a partir do vetor de saída  $\mathbf{y}(n)$  como [4]:

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}, \quad (2)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade  $K \times K$ ,  $E\{\cdot\}$  é o operador esperança estatística,  $(\cdot)^H$  é o operador transposto conjugado (hermitiano),  $\sigma^2$  é a potência de ruído e  $\mathbf{P}$  é a matriz  $M \times M$  de correlação entre os sinais de um mesmo *snapshot*, cujos elementos  $P_{ij} = \rho_{ij}$  representam a correlação entre as fontes  $i$  e  $j$  [2].

## III. MÉTODO SEAD

No método SEAD [4], utiliza-se a diferença entre os dois valores singulares principais de uma matriz de covariância espacial aumentada  $\tilde{\mathbf{R}}(\omega)$  para gerar o ED.  $\tilde{\mathbf{R}}(\omega)$  resulta da adição a  $\mathbf{R}$  de uma matriz de teste  $\tilde{\mathbf{R}}(\omega)$  para cada ângulo elétrico  $\omega$  em  $(-\pi, \pi)$ , correspondente a  $\theta$  em  $(-90^\circ, 90^\circ)$  [4]:

$$\tilde{\mathbf{R}}(\omega) = \mathbf{R} + \tilde{\mathbf{R}}(\omega), \quad (3)$$

onde  $\tilde{\mathbf{R}}(\omega) = \overline{\sigma_{DOA}^2} \mathbf{a}(\omega)\mathbf{a}^H(\omega)$  e  $\overline{\sigma_{DOA}^2}$  corresponde à potência média das fontes.

Lucas Rodrigues Ferreira e Rodrigo Pinto Lemos, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação, Universidade Federal de Goiás, Goiânia-GO, Brasil. E-mails: lrf@engelet.grad.ufg.br; lemos@ufg.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Programa Jovens Talentos para a Ciência, CAPES.

As diferenças entre os dois maiores valores singulares de  $\tilde{\mathbf{R}}(\omega)$  produzem os valores do ED para cada  $\omega$  em  $(-\pi, \pi)$  [4]:

$$ED(\omega) = \lambda_1(\omega) - \lambda_2(\omega), \quad (4)$$

cujos picos de maior potência, selecionados após a aplicação de um limiar de amplitude, posicionam-se na vizinhança dos DOA. O *Improved SEAD* [5] contorna a baixa resolução do ED utilizando o critério de ML para determinar quantas fontes cada pico representa e gerar razoáveis estimativas iniciais dos DOA. Em seguida, essas estimativas são refinadas iterativamente pela minimização da função objetivo de ML através do algoritmo *branch-and-bound*.

#### IV. MÉTODO PROPOSTO

Considerando que a função objetivo de ML, por ser muito sensível ao ruído, compromete a qualidade das estimativas com a diminuição da SNR [5], este trabalho propõe empregar uma função objetivo baseada exclusivamente no ED para incrementar a acurácia da estimação DOA.

Neste sentido, dado o vetor  $\hat{\boldsymbol{\omega}} = [\hat{\omega}_{DOA,1} \ \hat{\omega}_{DOA,2} \ \dots \ \hat{\omega}_{DOA,M}]$  de estimativas iniciais do SEAD, para cada um dos ângulos  $\hat{\omega}_{DOA,i}$ ,  $i = 1, \dots, M$ , calcula-se a expressão analítica do ED para um única fonte, obtida em [5]:

$$\hat{ED}_i(\omega) = 2 \left\{ K + 2 \sum_{k=1}^{K-1} k \cos[(K-p)(\hat{\omega}_{DOA,i} - \omega)] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Os  $\hat{ED}_i(\omega)$  são então somados uns aos outros e normalizados para produzir um ED sintético que é então comparado ao ED original através do Erro Quadrático Médio (EQM):

$$EQM(\hat{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ ED(\omega) - \sum_{i=1}^M \hat{ED}_i(\omega) \right]^2 d\omega. \quad (6)$$

A Fig. 1 mostra a sobreposição do ED original na SNR de  $\perp 15$  dB (linha contínua) à sua aproximação pelo ED sintético (linha tracejada) para duas fontes posicionadas em  $10^\circ$  e  $15^\circ$ .

Como as estimativas iniciais do método SEAD se mostram razoavelmente próximas do mínimo global, empregou-se o algoritmo de Nelder-Mead (instrução *fminsearch* no Matlab<sup>®</sup>), para iterativamente gerar novos vetores  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ , selecionando-se como vetor ótimo de estimativas DOA aquele que minimiza o EQM em (6). O Nelder-Mead se baseia no método Simplex para encontrar o mínimo ou o máximo local de funções objetivo multidimensionais não-lineares com derivadas desconhecidas. Para  $N$  dimensões, esse algoritmo estuda o comportamento da função objetivo em  $N+1$  pontos e substitui iterativamente um deles para otimizar a função [6].

Para avaliar o desempenho da estimação DOA em relação à SNR utilizou-se a Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM). A Fig. 2 mostra as curvas de REQM do MODE, MODEX, *Improved SEAD* e do método proposto neste trabalho, para duas fontes decorrelacionadas em  $10^\circ$  e  $15^\circ$ , calculadas sobre 1000 simulações em Matlab<sup>®</sup> para cada SNR de  $-15$  dB e 10 dB a passos de 1 dB indicados pelas posições dos marcadores utilizados nas curvas, tomando-se 100 *snapshots* de 10 sensores espaçados de meio comprimento de onda entre si.

Embora tanto o desempenho do *Improved SEAD* quanto do método proposto sofram severa degradação para SNR menor que  $-10$  dB, observa-se que a proposta conseguiu melhorar significativamente a acurácia da estimação para SNR de  $-12$

dB a 2 dB. Porém, acima de 0 dB, o REQM estabilizou-se entre  $0,3^\circ$  e  $0,4^\circ$ , devido à resolução adotada no ED.

#### V. CONCLUSÕES

A otimização baseada exclusivamente no espectro diferencial melhorou significativamente a precisão do SEAD para estimação DOA em cenários com SNR muito baixas. Em cenários com SNR altas, a precisão da estimação ficou limitada à resolução do espectro, podendo ser ajustada àquela exigida por aplicações práticas, tais como em comunicações móveis. Pretende-se futuramente desvincular a otimização da resolução espectral.

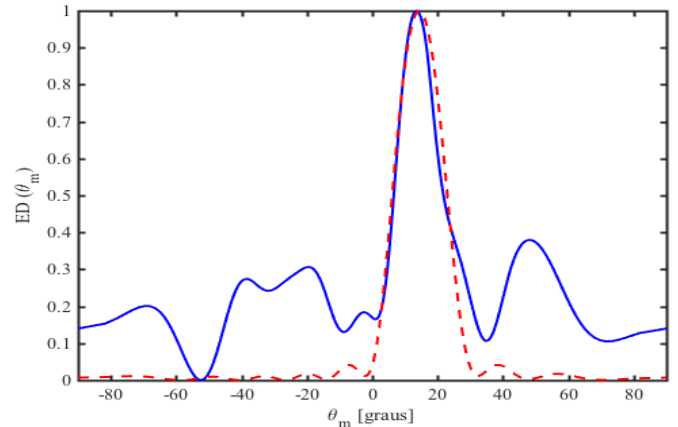


Fig. 1: Espectros diferenciais original (linha contínua) e sintético (linha tracejada) para fontes decorrelacionadas em  $10^\circ$  e  $15^\circ$ , SNR =  $-15$  dB.

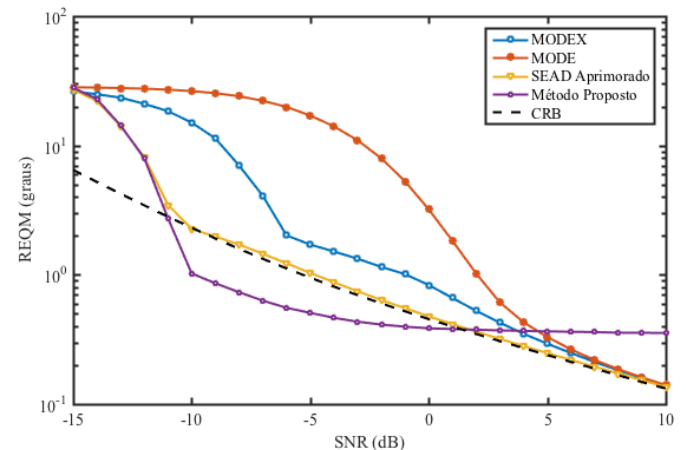


Fig. 2: Curvas de desempenho para fontes decorrelacionadas em  $10^\circ$  e  $15^\circ$ .

#### REFERÊNCIAS

- [1] J. C. Liberti e T. S. Rappaport. *Smart Antennas for Wireless Communications: IS-95 and Third Generation CDMA Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999.
- [2] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [3] A.B. Gershman e P. Stoica. "New MODE-based techniques for direction finding with an improved threshold performance". *Signal Processing*, v. 76, pp. 221-235, 1999.
- [4] Y. R. Ferreira e R. P. Lemos, "A new DOA estimation algorithm based on differential spectrum", *Proceedings of the 8th International Symposium on Signal Processing and Its Applications*, Sydney, Australia, pp. 303-307, 2005.
- [5] H. V. L. Silva, R. P. Lemos, Y. R. Ferreira e L. G. R. Guedes. "A branch-and-bound inspired technique to improve the computational efficiency of DOA estimation". *Signal Processing*, v. 93, pp. 947-56, 2013.
- [6] J. A. Nelder e R. Mead. "A simplex method for function minimization". *The Computer Journal*, v. 7, pp. 308-313, 1965.