

# Sistemas de Comunicação Digital Baseados no Atrator Caótico de Lorenz

Carlos E. C. Souza, Daniel P. B. Chaves e Cecilio Pimentel

**Resumo**— Este trabalho propõe uma metodologia para construção de sistemas de comunicação baseados na topologia do atrator caótico de Lorenz. Sua implementação é baseada na relação entre o fluxo caótico gerado pelas equações que definem o sistema e um diagrama de estados, construído a partir de uma seção de Poincaré. É definido um mapeamento entre sequências binárias e transições entre estados do diagrama, realizadas por segmentos de curvas que conectam sub-regiões da seção de Poincaré. Os sinais são transmitidos em um canal com ruído aditivo Gaussiano branco. É demonstrado que sistemas de comunicação baseados no atrator de Lorenz possuem desempenho superior aos sistemas projetados com o atrator de Rössler.

**Palavras-Chave**— Comunicação caótica, topologia de sistemas dinâmicos caóticos, dinâmica simbólica, controle de caos, probabilidade de erro.

**Abstract**— In this work we propose a methodology to design communication systems based on the topology of chaotic attractors. This methodology is based on the connection between the chaotic flux generated by the system equations and a state diagram, defined by a Poincaré section. We define a map between binary sequences and transitions on the diagram state. These transitions are performed by chaotic curves that connect subregions of the Poincaré section. The chaotic signals are transmitted over a additive white Gaussian noise channel. We demonstrate that chaotic communication systems based on Lorenz attractor have superior performance than communication systems based on Rössler attractor.

**Keywords**— Chaos based communications, topology of chaotic dynamical systems, symbolic dynamics, chaos control, error probability.

## I. INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos caóticos têm sido frequentemente utilizados no projeto de sistemas de comunicação baseados em caos [1], [2]. Uma classe particular de sistema dinâmicos caóticos é constituída por atratores caóticos tridimensionais, que são objetos formados pelas curvas solução do sistema dinâmico e possuem organização estrutural fractal [3]. Atratores caóticos podem ser classificados de acordo com as suas características topológicas [4], e as trajetórias caóticas vinculadas a estas características podem ser empregadas como formas de onda em sistemas de comunicação digital.

O interesse no desenvolvimento de sistemas de comunicação baseados em caos é devido a características que são inerentes a sistemas dinâmicos caóticos, tais como decorrelação, comportamento não periódico e espectro banda larga [3]. Os circuitos utilizados para gerar o comportamento caótico possuem fácil

implementação e boa eficiência energética, sendo potenciais candidatos para aplicações em comunicações. Neste caso, a modulação de sinais caóticos geralmente é feita por controle de caos [5], [6] ou sincronismo de osciladores caóticos [7], [8]. Sinais caóticos também são amplamente utilizados em sistemas com espalhamento espectral [9], [10].

Uma metodologia para projetar sistemas de comunicação baseada na topologia de atratores caóticos foi desenvolvida pelos autores [11]. Esta consiste em relacionar a topologia do atrator caótico a um diagrama de estados, e a transmissão de sequências binárias é feita pelo mapeamento de bits de informação em transições entre os estados do diagrama, que representam segmentos de curvas no atrator. A topologia do atrator impõe restrições nas transições do diagrama, indicando uma estrutura de modulação codificada. No referido trabalho, mostra-se um estudo de caso para o atrator de Rössler, e detalham-se procedimentos para melhorar o desempenho do sistema de comunicação.

No presente trabalho, utilizamos a metodologia proposta em [11] para projetar sistemas de comunicação baseados no atrator caótico de Lorenz. Apresentamos um novo procedimento, que se mostra vantajoso na topologia deste atrator, indicando uma relação entre a topologia e o desempenho do sistema. Para demonstrar a viabilidade da proposta, implementamos o sistema via simulação computacional. Os sinais caóticos gerados pelo atrator de Lorenz são transmitidos através de um canal com ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN, *additive white Gaussian noise*) e a sequência binária transmitida é estimada no decodificador pelo algoritmo de Viterbi. O desempenho do sistema é avaliado em termos da probabilidade de erro de bit.

Este trabalho é dividido em 6 seções. Na segunda seção, é feita uma breve introdução à topologia de atratores caóticos, necessária para o entendimento da metodologia proposta. Na terceira seção define-se o atrator de Lorenz e detalham-se os procedimentos necessários à implementação do sistema de comunicação. A quarta seção detalha as etapas do sistema de comunicação. A quinta seção mostra a análise de desempenho em um canal AWGN. Por fim, na sexta seção, são feitas as considerações finais.

## II. DESCRIÇÃO TOPOLÓGICA DE ATRATORES CAÓTICOS

Atratores caóticos são objetos geométricos constituídos por trajetórias definidas pelas soluções de sistemas dinâmicos caóticos, representadas no espaço de fase. Apesar da geometria complexa, de estrutura fractal, a organização topológica das trajetórias é simples e deriva de dois mecanismos básicos que geram o comportamento caótico: o mecanismo de expansão,

Carlos E. C. Souza, Daniel P. B. Chaves e Cecilio Pimentel, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil. E-mails: carlos.ecsouza@ufpe.br, daniel.chaves@ufpe.br e cecilio@ufpe.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq e pela FACEPE.

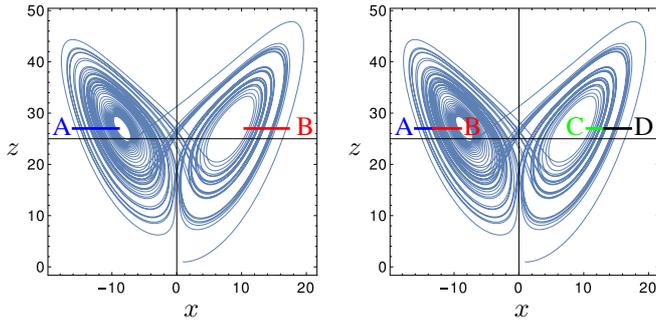


Fig. 1. Atrator de Lorenz em projeção no plano  $xz$  e sua seção de Poincaré com particionamento binário (esquerda) e quaternário (direita).

associado à sensibilidade às condições iniciais e o mecanismo de contração, associado ao comportamento recorrente [4]. Qualquer segmento de curva no atrator obedece a estes vínculos, que definem a topologia do atrator, da qual se deriva o comportamento das trajetórias na sua evolução dinâmica.

A evolução dinâmica de um atrator caótico  $N$ -dimensional pode ser descrita por sucessivos cruzamentos das curvas solução do sistema com uma superfície  $(N - 1)$ -dimensional, denominada seção de Poincaré. No caso de atratores tridimensionais, uma seção de Poincaré é uma superfície bidimensional tal que o fluxo caótico a atravessa a cada revolução. A análise dos sucessivos cruzamentos do fluxo caótico na seção de Poincaré associa o sistema dinâmico contínuo no tempo a um sistema discreto, reduzindo a dimensão do sistema de  $N$  para  $N - 1$ . Além disso, permite a definição de particionamentos aos quais se pode definir uma dinâmica simbólica [12], definindo uma codificação das órbitas. A dinâmica simbólica das órbitas pode ser utilizada para classificá-las e se relaciona com processos de transmissão de sequências binárias de informação. Antes de detalhar estes processos, vamos introduzir o atrator de Lorenz e analisar as suas características topológicas.

### III. O ATRATOR DE LORENZ: SEÇÃO DE POINCARÉ E CURVAS TÍPICAS

#### A. O Atrator Caótico de Lorenz

O atrator de Lorenz é definido pelo sistema de equações diferenciais ordinárias [13]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) = x(t)(\rho - z(t)) - y(t) \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - \beta z(t), \end{cases} \quad (1)$$

em que  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $\beta$  são os parâmetros de controle do sistema. Existem vários conjuntos de valores para os quais o sistema de Lorenz apresenta comportamento caótico. Em particular, neste trabalho, utiliza-se os valores  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  e  $\beta = 8/3$  [13]. O projeto de sistemas de comunicação baseados em atratores caóticos requer, inicialmente, a definição de uma seção de Poincaré conveniente. A próxima subseção discute a construção de uma seção da Poincaré para o atrator de Lorenz.

#### B. Seção de Poincaré: Construção e Particionamento

O atrator de Lorenz possui comportamento caracterizado por mudanças no sentido de rotação. Analisado em projeção no

plano  $xz$ , por exemplo, o fluxo caótico alterna entre a região positiva e negativa em relação à coordenada  $x$ . Quando na região negativa, o fluxo gira em sentido horário, enquanto ao passar à região positiva, o fluxo gira em sentido anti-horário.

Uma seção de Poincaré para o atrator de Lorenz comumente utilizada na literatura é composta de duas partes, de forma que o fluxo caótico as intercepta ao girar em ambos os sentidos. Para construir as duas partes da seção de Poincaré, utiliza-se dois semiplanos paralelos ao plano  $xy$  nas regiões positiva e negativa, em relação à coordenada  $x$ , e localizados em  $z = 27$  [14]. Para a transmissão de sequências binárias, é necessário definir um particionamento em duas sub-regiões, uma associada ao bit 0 e a outra ao bit 1 [15].

Nossa proposta é refinar o particionamento binário, introduzindo um particionamento em quatro regiões, e mapear bits de informação em segmentos de trajetórias caóticas que conectam as sub-regiões da seção de Poincaré. A Fig. 1 mostra o atrator de Lorenz, em projeção no plano  $xz$ , e sua respectiva seção de Poincaré, com o particionamento binário e quaternário.

O particionamento quaternário é definido pela cisão da sub-região  $A$  em duas sub-regiões  $A$  e  $B$ , e analogamente, pela cisão da sub-região  $B$  em duas sub-regiões  $C$  e  $D$ . Os pontos de cisão são encontrados experimentalmente, e dividem as sub-regiões binárias nos pontos onde ocorre a mudança dos dois comportamentos possíveis: incidir em um semiplano e reincidir no mesmo semiplano no próximo cruzamento, ou mudar de um semiplano para o outro na próxima intersecção. O refinamento do particionamento binário introduz restrições nas transições, decorrentes dos vínculos dinâmicos da topologia do atrator. Na sequência, vamos caracterizar as curvas de transição entre sub-regiões.

#### C. Curvas Típicas de Transições

No projeto de sistemas de comunicação baseados na topologia de atratores caóticos, as formas de onda caóticas que transmitem os bits de informação são as curvas de transição entre sub-regiões da seção de Poincaré, isto é, segmentos de trajetórias do fluxo caótico conectando as respectivas sub-regiões. Definindo o alfabeto  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$ , cada sub-região é denominada por um símbolo distinto  $s \in \mathcal{A}$ . Desta forma, uma curva de transição entre duas sub-regiões é identificada pela sequência  $s_1s_2$ , em que  $s_1, s_2 \in \mathcal{A}$ . Para representar cada uma das transições, é definida uma curva representativa da transição, que denominamos de *curva típica*. A curva típica de uma transição é gerada a partir da média entre várias curvas geradas na sub-região associada à respectiva transição. Curvas geradas na mesma sub-região são pequenas variações da curva típica, sendo menor esta variação quando a sub-região tem menor extensão.

O intervalo de tempo entre dois cruzamentos sucessivos na seção de Poincaré não é constante em atratores caóticos, devido à aperiodicidade do comportamento caótico. Idealmente, um sistema de comunicação deve ter tempo de sinalização constante, necessário para a sincronização de relógio do demodulador. Para solucionar este problema, definimos a variável angular  $\theta$ , que representa o ângulo formado entre o vetor definido pela seção de Poincaré e o vetor obtido conectando

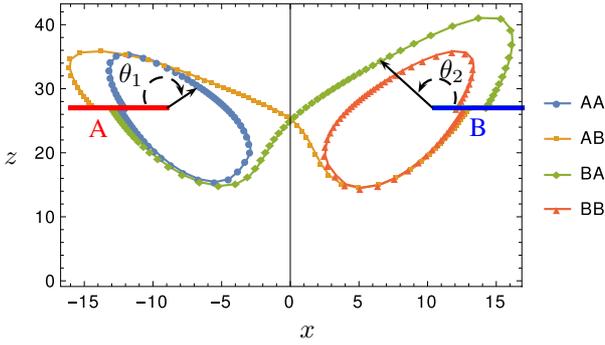


Fig. 2. Curvas típicas das transições do atrator de Lorenz em projeção no plano  $xz$  com particionamento binário. Também são mostrados os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , utilizados para definir a amostragem angular.

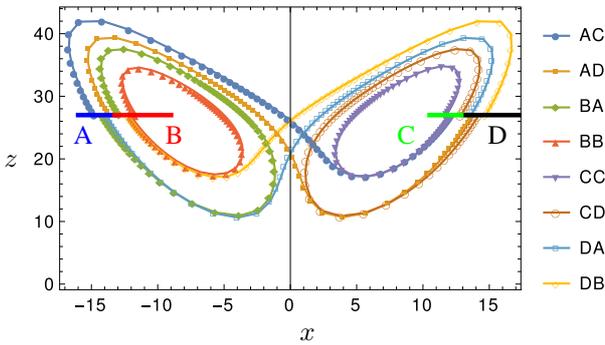


Fig. 3. Curvas típicas das transições no atrator de Lorenz em projeção no plano  $xz$  com particionamento quaternário.

o extremo da seção mais próximo da origem com um ponto da trajetória caótica, em projeção no plano  $xz$ . Desta forma, uma curva do atrator passa a ser discretizada pela variável angular  $\theta$ , com uma taxa de amostragem angular constante. Portanto, cada curva de transição possui um número fixo de amostras angulares. Para indicar a dependência do ângulo para a amostragem angular, representamos as variáveis que definem as curvas de transição por  $x = x(\theta)$ ,  $y = y(\theta)$  e  $z = z(\theta)$ . Como no atrator de Lorenz a seção de Poincaré é dividida em duas regiões, definimos o ângulo  $\theta_1$  quando  $x(\theta) < 0$  e  $\theta_2$  quando  $x(\theta) > 0$ . A Fig. 2 mostra as curvas típicas no atrator de Lorenz quando o particionamento é binário e os pontos definidos pela amostragem angular. Também são mostrados os dois ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . A Fig. 3 mostra as curvas típicas quando o particionamento é quaternário. Este procedimento garante periodicidade ao sistema em relação à variável angular  $\theta$ , com período  $2\pi$ , ou seja,  $\Delta\theta = |\Delta\theta_1| + |\Delta\theta_2| = 2\pi$ , em que  $\Delta\theta$  é a variação angular durante a transição, para qualquer transição. A próxima seção descreve as etapas necessárias para projetar o sistema de comunicação baseado na topologia do atrator de Lorenz.

#### IV. PROJETO DO SISTEMA DE COMUNICAÇÃO

##### A. Diagrama de Estados

As sub-regiões da seção de Poincaré podem ser associadas a estados em uma máquina de estados finitos, ou diagrama de estados. As transições entre os estados são representações

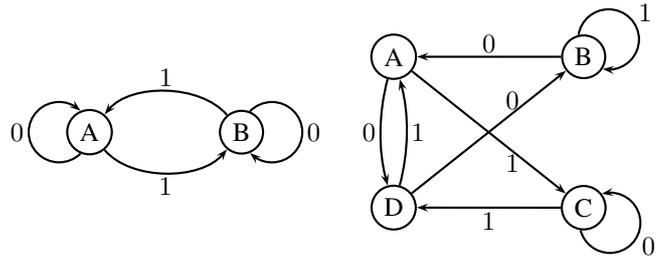


Fig. 4. Diagrama de estados do atrator de Lorenz para o particionamento binário (esquerda) e quaternário (direita). As rotulações dos diagramas também são mostradas.

dos segmentos de curvas do fluxo caótico que conectam as respectivas sub-regiões da seção de Poincaré. A evolução dinâmica do atrator caótico define sucessivos cruzamentos na seção de Poincaré, que geram sequências simbólicas  $S = \{s_0, s_1, s_2 \dots\}$ ,  $s_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Uma sequência simbólica  $S$  corresponde a uma sequência de visitação de estados do diagrama, que obedece às restrições entre as transições na seção de Poincaré, impostas pelas características topológicas do fluxo caótico.

No caso do particionamento quaternário, a topologia do fluxo caótico impõe restrições de transições no diagrama de estados. Pode-se ver na Fig. 3 que a partir de uma determinada sub-região existem apenas duas transições possíveis. Por exemplo, partindo do estado A, as transições AC e AD são as únicas possíveis. Ao contrário do caso quaternário, o particionamento binário permite qualquer transição, não havendo, portanto, restrição de transições, como mostra a Fig. 2. A Fig. 4 mostra o diagrama de estados binário e quaternário, com suas respectivas transições. A rotulação do diagrama também é mostrada na Fig. 4. Pode-se transmitir qualquer sequência binária, pois cada estado possui duas transições, associadas aos bits de informação 0 e 1. Para que ocorra a transição correspondente aos bits de informação 0 e 1, faz-se uso de controle de caos, para que o fluxo caótico seja direcionado ao intervalo da sub-região que induz a transição requerida [5].

##### B. Formas de Onda Caóticas

As formas de onda transmitidas em cada transição de estados são os sinais gerados pelas variáveis do sistema. Pode-se utilizar o sinal gerado por qualquer variável do sistema,  $x(\theta)$ ,  $y(\theta)$  ou  $z(\theta)$ . Neste trabalho, utiliza-se o sinal  $x(\theta)$  associado à transição desejada. Por exemplo, no caso binário, se o sistema se encontra no estado B e deseja-se transmitir o bit 1, o controle de caos induz a trajetória a realizar a transição BA (como indicado no diagrama da Fig 4). A Fig. 5 mostra as formas de onda caóticas  $x(\theta)$  para as transições indicadas no respectivo diagrama de estados.

No caso do particionamento quaternário, existem 8 transições possíveis, cujas formas de onda associadas estão ilustradas na Fig. 6. Analisando as formas de onda caóticas, observa-se que curvas distintas que partem de um mesmo estado são relativamente próximas entre si, o que indica que este sistema não é adequado para transmissão em um canal ruidoso. A

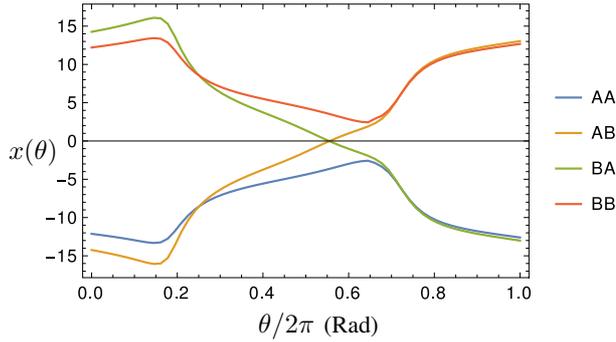


Fig. 5. Sinais caóticos  $x(\theta)$  das curvas típicas geradas pelo atrator de Lorenz com particionamento binário.

solução apresentada em [11] consiste em inverter as formas de onda associadas ao bit 0 (isto é, a curva original é multiplicada por  $-1$ ), formando um grupo de curvas invertidas e outro de curvas não invertidas. Este procedimento gera dois grupos aproximadamente antipodais, tal que a distância Euclidiana entre curvas de grupos diferentes seja a máxima possível sem alterar suas energias. Ao se aplicar esta estratégia ao atrator de Lorenz, verifica-se experimentalmente que a maior separação entre as curvas é obtida com inversão de apenas duas curvas associadas ao bit 0 ( $AD$  e  $DB$ ). Portanto, para a melhoria do desempenho deste sistema, novas formas de onda associadas ao atrator devem ser associadas às transições de estados, indicando uma relação entre a topologia do atrator e o projeto do sistema.

Nossa proposta para produzir um conjunto de curvas com boas propriedades de distância é introduzir uma nova variável, a qual denominamos  $\rho = \rho(\theta)$ , definida por

$$\rho(\theta) = \sqrt{x(\theta)^2 + y(\theta)^2 + z(\theta)^2}. \quad (2)$$

As formas de onda associadas às transições do diagrama agora são os sinais caóticos gerados por  $\rho(\theta)$ , ilustradas na Fig. 7. Implementando a inversão nas curvas que transmitem o bit 0, consegue-se dois grupos de curvas aproximadamente antipodais, garantindo, assim, uma boa separação entre curvas de grupos distintos. Assim, para se transmitir o bit 1, o sinal enviado é  $\rho(\theta)$  e para se transmitir o bit 0, envia-se  $-\rho(\theta)$ , com a transição escolhida de acordo com o estado no qual o sistema se encontra. Como existem quatro transições associadas ao bit 0 e quatro transições associadas ao bit 1, com restrições entre transições derivadas da topologia do fluxo caótico, pode-se interpretar este sistema como um sistema de modulação codificada. Na análise de desempenho a ser realizada na próxima seção, utilizaremos as variáveis  $x(\theta)$  e  $\rho(\theta)$  com particionamento binário e quaternário, com as inversões associadas ao bit 0 descritas nesta seção.

### C. O Sistema de Comunicação

O sistema de comunicação considerado neste trabalho é apresentado na Fig. 8. A seguir, descrevemos cada bloco desta figura.

1) *Fonte do Sinal Caótico*: O atrator de Lorenz é a fonte de sinal do sistema. Analisaremos o sistema com o sinal  $x(\theta)$  e com o sinal  $\rho(\theta)$ .

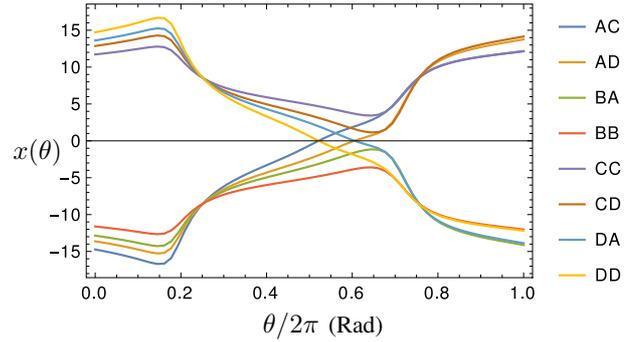


Fig. 6. Sinais caóticos  $x(\theta)$  das curvas típicas geradas pelo atrator de Lorenz com particionamento quaternário.

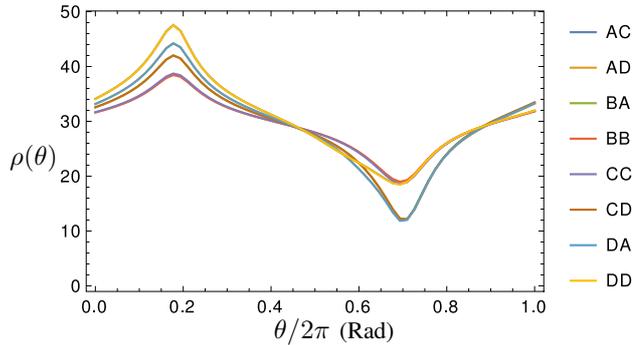


Fig. 7. Sinais caóticos  $\rho(\theta)$  das curvas típicas geradas pelo atrator de Lorenz com particionamento quaternário.

2) *Controle de Caos*: O bloco de controle é acoplado à fonte do sinal caótico e recebe a sequência binária de informação que deve ser transmitida. Este bloco induz as transições, direcionando as trajetórias caóticas para os respectivos intervalos dentro das sub-regiões [5]. Por exemplo, considerando o sistema quaternário da Fig. 4, se a trajetória incide na sub-região  $A$  e o bit de informação é o bit 0, o sistema deve direcionar a trajetória para o intervalo dentro da sub-região  $A$  que realiza a transição  $AD$ , associada ao bit 0. Quando a trajetória incide no intervalo desejado da sub-região, nenhum controle é aplicado.

3) *Modulador Bipolar*: O bloco de modulação bipolar transmite as amostras angulares geradas pelo sinal caótico  $x(\theta)$  ou  $\rho(\theta)$ , com  $0 < \theta < 2\pi$ , a cada tempo de sinalização. A cada intervalo fixo de tempo, o sinal  $s(t)$  transmite as amostras angulares das curvas de transição, obtidas da variável  $x(\theta)$  ou  $\rho(\theta)$ . Este bloco também recebe a sequência binária de informação, e tem a função de inverter os sinais caóticos associados ao bit 0.

4) *Canal*: O sinal  $s(t)$  é transmitido em um canal AWGN. O ruído  $n(t)$  é somado ao sinal  $s(t)$  e o receptor recebe o sinal  $r(t) = s(t) + n(t)$ .

5) *Decodificador*: O decodificador recebe o sinal ruidoso  $r(t)$  e estima a sequência binária transmitida utilizando o algoritmo de Viterbi, com incremento de métrica dado pela distância Euclidiana. Para a sincronização correta, a cada tempo de sinalização o receptor recebe o sinal associado a um segmento de curva com período angular  $2\pi$ .

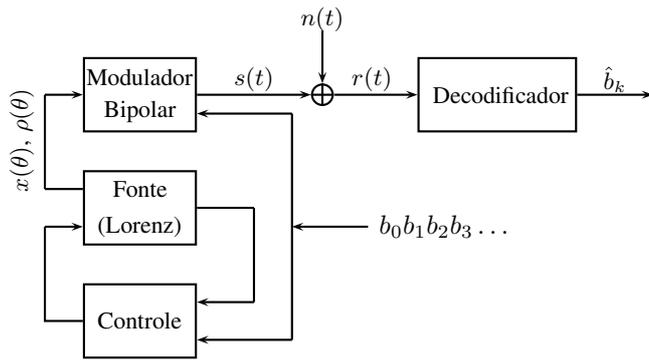


Fig. 8. Diagrama de blocos do sistema de comunicação.

Agora que o sistema de comunicação baseado na topologia do atrator de Lorenz foi detalhado, passemos à análise do seu desempenho.

### V. ANÁLISE DE DESEMPENHO

Nesta seção é feita a análise do desempenho obtido para os sistemas de comunicação baseados no atrator de Lorenz. A Fig. 9 mostra as curvas da probabilidade de erro de bit (BER, *bit error rate*) em função da relação sinal ruído (SNR, *signal to noise ratio*). As curvas de desempenho do sistema binário são pontilhadas.

Para o particionamento binário, há um ganho de aproximadamente 0,6 dB quando se utiliza o sinal  $\rho(\theta)$  em relação ao obtido com  $x(\theta)$  para um valor de BER de  $10^{-5}$ . O desempenho quando se utiliza o sinal  $\rho(\theta)$  é coincidente ao de um sistema BPSK, o qual incluímos para efeito de comparação. No caso do particionamento quaternário, a curva com sinalização  $x(\theta)$  (com inversão em *AD* e *DB*) apresenta um ganho de aproximadamente 0,2 dB em comparação ao desempenho obtido com o sistema de dois estados, também com sinalização  $x(\theta)$ . A sinalização  $\rho(\theta)$  possui um ganho de aproximadamente 1,6 dB em relação ao obtido com o sinal  $x(\theta)$ , e 1,2 dB em relação a um sistema BPSK. O refinamento do particionamento induz restrições nas transições, resultando em melhor desempenho em relação ao sistema binário, que não possui restrições. Além disso, o sistema Lorenz quaternário tem desempenho melhor que o sistema apresentado em [11], que utiliza o atrator de Rössler.

### VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentamos uma metodologia para o projeto e implementação de sistemas de comunicação baseados no atrator caótico de Lorenz. Mostramos como associar a evolução dinâmica do atrator a um diagrama de estados e mapear bits de informação em curvas características das transições entre estados do diagrama. Detalhamos as etapas e procedimentos necessários para a implementação do sistema e avaliamos o seu desempenho em relação à probabilidade de erro de bit.

Atratores caóticos são potenciais candidatos para construção de sistemas de comunicação baseados em caos. A metodologia

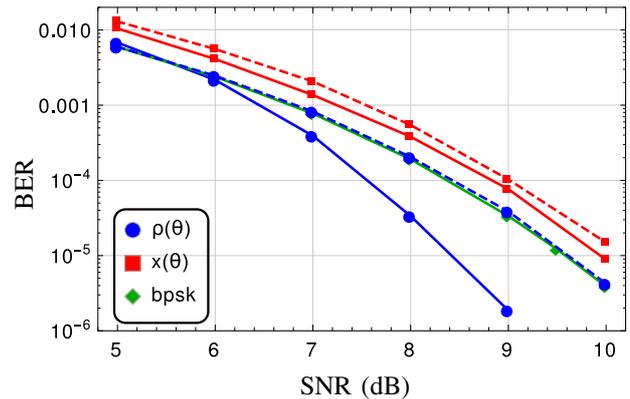


Fig. 9. BER versus SNR do sistema de comunicação baseado na topologia do atrator caótico de Lorenz com particionamento binário e quaternário. As curvas do sistema binário são mostradas em pontilhado.

desenvolvida neste trabalho, baseada na topologia do atrator de Lorenz, indica que o projeto do sistema de comunicação está relacionado à topologia do atrator. Apresentamos um novo procedimento para obtenção de ganho de desempenho, mostrando que a modulação baseada na topologia do caos possui flexibilidade para otimização de desempenho, com o custo de maior complexidade do sistema, apresentando um interessante compromisso entre desempenho e complexidade.

### REFERÊNCIAS

- [1] G. A. Abib and M. Eisencraft, "On the performance of a digital chaos-based communication system in noisy channels," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 11, pp. 976 – 981, 2015.
- [2] G. Kaddoum, M. Vu, and F. Gagnon, "Chaotic symbolic dynamics modulation in MIMO systems," in *2012 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, pp. 157–160, May 2012.
- [3] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Studies in Nonlinearity Series, Westview Press, 2001.
- [4] R. Gilmore and M. Lefranc, *The Topology of Chaos: Alice in Stretch and Squeezeland*. Wiley-VCH, second ed., 2012.
- [5] T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Using chaos to direct trajectories to targets," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65, pp. 3215–3218, Dec. 1990.
- [6] K. Pyragas, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback," *Physics Letters A*, vol. 170, pp. 421 – 428, Nov. 1992.
- [7] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 821–824, Feb. 1990.
- [8] R. T. Fontes and M. Eisencraft, "A digital bandlimited chaos-based communication system," *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul.*, vol. 37, pp. 374 – 385, Aug. 2016.
- [9] A. P. Kurian, S. Puthusserypady, and S. M. Htut, "Performance enhancement of DS/CDMA system using chaotic complex spreading sequence," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, pp. 984–989, May 2005.
- [10] G. Kaddoum, G. Gagnon, and F. Gagnon, "Spread spectrum communication system with sequence synchronization unit using chaotic symbolic dynamics modulation," *Int. J. Bifurcat. Chaos*, vol. 23, no. 02, pp. 1350019.1–1350019.14, 2013.
- [11] C. E. C. Souza, D. P. B. Chaves, and C. Pimentel, "Uma sistema de comunicação baseado na topologia de atratores caóticos," in *XXXIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, pp. 1–5, Sept. 2015.
- [12] C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Studies in Advanced Mathematics, CRC-Press, 1999.
- [13] E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," *J. Atmos. Sci.*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.
- [14] D. Viswanath, "Symbolic dynamics and periodic orbits of the lorenz attractor," *Nonlinearity*, vol. 16, p. 1035, April 2003.
- [15] H. P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi, "Uncovering missing symbols in communication with filtered chaotic signals," *Int. J. Bif. Chaos*, vol. 22, p. 1250199, Aug. 2012.