

# Fibrações Hopf e Modulações 4D

Fernando Alves Rodrigues <sup>1</sup>, Guilherme Penello Temporão <sup>2</sup>, Jean Pierre von der Weid <sup>3</sup>

**Resumo**— Neste artigo demonstrou-se que o projeto e escalonamento de constelações de sinais para modulações 4D podem ser parametrizados por meio de fibrações de Hopf discretas. Através de exemplos, verificou-se que a amostragem destas fibrações provê importantes informações complementares sobre o espaço de sinais destas modulações.

**Palavras-Chave**— Comunicações ópticas coerentes, modulações 4D, fibrações de Hopf, espaço de sinal multidimensional.

**Abstract**— In this paper is demonstrated that the design and scaling of signal constellations for 4D modulations can be parameterized using discrete Hopf fibration. Through examples, the sampling of discrete Hopf fibers provided important complementary information about the signal space of these modulations.

**Keywords**— Coherent fiber optic communications, 4D modulations, Hopf fibration, multidimensional signal space.

## I. INTRODUÇÃO

No cenário atual das comunicações ópticas coerentes, o projeto de modulações de alta ordem pode ser otimizado através de operações de rotação e translação de símbolos de constelações definidas por polítopos [1], [2], [3]. Dentro deste contexto, as modulações 4D baseadas na permutação de coordenadas de vetores ganharam grande notoriedade, impulsionadas principalmente pelo desenvolvimento dos sistemas ópticos baseados em multiplexação de polarização [4], [5], [6], [7]. É importante notar, entretanto, que diversas abordagens no projeto de modulações 4D tem sido realizadas por décadas [8], [9], [10]. Relevantes avanços foram obtidos. Contudo, quando consideramos requisitos integrados nos domínios óptico e elétrico dos sistemas de transmissão a complexidade dos formalismos algébricos e geométricos envolvidos torna-se evidente. Para fazer frente a estes desafios, apresenta-se neste artigo um método construtivo para o projeto de constelações 4D. A principal ferramenta do método apresentado é o formalismo matemático da *Fibração de Hopf* [11], [12], [13]. A fibração de Hopf foi descoberta em 1931 por Heinz Hopf e pode ser considerada como uma decomposição do espaço geométrico em subespaços denominados *fibras de Hopf*. Nas Seções (II) e (II-A) são demonstradas propriedades básicas deste formalismo no contexto das comunicações ópticas coerentes clássicas [14]. As exposições apresentadas neste trabalho evidenciam que fibrações Hopf são adequadas para a descrição de modulações quando consideramos requisitos integrados nos domínios óptico (polarização) e elétrico (amplitude e fase) dos sinais transmitidos. Para demonstrar esta premissa apresenta-se nas seções (III) e (IV) exemplos de aplicação do método construtivo aqui apresentado realizando-se a expansão da modulação 6PolSK-QPSK para um arranjo 14PolSK-8QAM.

## II. O FORMALISMO DA FIBRAÇÃO HOPF

Denota-se uma fibração de Hopf como  $(S^1 \times S^2) \rightarrow S^3$ . Isso significa que o espaço  $S^3$  é *fibrado* por grandes círculos  $S^1$  e um espaço base  $S^2$  [11], [13]. O espaço esférico  $S^3$  descrito pela equação  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$  é o local geométrico de vetores de quatro dimensões, onde  $x_i$  são coordenadas cartesianas e  $r$  é o raio da hipersfera. Para nosso propósito é também conveniente descrever o espaço  $S^3$  em coordenadas toroidais com três ângulos independentes  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\psi$ . [13].

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin(\theta) \cos(\phi); \\ x_2 &= r \sin(\theta) \sin(\phi); \\ x_3 &= r \cos(\theta) \cos(\psi); \\ x_4 &= r \cos(\theta) \sin(\psi); \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  e  $\psi \in [0, 2\pi]$ .

Para valores fixos de  $\theta$  a Equação (1) descreve a superfície de um toro [15]. Conforme descrito em [13], se impusermos uma relação linear entre os dois parâmetros  $\phi$  e  $\psi$  restará apenas um valor independente, que irá parametrizar uma curva sobre o toro  $S^3$ . Se a relação linear entre  $\phi$  e  $\psi$  resultar em valores constantes, então  $\psi$  definirá um conjunto de grandes círculos que nunca se cruzam. Desta forma, se escolhermos  $\theta$  para ser o ângulo de latitude de uma esfera  $S^2$ , a esfera  $S^3$  será *fibrada* por grandes círculos paralelos. Um exemplo da fibração que acabamos de descrever está ilustrado na Figura (1), onde uma projeção estereográfica foi usada para visualizar a pré-imagem da fibração de Hopf [12].

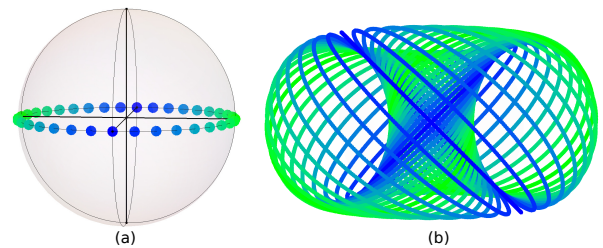


Fig. 1. (a) 36 pontos (fibras Hopf) sobre o equador de uma esfera  $S^2$ . (b) Projeção estereográfica da fibração de Hopf resultante (*toro de Hopf*) sobre a esfera  $S^3$ .

A capacidade de preencher um espaço geométrico com subespaços definidos está relacionada ao *problema do empacotamento de esferas* [16], [15]. No caso específico da fibração  $(S^1 \times S^2) \rightarrow S^3$ , as fibras de Hopf  $S^1$  são hipersferas de dimensão 1 que preenchem o espaço geométrico da hipersfera de dimensão 3. Este *empacotamento de hipersferas* estabelece uma relação entre as fibras de Hopf e a teoria da informação. Para reforçar este conceito, serão apresentadas na sequência algumas referências que contextualizam fibras de Hopf, polarização da luz e modulações 4D.

### A. A fibração de Hopf como um ferramenta de Engenharia

Em nosso contexto estamos interessados na fibração do espaço  $S^3$ . O espaço base  $S^2$  será a esfera de Poincaré [17] e, com o objetivo de harmonizar a notação, os parâmetros de Stokes ( $s_1, s_2, s_3$ ), serão associados à coordenadas esféricas na forma:

$$\begin{aligned} s_1 &= r \sin(\theta) \cos(\phi); \\ s_2 &= r \sin(\theta) \sin(\phi); \quad \theta = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; \quad \phi = [0, \pi]; \\ s_3 &= r \cos(\theta); \end{aligned} \quad (2)$$

em que  $r$  denota o raio da esfera e o par  $(\theta, \phi)$  representa, respectivamente, os ângulos de latitude e longitude na esfera unitária.

De posse dos parâmetros de Stokes ( $s_1, s_2, s_3$ ) na forma da Equação (2), pode-se extrair os ângulos  $(\theta, \phi)$  utilizando as seguintes relações:

$$\theta = \frac{1}{2} \left[ \text{sgn}(s_1) \arccos\left(\frac{s_3}{r}\right) \right], \quad \phi = \arctan\left(\frac{s_2}{s_1}\right) \quad (3)$$

em que  $\text{sgn}(s_1)$  indica o sinal do parâmetro  $s_1$ , para  $s_1 \neq 0$ .

Estabelecidas as convenções matemáticas para as diferentes representações de vetores na base  $S^2$ , pode-se agora introduzir o formalismo de Hopf no mapeamento da esfera de Poincaré para o espaço  $S^3$ . O objetivo é mapear vetores de Stokes que representam o estado de polarização da luz para o *espaço de fase* clássico onde residem os vetores 4D [14]. Neste contexto, a esfera  $S^3$  é definida da seguinte forma:

$$S^3 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \quad (4)$$

Em que  $z_1$  e  $z_2$  são dois números complexos da forma:

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1 + ix_2); \\ z_2 &= (x_3 + ix_4) \end{aligned} \quad (5)$$

Com base na definição da Equação (4) e utilizando os parâmetros angulares descritos na Equação (1), as quantidades  $z_1$  e  $z_2$  podem ser expressas pelas seguintes equações trigonométricas:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp\left(i\left(\psi + \frac{\phi}{2}\right)\right); \\ z_2 &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp\left(i\left(\psi - \frac{\phi}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (6)$$

Expandindo os termos da Equação (6), tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} z_1 &= \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\psi + \frac{\phi}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\psi + \frac{\phi}{2}\right) \right]; \\ z_2 &= \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\psi - \frac{\phi}{2}\right), -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\psi - \frac{\phi}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

As Equações (5) e (7) nos conduzem ao *mapa inverso de Hopf*, o qual será denotado neste artigo por *IHM*. Este mapa

é realizado através das seguintes equações paramétricas:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\psi + \frac{\phi}{2}\right); \\ x_2 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\psi + \frac{\phi}{2}\right); \\ x_3 &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\psi - \frac{\phi}{2}\right); \\ x_4 &= -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\psi - \frac{\phi}{2}\right); \end{aligned} \quad \begin{aligned} & 0 \leq \psi \leq 2\pi; \\ & -\frac{\pi}{2} < \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Em que  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  representam as coordenadas do vetor 4D. Os parâmetros angulares  $(\theta, \phi)$  em (8) são obtidos da equação (3). O ângulo  $\psi$  define, para valores fixos de  $(\theta, \phi)$ , as coordenadas de um grande círculo que é o lugar geométrico da respectiva fibra de Hopf  $S^1$ . Os pontos de latitude  $(0, 0, 1)$  e  $(0, 0, -1)$  apresentam singularidades que requerem uma regra própria para  $\psi$ .

$$\psi \rightarrow \psi - \frac{\pi}{4}; \quad \text{for } [\theta = 0, \phi = \pm\pi] \quad (9)$$

Aplicando *IHM* $(\theta, \phi, \psi)$ , é possível identificar as coordenadas de todos os vetores 4D *coplanares* que residem num grande círculo específico. Este procedimento é equivalente, portanto, em amostrar os vetores 4D a partir dos círculos discretos de Hopf. O mapeamento depende contudo da convenção de parametrização adotada. Utilizando as parametrizações da Equação (8), define-se um grupo de  $\mathbf{n}$  pontos base na esfera de Poincaré e um grupo de  $\mathbf{m}$  valores discretos do ângulo  $\psi$ . Esta parametrização permite a construção de modulações do tipo *nPolSK-mQAM* e conforme veremos a seguir na Seção (III) pode-se realizar, a partir deste mapeamento, operações equivalentes a rotações e escalonamento de arranjos de modulação. Até aqui definiu-se o mapeamento da esfera  $S^2$  para a esfera  $S^3$ . Um ponto forte do método de fibrações Hopf é que pode-se, de forma inversa ao procedimento da Equação (8), mapear  $S^3$  para  $S^2$  utilizando o mesmo formalismo. Para esta finalidade é conveniente seguir a notação utilizada por [14]. Isto significa que de posse das coordenadas de quatérnios unitários  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  em (8), o mapa  $S^3$  para  $S^2$  pode ser realizado por meio de uma formulação simples:

$$\begin{aligned} s_0 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2; \\ s_1 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2; \\ s_2 &= 2(x_1x_3 + x_2x_4); \\ s_3 &= 2(x_2x_3 - x_1x_4) \end{aligned} \quad (10)$$

A Equação (10) é conhecida como *mapa de Hopf*, em que  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$  são parâmetros de Stokes.

Através de manipulações algébricas é possível relacionar esta equação com a função de transferência simplificada de moduladores PMQ-MZM (Polarization Multiplexed Quadrature Mach-Zehnder) [18], [19], [20]. Desta forma, se mantidas as condições de *bias* em modo *push-pull* e de que os sinais elétricos  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  são vetores unitários, as relações apresentadas na Equação (10) podem representar o estado de polarização de sinais modulados por dispositivos PMQ-MZM. Esta característica dá um significado físico para a

Equação (10). Na próxima seção um exemplo de aplicação do formalismo já apresentado será utilizado na construção de uma modulação 14PolSK-8QAM. Conforme será demonstrado, a 14PolSK-8QAM reúne os símbolos da 6PolSK-8QAM e 8PolSK-8QAM no mesmo arranjo de modulação. Uma característica particularmente interessante que será evidenciada é o fato de que o arranjo 6PolSK-8QAM é na verdade a realização *rotacionada* de dois arranjos 6PolSK-QPSK congruentes [21]. Isto significa que uma rotação rígida de todos os símbolos 6PolSK-QPSK (vértices do politopo 24-Cell) gera a constelação 6PolSK-8QAM.

### III. 14POLSK-8QAM USANDO FIBRAÇÃO HOPF DISCRETA

Uma forma de construir uma modulação adaptativa consiste na definição de um arranjo de sinais como uma união de politopos [1], [2]. Um exemplo importante é a modulação 6PolSK-QPSK. A geometria desta modulação é fortemente associada ao politopo 24-Cell e este politopo por sua vez pode ser considerado como a união de outros dois politopos: o hipercubo 4D (tesseract) e o politopo 16-Cell. Se a Equação (10) for utilizada para realizar o mapa de Hopf dos 24 símbolos da modulação 6PolSK-QPSK, será observado que estes 24 quaternions projetam um *octaedro* na esfera de Poincaré. Os seis vértices deste *octaedro* representam seis estados de polarização do sinal modulado através dos seguintes vetores de Stokes:

$$s \in S^2 = [ (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1), (0, -1, 0), (1, 0, 0), (-1, 0, 0) ] \quad (11)$$

Os vetores da Equação (11) podem ser representados como pontos na esfera de Poincaré, conforme ilustra a Figura (2a).

Com base no método de fibração Hopf apresentado, a construção de uma modulação adaptativa pode ser realizada através da expansão do arranjo 6PolSK-QPSK concatenando-se novos vértices ao octaedro ilustrado. Uma possibilidade viável é utilizar os vértices do politopo convexo denominado *Hexaedro Tetrakis* [22]. O Hexaedro Tetrakis tem 14 vértices e 24 faces, suas 36 arestas formam 06 grandes círculos na esfera  $S^2$ . A forma geométrica padrão deste politopo pode ser representada como a união de dois subpolitopos disjuntos, um *octaedro* e um *hexaedro* (cubo). Estes dois subpolitopos disjuntos estão inscritos numa esfera unitária tridimensional conforme ilustrado na Figura (2b).

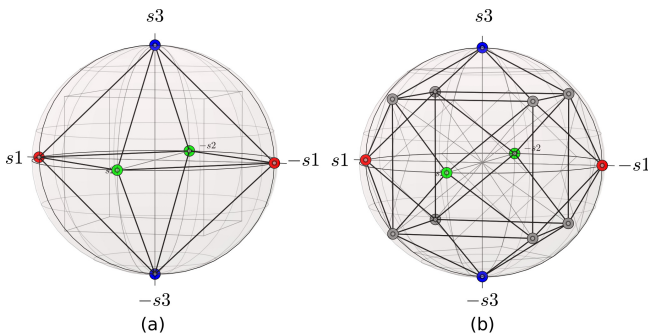


Fig. 2. (a) Símbolos 6PolSK formam um *Octaedro* na esfera de Poincaré (b) Símbolos 14PolSK formam um *Hexaedro Tetrakis* na esfera de Poincaré.

Em outras palavras, se tomarmos os 06 vértices resultantes da projeção da 6PolSK-QPSK e concatenarmos 08 vértices de um hexaedro regular, obteremos o Hexaedro Tetrakis conforme mostrado na Figura (2b). A realização do mapa inverso de Hopf dos 14 vértices do Hexaedro Tetrakis projeta o arranjo da modulação 14PolSK-mQAM, onde  $m$  denota o número de amostras do ângulo  $\psi$  na Equação (8). Utilizando as equações (2, 3 e 8), fibrações Hopf discretas foram amostradas em 08 valores igualmente discretos do ângulo  $\psi$ . Por conta destas características este método foi denominado *fibração de Hopf amostrada*, aplicada ao espaço de sinais 4D. A projeção estereográfica e o mapa de Hopf deste arranjo 14PolSK-8QAM podem ser visualizados na Figura (3).

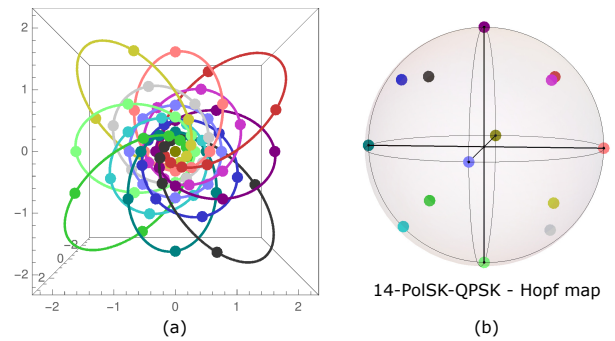


Fig. 3. (a) Fibração Hopf discreta para 14 pontos (vetores de Stokes) com 04 amostras cada e (b) Constelação 14PolSK-8QAM na esfera de Poincaré resultante do mapa de Hopf da fibração discreta.

Os valores da Equação (8) foram obtidos através de amostras para os seguintes valores de  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi_{amostra_1} &= \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\} \\ \psi_{amostra_2} &= \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

cada conjunto  $\psi_{amostra}$  gera símbolos de arranjos QPSK (4QAM) congruentes [21], a união destes conjuntos de amostras gera arranjos 8QAM. A 14PolSK-8QAM resulta, portanto, na união da 6PolSK-8QAM e da 8PolSK-8QAM. Seus 112 símbolos estão dispostos sobre 14 fibras de Hopf *discretas* e em cada fibra estão dispostos 08 símbolos numa *distribuição angular uniforme*. Assim, as distâncias entre os grandes círculos mostrados na Figura (3a) são definidas pelas distâncias entre os pontos de base relacionados (vértices do *Hexaedro Tetrakis* mostrados na Figura (2b)). Estas distâncias também são as mesmas na projeção do mapa de Hopf representado na Figura (3b). Conforme antecipado na Seção (II-A), se apenas os símbolos 6PolSK-8QAM forem considerados e selecionar-se alternativamente os vetores obtidos do conjunto  $\psi_{amostra_1}$  e do conjunto  $\psi_{amostra_2}$ , ter-se-á como resultado dois arranjos 6PolSK-QPSK congruentes, rotacionados do ângulo  $\pi/4$ . Este ângulo de deslocamento entre os arranjos de amostras é equivalente ao ângulo de rotação da matriz utilizada em [1] e [23] para rotacionar o politopo 24-Cell. Com base na parametrização utilizada, pode-se estender este raciocínio para todo conjunto de símbolos nPolSK-mQAM obtidos a partir do método construtivo apresentado.

#### IV. PARTIÇÕES QAM E A REPRESENTAÇÃO DE CAYLEY-DICKSON PARA QUATÉRNIOS

Quando o arranjo 14PolSK-8QAM é considerado como uma constelação única, pode-se retomar os sinais  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  obtidos a partir da Equação (8) e lembrando a Equação (5) podemos representá-los como dois números complexos da forma:

$$(x_1 + ix_2), (x_3 + ix_4)j \quad (13)$$

Esta representação é conhecida como a forma de Cayley-Dickson dos quatérnios [24], [25] e através dela é possível realizar o mapeamento dos símbolos 4D em duas partições bidimensionais (QAM). A representação gráfica da constelação 14PolSK-8QAM particionada em dois arranjos QAM é mostrada na Figura (4).

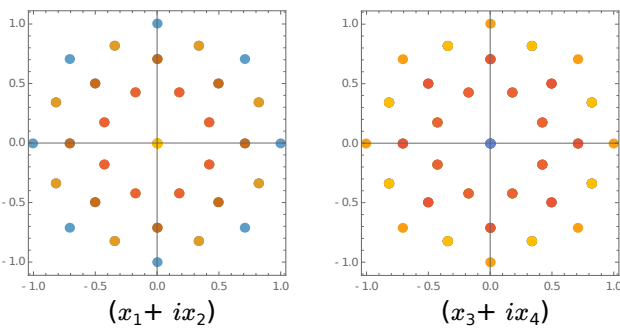


Fig. 4. Partição QAM da constelação 14PolSK-8QAM obtida diretamente da representação de Cayley-Dickson dos quatérnios unitários.

Seguindo a métrica de desempenho de constelações descrita em [26], a eficiência espectral da 14PolSK-8QAM é 3,4, a eficiência de potência é 0,4 e o valor de mérito da constelação é 0,478. Entretanto, esses resultados podem ser vistos de uma maneira diferente se a 14PolSK-8QAM for considerada como um arranjo adaptativo de constelações disjuntas. No diagrama ilustrado na Figura (5) ilustra-se algumas constelações de modulações conhecidas que estão incorporadas (embutidas) no arranjo 14PolSK-8QAM:

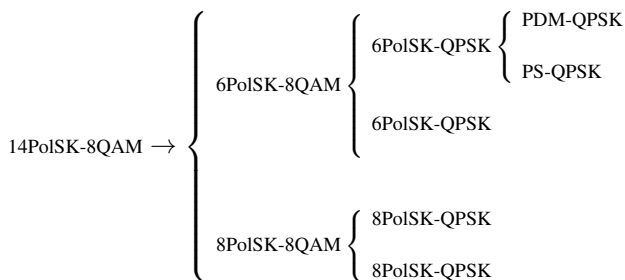


Fig. 5. Diagrama hierárquico de constelações conhecidas embutidas no arranjo 14PolSK-8QAM, organizadas de acordo com o número de símbolos.

O diagrama da Figura (5) também ilustra as versões rotacionadas das constelações 6PolSK-QPSK e 8PolSK-QPSK. É importante notar que a constelação PS-QPSK embutida no arranjo 6PolSK-QPSK é considerada a modulação 4D com maior eficiência energética [27], enquanto a PDM-QPSK é a modulação utilizada no conhecido padrão 100G [6]. Uma demonstração experimental da 8PolSK-QPSK

foi reportada por [28]. Conforme notado por [9], a diferença entre esquemas de transmissão PolSK e PDM é definida com base na forma como as partições de polarização são transmitidas. Se transmitidas de forma alternada teremos um esquema (PolSK), se transmitidas de forma simultânea teremos um esquema (PDM). Conclui-se portanto que a 14PolSK-8QAM pode ser utilizada como uma modulação adaptativa hierárquica que pode ser organizada de várias formas. Este arranjo pode ser composto, por exemplo, das seguintes modulações: PS-QPSK, PDM-QPSK, 6PolSK-QPSK, 6PolSK-8QAM, 8PolSK-QPSK, 8PolSK-8QAM e a própria 14PolSK-8QAM.

Sobre o método de fibração Hopf e suas propriedades aplicadas no projeto de modulações 4D ressalta-se as seguintes características:

- As distâncias entre os planos geométricos (grandes círculos) onde residem as fibras Hopf são definidas pelas distâncias entre os vetores de Stokes utilizados como pontos base. Logo se um código esférico uniforme for utilizado como base em  $S^2$  [29], [30], ter-se-á como resultado uma modulação 4D em que a fibração estará uniformemente espaçada;
- O projeto de modulações 4D utilizando fibrações Hopf é um método construtivo que difere de outras abordagens baseadas na permutação de coordenadas de vetores [8], [9], [5]. Como vantagem convém citar a relação direta entre os vetores símbolos das modulações e as características físicas do sinal a ser transmitido. Esta relação direta ocorre tanto no domínio óptico (esfera de Poincaré), quanto no domínio elétrico (vetores na esfera  $S^3$ ). Um exemplo importante é o fato de que a escolha de determinados vetores de Stokes define *a priori* o *espectro de polarização do sinal* [31].
- Os vértices embutidos das fibras de Hopf refletem em vértices embutidos nas fibrações [2]. Logo um politopo composto de subpolitopos na esfera  $S^3$  tende a gerar um politopo composto de subpolitopos na esfera  $S^2$ ;
- Uma desvantagem observada no método de fibração Hopf é a forte dependência na parametrização utilizada;

#### V. TRABALHOS FUTUROS

A fibração de Hopf da esfera  $S^3$  pode ser realizada sob várias perspectivas e uma abordagem particularmente interessante é realizada sobre o politopo  $\{3, 3, 5\}$  (600-Cell) [13], [32], [33]. Mantendo a perspectiva descrita em [13], pode-se utilizar como base  $S^2$  os 42 vértices do politopo *Icosidodecaedro Pentakis*. O *Icosidodecaedro Pentakis* é uma projeção ortogonal centrada em vértices da 600-Cell que incorpora vários subpolitopos em três dimensões. O *Icosidodecaedro Pentakis* pode ser obtido pela subdivisão do *Icosaedro* [34], incluindo entre seus subpolitopos o *Octaedro* utilizado como base para gerar o arranjo 6PolSK-8QAM. Desta forma é possível, em tese, gerar uma constelação 42PolSK-mQAM adequada para uso num arranjo de modulação adaptativa.

## VI. CONCLUSÕES

A fibração de Hopf discreta amostrada sobre a esfera  $S^3$  foi realizada usando-se como espaço base a esfera  $S^2$ . As parametrizações dos pontos de base foram obtidas a partir de vetores de Stokes na esfera de Poincaré. Os vetores de Stokes, por sua vez, foram associados a códigos esféricos estruturados. Usando como exemplo o projeto da modulação 14PolSK-8QAM, verificou-se que a fibração Hopf discreta amostrada permite a realização de operações complexas de rotação e escalonamento de modulações 4D comumente utilizadas em comunicações ópticas coerentes. Observou-se também que as informações complementares sobre a geometria do espaço de sinal podem ser úteis no processamento de sinais ópticos devido à ligação explícita entre a distância dos pontos base  $S^2$  e a distância entre as fibras de Hopf. Foi demonstrada a expansão de uma constelação 6PolSK-QPSK através da concatenação de vértices ao politopo 3D resultante do mapa de Hopf da referida constelação. Verificou-se ainda, com base na parametrização adotada neste artigo, que o arranjo 6PolSK-8QAM consiste na realização rotacionada de dois arranjos 6PolSK-QPSK congruentes. Isto significa que a constelação 6PolSK-8QAM pode ser obtida por uma rotação rígida no espaço 4D de todos os símbolos 6PolSK-QPSK (vértices do politopo 24-Cell). De forma equivalente a mesma constelação 6PolSK-8QAM foi obtida através de amostras angulares alternadas realizadas sobre os grandes círculos das fibras Hopf. Com base nos resultados demonstrados, concluiu-se que o projeto de modulações 4D utilizando o método construtivo aqui apresentado é de interesse prático para o desenvolvimento de transceptores adaptativos para comunicações ópticas coerentes.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos revisores por seus valiosos comentários no artigo. Agradecimentos à agência de financiamento CAPES, à Diretoria de Metrologia Científica e Qualidade Industrial (Dimci) do INMETRO e CETUC (PUC-Rio).

## REFERÊNCIAS

- [1] E. Agrell and M. Karlsson, "On the Symbol Error Probability of Regular Polytopes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 57, no. 6, pp. 3411–3415, June 2011.
- [2] J. Adams, P. Zvengrowski, and P. Laird, "Vertex Embeddings of Regular Polytopes," *Expositiones Mathematicae*, vol. 21, no. 4, pp. 339–353, 2003.
- [3] M. Karlsson, "Four-dimensional Rotations in Coherent Optical Communications," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 32, no. 6, pp. 1246–1257, March 2014.
- [4] P. Johannisson, M. Sjodin, T. A. Eriksson, and M. Karlsson, "Four-dimensional modulation formats for long-haul transmission," in *Conference on Optical Fiber Communication, Technical Digest Series*, 2014.
- [5] S. Ishimura and K. Kikuchi, "Multi-dimensional permutation-modulation format for coherent optical communications," *Opt. Express*, vol. 23, no. 12, pp. 15 587–15 597, jun 2015.
- [6] P. J. Winzer, "Beyond 100g ethernet," *IEEE Communications Magazine*, vol. 48, no. 7, pp. 26–30, July 2010.
- [7] T. Optical and I. Forum, "Technology Options for 400G Implementation," *Forum*, no. July, pp. 1–46, 2015.
- [8] G. Welti and J. Lee, "Digital transmission with coherent four-dimensional modulation," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 20, no. 4, pp. 497–502, jul 1974.
- [9] L. Zetterberg and H. Brandstrom, "Codes for Combined Phase and Amplitude Modulated Signals in a Four-Dimensional Space," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 25, no. 9, pp. 943–950, sep 1977.
- [10] M. Visintin, E. Biglieri, and V. Castellani, "Four-dimensional signaling for bandlimited channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 234, pp. 403–409, feb 1994.
- [11] D. W. Lyons, "An Elementary Introduction to the Hopf Fibration," *Mathematics Magazine*, vol. 76, no. 2, pp. 87–98, 2003. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/3219300>
- [12] J. V. Waite, "The Hopf Fibration and Encoding Torus Knots in Light Fields," M.s.C.Thesis - Available online at <http://digitalscholarship.unlv.edu/thesesdissertations/2756/>, University of Nevada, Las Vegas, 2016.
- [13] C. Bartocci, L. Boi, and C. Sinigaglia, *New Trends in Geometry: Their Role in the Natural and Life Sciences*. Imperial College Press, 2011, ch. The Geometry of Dense Packing and Biological Structures.
- [14] M. R. Dennis and M. A. Alonso, "Swings and Roundabouts: Optical Poincaré Spheres for Polarization and Gaussian Beams," *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Math., Phys. and Eng. Sciences*, vol. 375, no. 2087, jan 2017.
- [15] C. Torezzan, S. I. R. Costa, and V. A. Vaishampayan, "Constructive Spherical Codes on Layers of Flat Tori," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 59, no. 10, pp. 6655–6663, Oct 2013.
- [16] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. New York, NY: Springer New York, 1999, ch. Coverings, Lattices and Quantizers, pp. 31–62.
- [17] E. Wolf, *Appendix A: Lie Groups in Polarization Optics*, ser. Progress in Optics. Elsevier Science, 2006, no. vol. 49, pp. 368–371.
- [18] M. Seimetz, "Transmitter Design," in *High-Order Modulation for Optical Fiber Transmission*, ser. Springer Series in Optical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [19] A. Chen and E. Murphy, *Broadband Optical Modulators: Science, Tech., and Applications*. CRC Press, 2011.
- [20] Optical Networking Forum, "Implementation Agreement for Integrated Polarization Multiplexed Quadrature Modulated Transmitters v01.1," Tech. Rep., 2013. [Online]. Available: <http://www.oiforum.com/public/impagreements.html>
- [21] G. Rote, *Congruence Testing of Point Sets in Three and Four Dimensions*. Cham: Springer International Publishing, 2016, pp. 50–59.
- [22] J. Conway, H. Burgiel, and C. Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, ser. Ak Peters Series. Taylor & Francis, 2008, ch. Naming the Archimedean and Catalan polyhedra and tilings, p. 284.
- [23] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. New York, NY: Springer New York, 1999, no. 4, ch. Certain Important Lattices and Their Properties, pp. 117–119.
- [24] T. A. Ell, N. L. Bihan, and S. J. Sangwine, *Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing*, ser. FOCUS Series. Wiley, 2014, ch. Quaternion Algebra, pp. 1–19.
- [25] S. J. Sangwine and N. L. Bihan, "Quaternion polar representation with a complex modulus and complex argument inspired by the Cayley-Dickson form," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 20, no. 1, pp. 111–120, 2010.
- [26] M. Karlsson and E. Agrell, "Four-dimensional optimized constellations for coherent optical transmission systems," in *European Conference on Optical Communication, ECOC*, vol. 1-2, 2010.
- [27] E. Agrell and M. Karlsson, "Which is the most power-efficient modulation format in optical links?" *Optics Express*, vol. 17, no. 13, pp. 10 814–10 819, 2009.
- [28] M. Chagnon, M. Osman, Q. Zhuge, X. Xu, and D. V. Plant, "Analysis and experimental demonstration of novel 8PolSK-QPSK modulation at 5 bits/symbol for passive mitigation of nonlinear impairments," *Opt. Express*, vol. 21, no. 25, pp. 30 204–30 220, Dec 2013.
- [29] R. Hardin, N. J. Sloane, and W. D. Smith, "A library of putatively optimal coverings of the sphere with n equal caps," 1987.
- [30] R. Hardin, N. Sloane, and W. Smith, "Tables of spherical codes with icosahedral symmetry."
- [31] J. Flamant, P. Chainais, and N. L. Bihan, "Polarization spectrogram of bivariate signals," in *2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, mar 2017, pp. 3989–3993.
- [32] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Algebraic Constructions for Lattices*. New York, NY: Springer New York, 1993, pp. 206–244.
- [33] J. Liu and A. R. Calderbank, "The Icosian Code and the E8 Lattice: A New 4 x 4 Space-Time Code with Non-vanishing Determinant," in *2006 IEEE International Symposium on Information Theory*, July 2006, pp. 1006–1010.
- [34] N. Wang and J.-L. Lee, "Geometric Properties of the Icosahedral-Hexagonal Grid on the Two-Sphere," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 33, no. 5, pp. 2536–2559, 2011.