

# Algoritmo NLMS com Reúso de Coeficientes e Compensação de Viés para Entradas Ruidosas

Rodrigo M. S. Pimenta<sup>\*,†</sup>, Leonardo C. Resende<sup>§,†</sup>, Newton N. Siqueira<sup>†,¶</sup>, Diego B. Haddad<sup>‡</sup>, Mariane R. Petraglia<sup>†</sup>

**Resumo**—Algoritmos de filtragem adaptativa apresentam comprometimento da aprendizagem na presença de ruído aditivo, seja no sinal de referência, seja no sinal de entrada. Este artigo combina duas estratégias - reúso de coeficientes e compensação de viés - para obter algoritmos robustos para ambos os tipos de ruído. Tais algoritmos são capazes de melhorar significativamente o desempenho em regime estacionário sem implicar uma perda significativa na taxa de convergência. Melhorias no algoritmo resultante (redução do custo computacional e aumento da taxa de convergência) se mostraram possíveis através do recurso a fatores de reúso variáveis no tempo.

**Palavras-Chave**—Filtragem Adaptativa, Reúso de Coeficientes, Compensação de Viés.

**Abstract**—Adaptive filtering algorithms present learning impairment in the presence of additive noise, either in the reference signal or in the input signal. This article combines two strategies - reuse of coefficients and bias compensation - to obtain robust algorithms for both types of noise. Such algorithms are capable of significantly improving steady-state performance without implying a significant loss in the convergence rate. Improvements in the resulting algorithm (computational cost reduction and increased convergence rate) proved to be possible through the use of time-variant reuse factors.

**Keywords**—Adaptive Filtering, Reuse of Coefficients, Bias Compensation.

## I. INTRODUÇÃO

O projeto de filtros digitais é necessário em aplicações as mais diversas, como compressão com perdas, equalização, controle e tratamento de séries temporais [1]. Embora consista numa área altamente desenvolvida de processamento digital de sinais, tais projetos são incapazes de contemplar problemas importantes nos quais as funções de transferência envolvidas são variantes no tempo, o que ocorre na equalização de canais de comunicação e no cancelamento de eco acústico em sistemas de viva voz, entre outros. Para estes casos, o concurso de técnicas de filtragem adaptativa torna-se um pré-requisito essencial. Grosso modo, tais técnicas encontram aplicações em controle, predição, inversão de canais e identificação de sistemas, sendo este último problema o foco deste artigo.

No caso (mais comum) em que tais técnicas se valem de uma estrutura transversal, podemos descrever a saída do filtro

$y(k)$  no instante  $k$  como

$$y(k) = \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k), \quad (1)$$

onde  $\mathbf{w}(k)$  é um vetor que contém os  $N$  coeficientes que cumpre estimar e  $\mathbf{x}(k)$  contém as  $N$  amostras mais recentes do sinal de entrada  $x(k)$ :

$$\mathbf{x}(k) \triangleq [x(k) \quad x(k-1) \quad \dots \quad x(k-N+1)]^T. \quad (2)$$

Na prática, diversos fenômenos concorrem para prejudicar o desempenho de aprendizado dos algoritmos de filtragem adaptativa. Entre estes, podemos destacar a ubíqua presença de ruído, seja adicionado ao sinal de referência  $d(k)$  (ruído denotado por  $\nu(k)$ ), seja adicionado ao sinal de entrada (perturbação para a qual reservamos a notação  $\eta(k)$ ). Ambos os tipos de ruído prejudicam o desempenho do algoritmo, em particular em regime permanente. Embora o impacto de  $\nu(k)$  seja de amplo reconhecimento na literatura [2], mais recentemente tem-se atentado para um significativo enviesamento da estimativa do filtro ótimo  $\mathbf{w}^*$  quando o sinal de entrada encontra-se corrompido por um ruído aditivo  $\eta(k)$  [3], conforme ilustrado na Fig. 1.

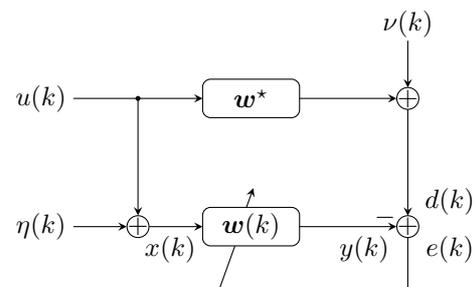


Fig. 1. Diagrama em blocos da estrutura de um algoritmo de filtragem adaptativa aplicado à identificação de sistemas, com entrada corrompida pelo ruído  $\eta(k)$ .

Este artigo conjuga duas estratégias para atenuar o prejuízo engendrado pelos sinais de ruído no processo de aprendizagem de filtros adaptativos. A primeira delas se vale do reúso de coeficientes (RC) [4], técnica que pode ser considerada dual ao APA (*Affine Projection Algorithm*)<sup>1</sup> [5], já que, enquanto esta tem por efeito o aumento da taxa de convergência e uma degradação no desempenho em regime permanente, aquela apresenta efeitos contrários. A técnica RC apresenta grandes vantagens em cenários de baixa razão sinal-ruído

<sup>\*</sup>Coordenação de Telecomunicações, CEFET-RJ campus Maracanã, Rio de Janeiro-RJ, Brasil. <sup>§</sup>Instituto Federal do Rio de Janeiro. <sup>‡</sup>Programa de Engenharia Elétrica (PEE), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil. <sup>‡</sup>Coordenação de Engenharia de Computação, CEFET-RJ campus Petrópolis, Petrópolis-RJ, Brasil. <sup>¶</sup>Coordenação de Telecomunicações, CEFET-RJ campus Nova Iguaçu, Nova Iguaçu, Brasil. E-mails: leonardo.resende@ifrj.edu.br, rodrigo.pimenta@cefet-rj.br, diego@pads.ufrj.br, mariane@pads.ufrj.br, newton.siqueira@cefet-rj.br.

<sup>1</sup>O APA é uma técnica de reúso de dados, a qual cumpre distinguir da técnica de reúso de coeficientes que será empregada neste artigo.

(SNR, *signal-noise ratio*), já que melhora o desempenho em regime permanente, mantendo praticamente intacta a taxa de convergência [6].

No caso em que o sinal de entrada do filtro  $x(k)$  encontra-se corrompido por ruído aditivo podemos modelá-lo (vide Fig. 1) como<sup>2</sup>

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\eta}(k), \quad (3)$$

onde  $u(k)$  é o sinal de entrada original do sistema de referência que pretendemos emular e o sinal de referência é expresso por

$$d(k) \triangleq (\mathbf{w}^*)^T \mathbf{u}(k) + \nu(k). \quad (4)$$

O fato de o filtro adaptativo não ter acesso a  $u(k)$  (e sim a  $x(k)$ ) torna o processo de estimativa tendencioso [3]. Tal problema pode ser contornado mediante o emprego de técnicas de correção de viés (CV) [7], as quais, neste artigo, serão combinadas com as estratégias RC para melhorar o desempenho em regime permanente de algoritmos de filtragem adaptativa. O algoritmo proposto é capaz de apresentar bons resultados para casos mais desafiadores, nos quais há sinais de ruído de elevada magnitude tanto nos sinais de entrada quanto no de referência.

Este artigo encontra-se organizado do seguinte modo: a Seção II descreve sucintamente os algoritmos mais populares de filtragem adaptativa; a Seção III apresenta a técnica RC, enquanto a Seção IV detalha a técnica de compensação de viés; o algoritmo proposto é descrito na Seção V, sendo seu desempenho avaliado na Seção VI (de simulações); a Seção VII contém as conclusões finais do artigo.

## II. ALGORITMOS CLÁSSICOS DE FILTRAGEM ADAPTATIVA

Algoritmos de filtragem adaptativa na sua versão supervisionada (foco deste artigo) pretendem iterativa e estocasticamente reduzir o valor de uma função custo  $\mathcal{F}[e(k)]$ , a qual em geral depende de um sinal de erro  $e(k)$  gerado pela diferença entre o sinal desejado  $d(k)$  e a saída do filtro  $y(k) \triangleq \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)$ , de sorte que o erro é definido por

$$e(k) \triangleq d(k) - y(k). \quad (5)$$

Sendo o algoritmo de filtragem adaptativa mais popular, o LMS (*Least-Mean Square*) inicialmente foi derivado por meio da aplicação da técnica do gradiente *estocástico* à função custo

$$F_{\text{LMS}}[e(k)] \triangleq \mathbb{E}[e^2(k)], \quad (6)$$

a qual dá origem à seguinte equação de atualização:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \beta \mathbf{x}(k)e(k), \quad (7)$$

onde  $\beta$  é o fator de aprendizado, a cuja escolha subjaz um compromisso entre taxa de convergência, desempenho em regime permanente, capacidade de rastreamento e probabilidade de divergência [8]. A técnica dos multiplicadores de Lagrange pode ser empregada como uma estratégia dual à do gradiente estocástico para a obtenção de novos algoritmos de filtragem adaptativa. Assim, o algoritmo NLMS (*Normalized Least Mean Square*), também muito disseminado, pode ser

<sup>2</sup>Os vetores  $\mathbf{u}(k)$  e  $\boldsymbol{\eta}(k)$  são definidos de maneira muito similar à definição de  $\mathbf{x}(k)$  em (2).

caracterizado como o solucionador do seguinte problema de determinístico de otimização com restrição:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}(k+1)} \mathcal{F}_{\text{DM}}[\mathbf{w}(k+1)] &\triangleq \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2 \\ \text{sujeito a } e_p(k) &= (1 - \beta)e(k), \end{aligned} \quad (8)$$

onde a função  $\mathcal{F}_{\text{DM}}[\mathbf{w}(k+1)]$  é responsável pela adoção do *princípio da distorção mínima* (origem do acrônimo DM) e  $e_p(k)$  é o erro *a posteriori*, relativo ao par de informações  $\{\mathbf{x}(k), d(k)\}$  e calculado com os valores atualizados dos coeficientes adaptativos, ou seja,

$$e_p(k) \triangleq d(k) - \mathbf{w}^T(k+1)\mathbf{x}(k). \quad (9)$$

O critério DM pode ser considerado conservador na medida em que penaliza novas soluções  $\mathbf{w}(k+1)$  demasiado distantes da última solução  $\mathbf{w}(k)$ , a qual agrega informações oriundas dos diversos dados pregressos. A resolução de (8) dá origem à equação de atualização do NLMS:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \beta \frac{\mathbf{x}(k)e(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|^2}, \quad (10)$$

cujas normalização permite a adoção de um limite superior de  $\beta$  (acima do qual a convergência não é garantida) independente das propriedades estatísticas do sinal de entrada [8].

## III. ALGORITMO DE REÚSO DE COEFICIENTES

Algoritmos de filtragem adaptativa que consideram a técnica de reuso de coeficientes apresentam melhor desempenho em regime permanente, caso comparados a algoritmos que não se valem desta estratégia. O algoritmo reutiliza os últimos  $L$  vetores de coeficientes adaptativos ( $\mathbf{w}(k-l)$ ,  $l \in \{0, \dots, L-1\}$ ), o que proporciona um bom comportamento em regime permanente com o custo de uma leve perda na taxa de convergência (muitas vezes imperceptível) [9]. A estratégia de reuso de coeficientes (RC) é particularmente interessante quando a SNR é baixa [6]. Um algoritmo muito conhecido que trata dessa estratégia é o RC-NLMS, o qual pode ser obtido por meio da resolução do seguinte problema de otimização:

$$\min_{\mathbf{w}(k+1)} \mathcal{F}_{\text{RC}}[\mathbf{w}(k+1)] \text{ sujeito a } e_p(k) = (1 - \beta)\bar{e}(k), \quad (11)$$

sendo  $\mathcal{F}_{\text{RC}}[\mathbf{w}(k+1)]$  e  $\bar{e}(k)$  definidos pelas equações

$$\mathcal{F}_{\text{RC}}[\mathbf{w}(k+1)] \triangleq \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2, \quad (12)$$

$$\bar{e}(k) \triangleq d(k) - \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)\mathbf{x}(k), \quad (13)$$

onde  $\rho \in (0, 1]$  é um parâmetro ao arbítrio do projetista que controla o peso dado aos vetores de coeficientes passados [9] e  $\theta(\rho) \triangleq \frac{\rho-1}{\rho^L-1}$ . O problema de otimização (11) pode ser reescrito (pela técnica dos multiplicadores de Lagrange), dando origem ao seguinte problema equivalente:

$$\min_{\mathbf{w}(k+1)} \mathcal{F}_{\text{RC}}[\mathbf{w}(k+1)] + \lambda [e_p(k) - (1 - \beta)\bar{e}(k)]. \quad (14)$$

A solução do problema local (14) corresponde à equação de atualização do algoritmo RC-NLMS:

$$\mathbf{w}(k+1) = \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k-l) + \frac{\beta \bar{e}(k) \mathbf{x}(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|^2}. \quad (15)$$

Escolhas de  $\rho$  próximas de zero implicam a concessão de pesos menores aos coeficientes progressos mais antigos, os quais tendem a ser menos confiáveis (particularmente no transiente). A solução  $\mathbf{w}(k+1)$  dependerá de uma soma ponderada dos últimos vetores  $\mathbf{w}(k-l)$ , com  $l \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ , o que suaviza as oscilações do filtro, e concorre para melhorar o desempenho em regime permanente, principalmente em configurações de baixa SNR [9].

#### IV. COMPENSAÇÃO DE VIÉS

Os algoritmos clássicos de filtragem adaptativa que trabalham com sinais ruidosos na entrada acabam por inserir viés na estimativa do sinal [10]. É difícil obter sinais de entrada que sejam imunes ao ruído. Muitas vezes, o ruído na entrada é causado pelo próprio método de medição do sinal. Técnicas baseadas na abordagem TLS (*Total Least Squares*) são utilizadas com a finalidade de compensar o viés causado pelo ruído de entrada e para melhor estimar o sinal. O problema ao utilizar essa técnica é o aumento da complexidade computacional [11].

Algoritmos como o CAH (*Constrained Anti-Hebbian*) (que se utiliza de um vetor gradiente linear para estimativa da função TLS [12]) e o TLMS (*Total Least Mean Square*) (o qual almeja a minimização do coeficiente de Rayleigh para essa mesma estimativa [13]) foram estudados com o objetivo de reduzir a complexidade computacional inserida pela abordagem TLS. Entretanto, esses métodos só funcionam bem na estimativa de sinais quando restritos a escolhas ótimas de seus parâmetros e quando a energia do ruído na entrada e na saída se equivalem.

Um avanço na técnica de compensação de viés ocorreu com a proposta apresentada em [3] para o algoritmo BC<sup>3</sup>-NLMS, que pode ser descrito como um solucionador aproximado do problema de otimização (8), quando levamos em consideração um sinal de entrada ideal  $u(k)$ , o qual nos é primariamente desconhecido (temos tão somente acesso a uma versão ruidosa dele; descrita por  $x(k) = u(k) + \eta(k)$ ). O problema (8), quando reescrito pela técnica dos multiplicadores de Lagrange, é equivalente a

$$\min_{\mathbf{w}(k+1)} \mathcal{F}_{\text{BC}}[\mathbf{w}(k+1)] + \lambda [e_p(k) - (1-\beta)e(k)]. \quad (16)$$

Utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange é possível encontrar o valor de  $\lambda$  que deve ser substituído conjuntamente com (3) em (16). Podemos então reescrever a equação conforme:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{BC}}[\mathbf{w}(k+1)] &\triangleq \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2 \\ &+ \frac{2\beta}{\|\mathbf{x}(k) - \boldsymbol{\eta}(k)\|^2} \{d(k) - \mathbf{w}^T(k+1)[\mathbf{x}(k) - \boldsymbol{\eta}(k)]\} \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Do inglês *Bias Compensation*.

$$\begin{aligned} &\{d(k) - \mathbf{w}^T(k)[\mathbf{x}(k) - \boldsymbol{\eta}(k)]\} \\ &- \frac{2\beta(1-\beta)}{\|\mathbf{x}(k) - \boldsymbol{\eta}(k)\|^2} \{d(k) - \mathbf{w}^T(k)[\mathbf{x}(k) - \boldsymbol{\eta}(k)]\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Se utilizarmos as premissas:

- I.  $x(k)$  e  $\eta(k)$  são independentes entre si;
- II.  $\eta(k)$  é ruído Gaussiano de média zero e variância  $\sigma_\eta^2$ ;
- III. Limite superior definido para que o coeficiente quadrático da função custo (17) em função de  $\mathbf{w}(k+1)$  não seja negativo;
- IV. Erro *a priori*  $e'(k) \triangleq d(k) - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)$ ;
- V. Erro *a posteriori*  $e'_p(k) \triangleq d(k) - \mathbf{w}^T(k+1)\mathbf{x}(k)$ ,

é possível reescrever (17) para obter a solução local através da equação de atualização do algoritmo BC-NLMS:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \beta \frac{e'(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)\sigma_\eta^2}{\|\mathbf{x}(k)\|^2}. \quad (18)$$

Cumpramos ressaltar que a nova equação de atualização não depende mais da entrada  $u(k)$ , mas do sinal  $\mathbf{x}(k)$  (corrompido pelo ruído  $\boldsymbol{\eta}(k)$ ) ao qual temos acesso. Importa ressaltar que (18) exige que se estime a variância do ruído aditivo  $\sigma_\eta^2$ .

#### V. ALGORITMOS PROPOSTOS

##### A. Algoritmo de Reuso de Coeficientes com Compensação de Viés

O primeiro algoritmo proposto utiliza a técnica de reuso de coeficientes com a finalidade de gerar um algoritmo mais estável em regime permanente, em conjunto com a técnica de compensação de viés, cuja contribuição está na robustez do filtro ao ruído acrescentado ao sinal de entrada. O algoritmo BC-RC-NLMS pode ser descrito como um solucionador aproximado do seguinte problema de otimização:

$$\min_{\mathbf{w}(k+1)} \mathcal{F}_{\text{BC-RC}}[\mathbf{w}(k+1)] \quad (19)$$

$$\text{sujeito a } e_p(k) = (1-\beta)\bar{e}(k),$$

sendo

$$\mathcal{F}_{\text{BC-RC}}[\mathbf{w}(k+1)] \triangleq \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k-l)\|^2 \quad (20)$$

e o erro  $\bar{e}(k)$  definido em (13). O problema de otimização (19), quando reescrito pela técnica dos multiplicadores de Lagrange, permite-nos escrever:

$$\min_{\mathbf{w}(k+1)} \mathcal{F}_{\text{BC-RC}}[\mathbf{w}(k+1)] + 2\lambda [e_p(k) - (1-\beta)\bar{e}(k)], \quad (21)$$

cujas soluções exigem que se iguale a zero o gradiente de (21) com relação a  $\mathbf{w}(k+1)$ :

$$\frac{\partial \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)]}{\partial \mathbf{w}(k+1)} = 2 \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l [\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k-l)] - 2\lambda \mathbf{u}(k) = \mathbf{0} \quad (22)$$

de modo que

$$\mathbf{w}(k+1) = \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k-l) + \lambda \theta(\rho) \mathbf{u}(k). \quad (23)$$

Sabendo que  $e_p(k) = (1 - \beta)\bar{e}(k)$ , podemos encontrar o valor do multiplicador de Lagrange:

$$\lambda = \theta^{-1}(\rho) \frac{\beta\bar{e}(k)}{\|\mathbf{u}(k)\|^2}. \quad (24)$$

Substituindo (24) em (21) e levando em conta (3) será possível encontrar uma equação de atualização que não é dependente do sinal de entrada  $\mathbf{u}(k)$ , desconhecido pelo fato da presença do ruído  $\boldsymbol{\eta}(k)$ . Podemos então rescrever:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)] &= \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k-l)\|^2 \\ &+ \frac{2\beta}{[\mathbf{x}^T(k) - \boldsymbol{\nu}^T(k)][\mathbf{x}(k) - \boldsymbol{\nu}(k)]} \theta^{-1}(\rho) \\ &[d(k) - \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)\mathbf{x}(k) + \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)\boldsymbol{\nu}_i(k)] \\ &[d(k) - \mathbf{w}^T(k+1)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}^T(k+1)\boldsymbol{\nu}(k)] \\ &- \frac{2\beta}{[\mathbf{x}^T(k) - \boldsymbol{\nu}^T(k)][\mathbf{x}(k) - \boldsymbol{\nu}(k)]} \theta^{-1}(\rho)(1 - \beta) \\ &[d(k) - \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)\mathbf{x}(k) + \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)\boldsymbol{\nu}_i(k)]^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Considerando as mesmas premissas definidas na Seção IV, e acrescentando a nova premissa:

VI.  $\bar{e}(k) \triangleq d(k) - \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)\mathbf{x}(k)$  é possível otimizar a equação e reescrevê-la para obter a solução local através da equação de atualização do algoritmo BC-RC-NLMS:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)] &= \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k-l)\|^2 + \frac{2\beta}{\|\mathbf{x}(k)\|^2} \theta^{-1}(\rho) \\ &\{[d(k) - \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)\mathbf{x}(k)][d(k) - \mathbf{w}^T(k+1)\mathbf{x}(k)] \\ &+ \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)\boldsymbol{\nu}(k)\mathbf{w}^T(k+1)\boldsymbol{\nu}(k) \\ &- (1 - \beta)\{[d(k) - \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)\mathbf{x}(k)]^2 \\ &+ [\theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)\boldsymbol{\nu}(k)]^2\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Zerando-se o gradiente  $\frac{\partial \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)]}{\partial \mathbf{w}(k+1)}$ , temos a equação de atualização do algoritmo proposto BC-RC-NLMS:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) &= \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k-l) \\ &+ \beta \frac{e'(k)\mathbf{x}(k) + \sigma_{\nu_i}^2 \theta(\rho) \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^T(k-l)}{\|\mathbf{x}(k)\|^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

**B. Algoritmo de Reuso Variável de Coeficientes com Compensação de Viés**

O algoritmo BC-RC-NLMS tem como desvantagem um aumento desnecessário do custo computacional no transiente.

Adicionalmente, é sabido que o reúso de coeficientes tende a piorar a taxa de convergência. Para que se reduza o impacto da técnica RC no transiente, foi agregada ao algoritmo BC-RC-NLMS a técnica de reúso variável apresentada em [6], dando origem ao segundo algoritmo proposto, denominado BC-VRC-NLMS. O ajuste dinâmico será feito através da função  $L(k)$  estabelecendo um fator de reúso menor na fase de transiente, com  $L(k)$  aumentando gradativamente (em termos estatísticos) à medida que o regime permanente se aproxima. O limite máximo do fator de reúso será definido por meio de um parâmetro ajustável  $L_{\max}$ , com o parâmetro de reúso variante no tempo  $L(k)$  definido como:

$$L(k) = \begin{cases} \min\{L(k-1) + 1, L_{\max}\} & \text{se } e^2(k) < \bar{\eta} \\ \max\{L(k-1) - 1, 1\}, & \text{demais casos} \end{cases}$$

sendo o parâmetro  $\bar{\eta}$  calculado através de [3], [14]:

$$\bar{\eta} = \sigma_{\nu}^2 + \sigma_{\eta}^2 \|\mathbf{w}(k)\|^2. \quad (28)$$

## VI. SIMULAÇÕES

O MSD (*mean-squared deviation*) é uma métrica de aferição de qualidade de desempenho definida por:

$$\text{MSD}(k) \triangleq \mathbb{E} [\|\mathbf{w}(k) - \mathbf{w}^*\|^2], \quad (29)$$

a qual avalia o quão distante o filtro adaptativo encontra-se da solução ideal.

A Fig. 2 apresenta a evolução do MSD para os algoritmos NLMS e BC-NLMS, e para os algoritmos propostos BC-RC-NLMS e BC-VRC-NLMS.

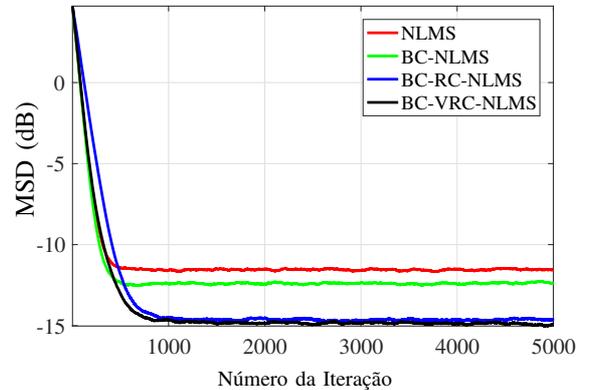


Fig. 2. Evolução do MSD (em dB) ao longo das iterações.

Os parâmetros da simulação são os seguintes:  $L = L_{\max} = 8$ ,  $\rho = 0.6$ ,  $\sigma_{\eta}^2 = 10^{-2}$ ,  $\sigma_{\nu}^2 = 10^{-1}$  e  $\delta = 10^{-6}$ . O parâmetro  $\delta$  é um fator que está somado ao termo  $\|\mathbf{x}(k)\|^2$  no denominador do termo de atualização para evitar eventuais divisões por zero. O sinal  $u(k)$  é branco, gaussiano e de variância unitária; a variância do ruído (branco e gaussiano) que o corrompe é suposta conhecida. Os resultados médios são oriundos de 500 ensaios independentes de Monte Carlo. A função de transferência possui 64 coeficientes (dos quais os três primeiros coeficientes são constituídos de uns e os demais nulos). Os valores de  $\beta$  utilizados para equalização

do regime transitório<sup>4</sup> foram:  $\beta_{\text{NLMS}} = 0.6$ ,  $\beta_{\text{BC-NLMS}} = 0.6$ ,  $\beta_{\text{BC-RC-NLMS}} = 0.8$  e  $\beta_{\text{BC-VRC-NLMS}} = 0.6$ .

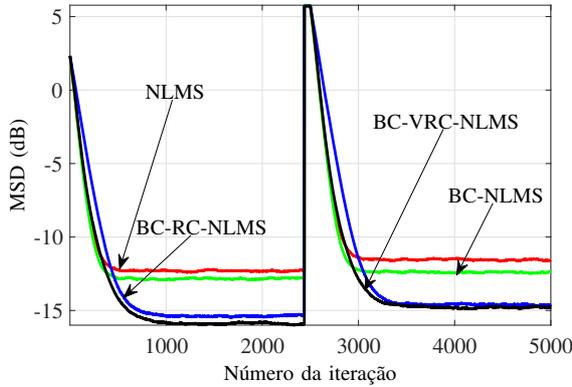


Fig. 3. Evolução do MSD (em dB) para duas funções de transferência.

A Fig. 3 apresenta os mesmos parâmetros da Fig. 2. Para avaliar a capacidade de rastreamento dos algoritmos, fez-se uma mudança brusca na função de transferência inicial, ideal, de sorte que seus coeficientes estão coletados no vetor  $w_1^*$  na primeira metade das iterações e no vetor  $w_2^*$  na segunda metade. Os elementos de tais vetores são descritos por:

$$w_1^*(k) = \begin{cases} 1, & \text{para } k = 0 \\ -0.8, & \text{para } k = 1 \\ 0.3, & \text{para } k = 2 \\ 0, & \text{demais} \end{cases}, w_2^*(k) = \begin{cases} 1, & \text{para } k = 0 \\ 1, & \text{para } k = 1 \\ 1, & \text{para } k = 2 \\ 0, & \text{demais} \end{cases}$$

os quais são esparsos para modelar funções de transferência comumente encontradas em canais de comunicação.

No que tange ao MSE (*mean squared error*) definido por

$$\text{MSE}(k) \triangleq \mathbb{E}[e^2(k)], \quad (30)$$

podemos observar na Fig. 4 sua evolução (no regime permanente) em função de  $\beta$  para  $\sigma_v^2 = 10^{-1}$ .

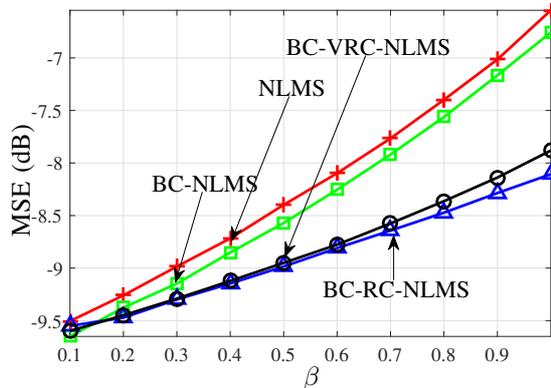


Fig. 4. MSE em regime permanente em função de  $\beta$ .

Podemos observar que os algoritmos que apresentam um melhor desempenho são os que utilizam a técnica do reúso

<sup>4</sup>No caso do algoritmo BC-RC-NLMS, optamos por igualar seu MSD em regime permanente ao do algoritmo proposto.

de coeficientes associada à compensação de viés. Os algoritmos BC-RC-NLMS e BC-VRC-NLMS apresentam resultados similares, porém o segundo apresenta um menor custo computacional.

## VII. CONCLUSÕES

A ubiquidade da presença de sinais de ruído exige o projeto de algoritmos relativamente insensíveis a tal tipo de perturbação. Neste artigo, duas técnicas (reúso de coeficientes e compensação de viés) foram conjugadas de modo a contemplar casos nos quais tanto o sinal de entrada quanto o de referência encontram-se corrompidos por ruído aditivo. O algoritmo resultante (BC-RC-NLMS), entretanto, pode ter um custo computacional alto no transiente, bem como apresentar uma perda na taxa de convergência. Ambas as desvantagens foram contornadas via recurso a fatores de reúso variantes no tempo. Os algoritmos propostos apresentaram um melhor desempenho no regime estacionário (de ao menos 3 dB no MSD), sem perdas notáveis na taxa de convergência.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. Antoniou, *Digital signal processing*. McGraw-Hill, 2016.
- [2] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive filters: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [3] B. Kang, J. Yoo, and P. Park, "Bias-compensated normalised LMS algorithm with noisy input," *Electronics Letters*, vol. 49, pp. 538–539, April 2013.
- [4] H. Cho, C. W. Lee, and S. W. Kim, "Derivation of a new normalized least mean squares algorithm with modified minimization criterion," *Signal Processing*, vol. 89, no. 4, pp. 692 – 695, 2009.
- [5] P. S. Diniz, *Adaptive filtering*. Springer, 1997.
- [6] S.-E. Kim, J.-W. Lee, and W.-J. Song, "Steady-state analysis of the NLMS algorithm with reusing coefficient vector and a method for improving its performance," in *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011 IEEE International Conference on*, pp. 4120–4123, IEEE, 2011.
- [7] Z. Zheng and H. Zhao, "Bias-compensated normalized subband adaptive filter algorithm," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 23, pp. 809–813, June 2016.
- [8] S. S. Haykin, *Adaptive filter theory*. Pearson Education India, 2008.
- [9] H. e. a. Cho, "Affine projection algorithm with coefficient vector reusing," *ECTI-CON 2009. 6th International Conference on. IEEE, 2009*, pp. 1148–1150, 2009.
- [10] N. Kalouptsidis, *Signal processing systems: theory and design*, vol. 28. Wiley-Interscience, 1997.
- [11] G. H. Golub and C. F. Van Loan, "An analysis of the total least squares problem," *SIAM journal on numerical analysis*, vol. 17, no. 6, pp. 883–893, 1980.
- [12] K. Gao, M. O. Ahmad, and M. Swamy, "A constrained anti-Hebbian learning algorithm for total least-squares estimation with applications to adaptive FIR and IIR filtering," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 41, no. 11, pp. 718–729, 1994.
- [13] D.-Z. Feng, Z. Bao, and L.-C. Jiao, "Total least mean squares algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 8, pp. 2122–2130, 1998.
- [14] L. C. Resende, D. Haddad, and M. R. Petraglia, "A variable step-size NLMS algorithm with adaptive coefficient vector reusing," in *Aceito para publicação na 2018 IEEE International Conference on Electro-Information Technology*, pp. 1–6, IEEE, 2018.