

Algoritmos para a Solução de Equações Parabólicas em Problemas de Radiopropagação

Diego A. Parada, Cássio G. Rego, Claudio G. Batista e Glaucio L. Ramos.

Resumo— Neste artigo o algoritmo SSPE (*Split Step Parabolic Equation*) e o método da DMFT (*Discrete Mixed Fourier Transform*) são usados para resolver problemas de propagação de ondas eletromagnéticas. As duas abordagens do algoritmo SSPE, NAPE (*Narrow Angle Parabolic Equation*) e WAPE (*Wide Angle Parabolic Equation*), são testadas em dois casos de estudo na faixa VHF de radiofrequências. A NAPE e a WAPE, juntamente com a DMFT, demonstraram uma adequada concordância quando considerados parâmetros eletromagnéticos e terrenos irregulares, tanto em um caso canônico quanto em um caso prático.

Palavras-Chave— Modelo PE, SSPE, DMFT, NAPE, WAPE, Técnicas numéricas.

Abstract— In this paper the SSPE (*Split Step Parabolic Equation*) algorithm and the DMFT (*Discrete Mixed Fourier Transform*) method are used to solve electromagnetic waves propagation problems. The two approaches of SSPE algorithm, NAPE (*Narrow Angle Parabolic Equation*) and WAPE (*Wide Angle Parabolic Equation*), are tested in two different case studies, for VHF radiowave. NAPE and WAPE together with DMFT demonstrated a good agreement when were considered electromagnetic parameters and irregular terrains, in both a canonical and a practical case.

Keywords— PE model, SSPE, DMFT, NAPE, WAPE, Numerical techniques.

I. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de modelos numéricos que garantem uma previsão de cobertura precisa é um desafio atual para os pesquisadores. Para tal fim, devem ser considerados elementos importantes dos ambientes de propagação, tais como variações atmosféricas, caracterização eletromagnética das superfícies e fatores dos cenários (perfis dos terrenos, obstáculos, etc.), uma vez que eles afetam notavelmente o comportamento da propagação das ondas de rádio. Atualmente, os avanços nos sistemas computacionais têm impulsionado o uso de métodos numéricos que abordam modelos determinísticos para solucionar problemas de radiopropagação. Dentro dessa linha, o método da Equação Parabólica (PE) apresenta-se como um modelo que fornece soluções numéricas adequadas para analisar a propagação de ondas em ambientes realísticos.

Recentemente, as ferramentas de propagação baseadas no método da PE têm-se tornado muito atraentes [1][2]. O modelo PE fornece, através das suas soluções numéricas, uma análise completa da radiopropagação em todos os pontos dos cenários, considerando as alterações de refratividade atmosférica e os

efeitos difrativos dos obstáculos que configuram os ambientes, representando assim, um destacado avanço na modelagem de propagação eletromagnética [3].

O método da PE é uma aproximação da equação de onda que modela a energia se propagando em um cone centrado em uma direção preferencial, denominada direção paraxial. Foi introduzido por Leontovich e Fock para tratar o problema da difração de ondas de rádio ao redor da Terra [4]. Inicialmente, os modelos baseados na PE foram bem recebidos, pois resolveram problemas práticos de propagação. Os algoritmos PE fornecem uma solução rápida e eficiente para a maioria dos problemas de longo alcance [5].

Pelo menos duas soluções numéricas podem ser usadas para resolver a PE: as técnicas de diferenças finitas [6] e o algoritmo de SSFT (*Split Step Fourier Transform*) [7]. Para garantir a estabilidade do algoritmo de diferenças finitas, tanto Claerbout quanto Popov usaram a solução numérica baseada no Método de Crank-Nicolson. O SSFT, primeiramente utilizado por Hardin e Tappert em problemas de acústica [8], é mais conhecido como o algoritmo de SSPE quando aplicado em problemas de radiopropagação. Neste trabalho a PE é resolvida por meio da aplicação do algoritmo de SSPE.

Outro problema comum na caracterização de canais de rádio é a consideração de ângulos de propagação. Para isto, formulações de NAPE e WAPE são consideradas dentro da solução numérica oferecida pelo algoritmo de SSPE. A forma NAPE é apropriada para estudar contextos ou problemas onde os ângulos de propagação são inferiores a 15° . A forma WAPE é mais precisa em problemas que envolvem maior faixa angular, por exemplo, propagação de curto alcance e problemas de multipercursos [9].

Para incorporar problemas que incluem perdas de propagação na superfície dos terrenos, usou-se o método da DMFT dentro da solução numérica de SSPE.

Neste trabalho, a principal contribuição é a implementação do método de SSPE junto com a DMFT para estimar cobertura radioelétrica em um cenário realístico, com o propósito de avaliar e comparar a precisão do modelo PE em relação a outras técnicas numéricas. O modelo PE é uma alternativa computacionalmente eficiente quando comparada com outras abordagens numéricas ou analíticas. A implementação desenvolvida do algoritmo SSPE-DMFT é validada em um primeiro caso de estudo; este consiste em um terreno plano com perdas no solo. Em um segundo caso, o algoritmo SSPE-DMFT é aplicado em um cenário realístico.

O presente artigo está organizado da seguinte maneira: A seção II descreve a formulação utilizada; a Seção III explica os detalhes mais importantes a serem aplicados pelo algoritmo de

Diego A. Parada e Cássio G. Rego, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, E-mails: diegoandrespr@ufmg.br, cassio@cpdee.ufmg.br. Claudio G. Batista e Glaucio L. Ramos, Departamento de Engenharias de Telecomunicações e Mecatrônica, Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco-MG, E-mails: claudiog@ufsj.edu.br, glopesr@gmail.com.

SSPE em problemas de radiopropagação; os casos de estudo e os seus correspondentes resultados são exibidos na Seção IV; a Seção V apresenta as conclusões.

II. FORMULAÇÃO

A. Modelo PE

Neste trabalho, a propagação é analisada em duas dimensões (sem variações na direção transversal). A seguinte é a equação de Helmholtz na sua forma bidimensional:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 n^2 \psi = 0, \quad (1)$$

onde k é o número de onda e n é o índice de refração. ψ representa o campo elétrico ou magnético para polarização horizontal ou vertical, respectivamente. A forma padrão do modelo PE (SPE) é deduzida a partir da equação (1) [1].

Uma função auxiliar reduzida $u(x, z) = e^{-jkx} \psi(x, z)$ introduz-se, a qual está associada com a direção paraxial (eixo x neste trabalho). Então, a equação (1) em termos de $u(x, z)$ é expressa:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2jk \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(n^2 - 1) \right] u(x, z) = 0. \quad (2)$$

A equação (2) pode ser separada em termos de dois operadores pseudo-diferenciais:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = jk(1 - Q)u, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = jk(1 + Q)u, \quad (4)$$

onde $Q = \sqrt{1 + q}$, e $q = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (n^2 - 1)$.

As equações (3) e (4) representam, respectivamente, a análise da onda a favor ou contra (retroespalhamento) o sentido da propagação. Neste trabalho o retroespalhamento é ignorado. A SPE é obtida por meio do uso da primeira ordem da expansão de Taylor, $Q = \sqrt{1 + q} \approx 1 + \frac{q}{2}$, e substituindo na equação (3) chega-se :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2jk \frac{\partial u}{\partial x} + k^2(n^2 - 1)u = 0. \quad (5)$$

A equação (5) também é conhecida como a forma NAPE do modelo PE.

O modelo PE para problemas que envolvem ângulos maiores é denominado WAPE. Este realiza uma expansão mais precisa do operador Q e é dado como segue:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \left[jk^{-1} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 1} \right)^{-1} + jk(n - 1) \right] u = 0. \quad (6)$$

B. Solução numérica do modelo PE

A solução de SSPE para o modelo de equação parabólica padrão ou forma NAPE, é dada por [3]:

$$u(x + \Delta x, z) = e^{[jk(n^2 - 1) \frac{\Delta x}{2}]} \times F^{-1} \left\{ e^{(jp^2 \frac{\Delta x}{2k})} F \{ u(x, z) \} \right\}, \quad (7)$$

e a solução de SSPE para a forma WAPE, é dada por:

$$u(x + \Delta x, z) = e^{[jk(n - 1) \frac{\Delta x}{2}]} \times F^{-1} \left\{ e^{[-\frac{jp^2 \Delta x}{k} (\sqrt{1 - (\frac{p}{k})^2} + 1)^{-1}]} F \{ u(x, z) \} \right\}. \quad (8)$$

Nas equações (7) e (8), F e F^{-1} representam respectivamente a transformada rápida de Fourier (FFT) e a transformada rápida de Fourier inversa (IFFT). O termo p está expresso como $p = k \times \sin \theta$, onde θ é o ângulo de propagação.

C. DMFT

Um avanço importante na técnica de SSPE é a introdução da MFT (*Mixed Fourier Transform*) [10], pois permite resolver problemas de propagação de ondas que incluem condições de contorno na superfície.

A DMFT é a abordagem discreta do método da MFT, e é aplicada na função auxiliar de campo $u(x, m\Delta z)$, a qual está verticalmente discretizada para $m = 0, 1, 2, \dots, N$. A discretização correspondente e a representação no domínio p é dada como segue [11]:

$$U(x, 0) = A \sum_{m=0}^N r^m u(x, m\Delta z), \quad (9)$$

$$U(x, l\Delta p) = A \sum_{m=0}^N u(x, m\Delta z) \left[\alpha \sin \left(\frac{\pi l m}{N} \right) - \frac{\sin \left(\frac{\pi l}{N} \right)}{\Delta z} \cos \left(\frac{\pi l m}{N} \right) \right] \quad (10)$$

$$U(x, N\Delta p) = A \sum_{m=0}^N (-r)^{N-m} u(x, m\Delta z), \quad (11)$$

para $l = 1, 2, \dots, N - 1$, onde $A = 2(1 - r^2) / [(1 + r^2)(1 - r^{2N})]$. O tamanho de Δp deve satisfazer $\Delta p \times \Delta z = \pi / N$. Para polarização vertical, $r = \sqrt{1 + (\alpha \Delta z)^2} - \alpha \Delta z$. Nos somatórios das equações (9) e (11) usa-se um fator ponderado de 0,5 para o primeiro e o último termo ($m = 0$, $m = N$).

Como também trata-se de um processo iterativo adaptado à solução numérica de SSPE, a DMFT no próximo passo (ou seja, em $x + \Delta x$) é obtida segundo as equações (12)-(14):

$$U(x + \Delta x, 0) = \exp \left[\frac{j\Delta x}{2k} \left(\frac{\log r}{\Delta z} \right)^2 \right] U(x, 0), \quad (12)$$

$$U(x + \Delta x, l\Delta p) = \exp \left[j\Delta x (\sqrt{k^2 - (l\Delta p)^2} - k) \right] U(x, l\Delta p), \quad (13)$$

$$U(x + \Delta x, N\Delta p) = \exp \left[\frac{j\Delta x}{2k} \left(\frac{\log(-r)}{\Delta z} \right)^2 \right] U(x, N\Delta p). \quad (14)$$

Para encontrar $u(x + \Delta x, m\Delta z)$, aplica-se a inversa DMFT [1]:

$$u(x + \Delta x, m\Delta z) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^N U(x + \Delta x, l\Delta p) \frac{\alpha \operatorname{sen} \left(\frac{\pi i m}{N} \right) - \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi i}{N} \right)}{\Delta z} \cos \left(\frac{\pi i m}{N} \right)}{\alpha^2 + \left[\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi i}{N} \right)}{\Delta z} \right]^2} + U(x + \Delta x, 0)r^m + U(x + \Delta x, N\Delta p)(-r)^{N-m}. \quad (15)$$

III. APLICAÇÃO DE SSPE EM PROBLEMAS DE RADIOPROPAGAÇÃO

Para aplicar o método de SSPE precisa-se de um valor inicial de campo em uma distância inicial (x_0). Na Fig.1 apresenta-se uma ideia ou esboço sobre a abordagem do método. Primeiramente nota-se que existe um perfil inicial de campo (conjunto vertical de valores de campo na posição x_0). A partir desta posição inicial aplica-se um processo iterativo que vai calculando passo a passo (usando as equações (7) e (8)) um perfil vertical de campo, utilizando sempre os valores de campo da posição anterior [12].

O método de SSPE opera entre o domínio espacial z e o domínio espectral p de maneira consecutiva, como indicam as equações (7) e (8). Para aplicar a solução numérica os domínios são truncados em z_{max} e p_{max} . Para evitar efeitos de *aliasing* é usado o critério de Nyquist [9], $z_{max} \times p_{max} = \pi N$. O valor do incremento ou passo Δz deve satisfazer $\Delta z \leq \lambda / (2 \times \operatorname{sen} \theta_{max})$, onde θ_{max} é o maior ângulo de propagação considerado. O incremento Δx pode ser coerentemente escolhido dependendo da extensão do ambiente, e pode ser muito maior que o comprimento de onda.

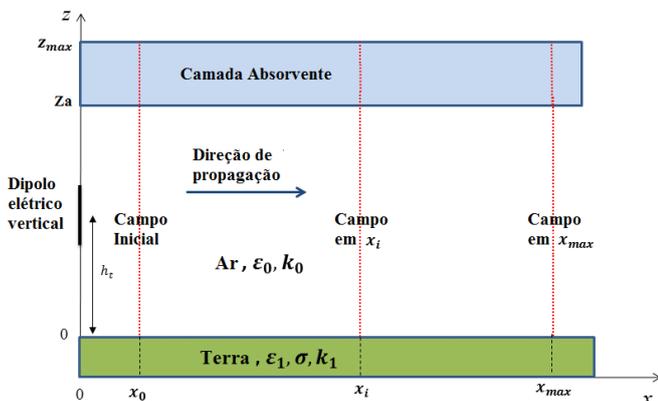


Fig. 1. Esboço sobre a aplicação do método de SSPE

O truncamento dos problemas em uma altura limite z_{max} gera fortes reflexões que influenciam negativamente na precisão dos resultados. As reflexões não físicas são removidas mediante o uso de uma camada absorvente [12]. Para isto, neste trabalho implementa-se uma Janela de Hanning.

A comparação entre uso e não uso de uma camada absorvente dentro do algoritmo de SSPE é apresentada na Fig. 2. Reflexões artificiais geradas pelo não uso da Janela de Hanning podem ser vistas na Fig. 2(a). Nesta figura, se evidenciam os efeitos indesejados que causam as reflexões não físicas dentro da solução numérica. A Fig. 2(b) mostra a atenuação do campo na segunda metade do domínio vertical, devido ao uso adequado da camada absorvente.

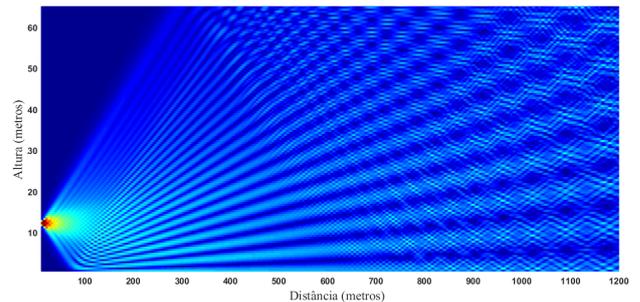
A condição de contorno que deve se satisfazer na superfície do solo é expressa como [10]:

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_2 \right] u(x, z) = 0, \quad (16)$$

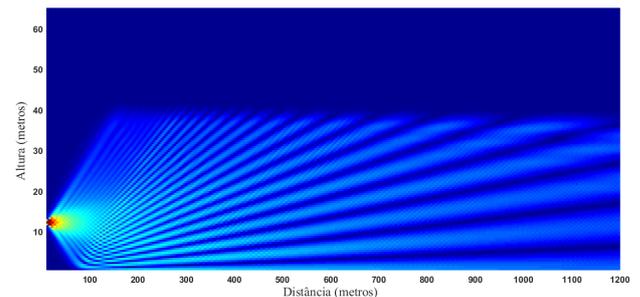
onde α_1 e α_2 são constantes.

A solução fornecida pelo método de SSPE resolve problemas de radiopropagação em terrenos planos e não planos. Os terrenos não planos devem ser modelados para serem processados convenientemente pelo algoritmo. Uma alternativa eficaz para a modelagem de perfis irregulares é o escalonamento do terreno [2]. A Fig. 3 mostra um perfil gaussiano computacionalmente escalonado. Para isto, a implementação realizada testa de forma iterativa a altura do terreno em cada passo Δx , para que este seja posteriormente escalonado em concordância com os tamanhos da discretização.

A solução numérica do método de SSPE também permite a inclusão de variações atmosféricas por meio do termo n das equações (7) e (8).



(a) SSPE sem aplicar camada absorvente.



(b) SSPE aplicando camada absorvente.

Fig. 2. Comparação entre uso e não uso de camada absorvente.

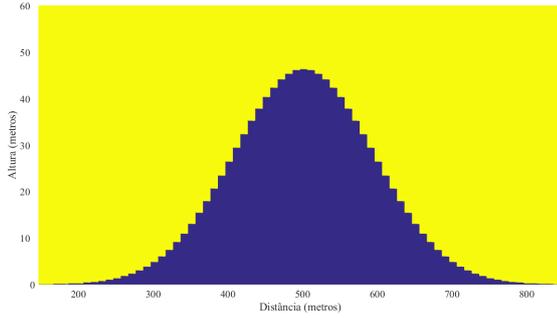


Fig. 3. Perfil gaussiano escalonado.

IV. CASOS DE ESTUDO

Para obter os resultados dos seguintes casos de estudo, o algoritmo de SSPE é implementado computacionalmente em MATLAB, e executado em uma máquina com processador Core i7 @ 3,40GHz e memória RAM de 12 GB.

A. Caso 1: Terra plana com perdas no solo

Trata-se de um terreno plano com perdas, cujas propriedades elétricas são $\epsilon_r = 15$ e $\sigma = 0,012$ S/m. O propósito é demonstrar a aplicabilidade do algoritmo DMFT-SSPE para analisar problemas de propagação em cenários com perdas no solo.

O estudo considera polarização vertical e atmosfera homogênea. O perfil vertical de campo inicial é calculado por meio da fórmula de terra plana, considerando os parâmetros eletromagnéticos [13]. Sendo o transmissor um dipolo elétrico vertical localizado no início do terreno com altura de 80 m e irradiando em 100 MHz. Um receptor com altura fixa $h_r = 10$ m é deslocado ao longo do eixo x , desde 100 até 5000 m.

A atenuação estimada ao longo do terreno é mostrada na Fig. 4. Os resultados de NAPE e WAPE são comparados com uma solução analítica gerada pelo Modelo de Terra Plana [14] e com outras soluções numéricas: EFIE (*Electric Field Integral Equation*) e MFIE (*Magnetic Field Integral Equation*), cujos resultados foram obtidos em [15].

A Tabela I mostra a estatística do erro das diversas técnicas, usando-se como referência a solução fornecida pelo modelo analítico. Também, é possível apreciar os resultados quase idênticos para NAPE e WAPE nestas condições.

B. Caso 2: Cenário realístico

Este caso prático está baseado na campanha de medição realizada em Northern Jutland perto de Aalborg, Dinamarca. O ambiente analisado é denominado perfil de Jerslev, e apresenta

TABELA I
ESTATÍSTICA DO ERRO PARA O CASO 1.

	Erro Médio Absoluto (dB)	Desvio padrão (dB)
MFIE	0,33	0,89
EFIE	2,17	1,21
NAPE	0,89	1,26
WAPE	0,87	1,31

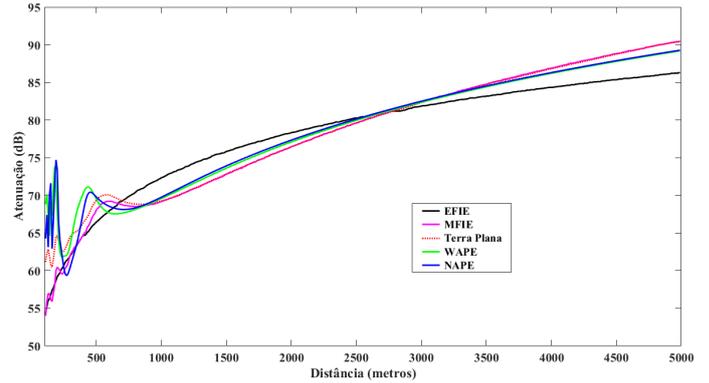


Fig. 4. Atenuação sobre Terra plana com perdas para polarização vertical em 100 MHz.

um terreno irregular em uma região rural com árvores e algumas construções. Possui aproximadamente 5,5 km de extensão. A campanha de medição usou como transmissor um dipolo de meia-onda com altura 10,4 m, com polarização vertical e irradiando 10 W. Utilizou-se uma frequência do sinal de 144 MHz. Ao longo do terreno uma estação receptora com 2,4 m de altura registrou a intensidade de campo elétrico.

O estudo utilizou as propriedades elétricas para solo padrão, $\epsilon_r = 15$ e $\sigma = 0,012$ S/m, na caracterização da superfície do terreno. De acordo com os critérios de discretização, valores de $\Delta x = 50$ m e $\Delta z = 1$ m foram usados, e para limitar o domínio vertical definiu-se uma $z_{max} = 200$ m.

As Figs. 5 e 6 exibem a atenuação medida, a estimativa obtida pelo MoM e a técnica de FDTD, e os resultados obtidos via NAPE e WAPE, respectivamente. Visualmente é possível afirmar que as curvas das diferentes soluções numéricas apresentam um comportamento semelhante entre si. Adicionalmente, é notável o coerente comportamento com as medidas para ambas as soluções, NAPE e WAPE.

Os resultados para NAPE e WAPE são quase idênticos, devido a que os pontos de recepção estão muito próximos da superfície do terreno. Além disso, o estudo é feito para um ambiente de longo alcance, as quais são condições idôneas para que a faixa angular de propagação conserve valores pequenos.

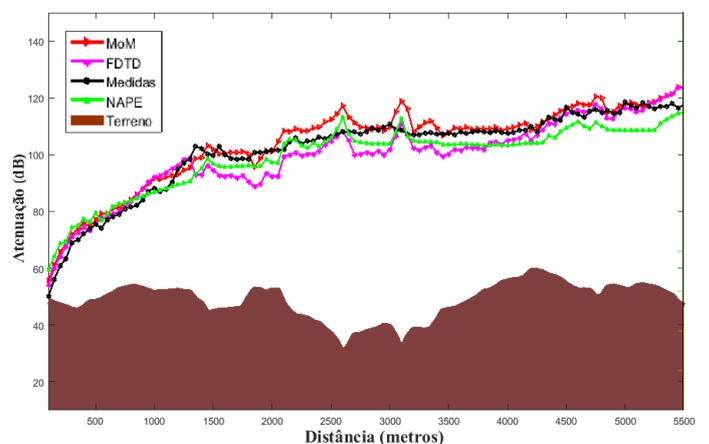


Fig. 5. Atenuação ao longo do perfil de Jerslev obtida com formulação NAPE.

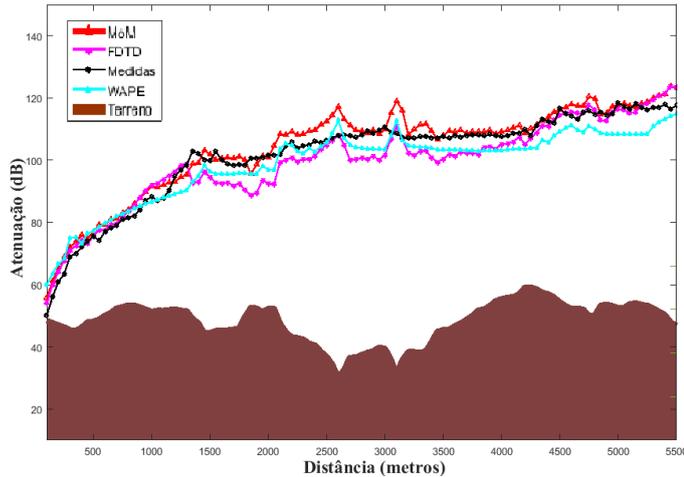


Fig. 6. Atenuação ao longo do perfil de Jerslev obtida com formulação WAPE.

Dentro desta linha, é conveniente ressaltar que a formulação WAPE é exclusiva para melhorar a precisão do algoritmo de SSPE em situações críticas, onde a faixa angular seja maior a 15° . Os resultados de WAPE e NAPE são apresentados em gráficos separados para que sejam visualizados com clareza e de forma independente.

A Tabela II mostra a estatística do erro do presente caso. As medições foram a referência usada para o cálculo do erro médio absoluto e o desvio padrão. Analisando a tabela é possível corroborar o que visualmente foi apreciado, as técnicas numéricas apresentam resultados semelhantes entre si, e os resultados de WAPE e NAPE fornecem uma solução quase similar. Adicional à comparação baseada na estatística, a Tabela II exibe uma comparação de eficiência computacional, expondo o tempo de processamento para obter os resultados com cada uma das técnicas. A aplicação do algoritmo de SSPE no cenário realístico, permite concluir que a solução numérica do modelo PE apresenta-se como uma alternativa que garante uma convergência rápida e razoável de resultados em relação às outras abordagens numéricas.

V. CONCLUSÕES

Este trabalho realizou a implementação computacional do algoritmo de SSPE como solução numérica do modelo PE.

Um dos principais objetivos foi a inclusão das características reais dos ambientes de propagação. Para isto, o algoritmo tornou-se da forma DMFT-SPPE; a abordagem via método DMFT permitiu carregar a caracterização elétrica dos ambientes dentro da solução numérica fornecida pelo método de SSPE.

TABELA II
ESTATÍSTICA DO ERRO PARA O CASO 2.

	Erro Médio Absoluto (dB)	Desvio padrão (dB)	Tempo
MoM	2,95	1,98	6,9 horas
FDTD	3,96	2,79	50,3 horas
NAPE	4,21	2,31	31,72 segundos
WAPE	4,29	2,35	31,72 segundos

O comportamento das curvas de atenuação, obtido via NAPE e WAPE, e a respectiva estatística do erro demonstraram uma adequada concordância dos resultados em relação a outras abordagens numéricas, em ambos os casos.

Nos dois casos analisados não se conseguem diferenças significativas entre as soluções de NAPE e WAPE. Isto acontece, porque as condições dos casos estudados não apresentam situações críticas que permitam mostrar um melhor rendimento de WAPE em relação a NAPE. Além, neste trabalho a aplicabilidade de NAPE e WAPE foi verificada.

Outro propósito de análise foi o tempo de processamento computacional. Nesse contexto, ressalta-se a notável eficiência computacional do algoritmo de DMFT-SSPE em relação a outras abordagens numéricas, tanto em problemas canônicos quanto práticos. Dentro dessa linha, o modelo PE apresenta-se como uma alternativa que garante uma razoável e rápida convergência numérica dos seus resultados.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pelas agências Brasileiras CAPES, CNPq e FAPEMIG.

REFERÊNCIAS

- [1] G. Apaydin and L. Sevgi, Radio wave propagation and parabolic equation modeling. Wiley, 2017.
- [2] Diego A. Parada, Cássio G. Rego, Claudio G. Batista and Glaucio Lopes Ramos, "A comparative study between SSPE methods and a HO-FDTD algorithm for EM propagation over lossy terrains", Conferência Europeia de Antenas e Propagação (Eucap), 2018.
- [3] M. Levy, Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. The institution of Electrical Engineers, 2000.
- [4] M.A. Leontovich and V.A. Fock, "Solution of propagation of electromagnetic waves along the Earth's surface by the method of parabolic equations", J. Phys. USSR, 1946.
- [5] A. E. Barrios, "A terrain parabolic equation model for propagation in the troposphere", in IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 42, no. 1, pp. 90-98, Janeiro 1994.
- [6] Z. He and R. S. Chen, "A Novel Marching-on-in-Degree Solver of Time Domain Parabolic Equation for Transient EM Scattering Analysis", in IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 64, no. 11, pp. 4905-4910, Novembro 2016.
- [7] S. McDaniel, "Propagation of a normal mode in the parabolic approximation", J. Acoust. Soc. Am., vol. 57, no. 2, pp. 307311, 1975.
- [8] R.H. Hardin and F.D. Tappert, "Application of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations", SIAM Rev., 1973.
- [9] O. Ozgun, G. Apaydin, M. Kuzuoglu, L. Sevgi, "PETOOL: MATLAB-based one-way and two-way split-step parabolic equation tool for radiowave propagation over variable terrain", In Computer Physics Communications, Volume 182, Issue 12, 2011.
- [10] D. Dockery and J. R. Kuttler, "An improved impedance-boundary algorithm for Fourier split-step solutions of the parabolic wave equation", in IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 44, no. 12, pp. 1592-1599, Dezembro 1996.
- [11] J. R. Kuttler and R. Janaswamy, "Improved Fourier transform methods for solving the parabolic wave equation", in Radio Science, vol. 37, no. 2, pp. 1-11, Agosto 2002.
- [12] L. Sevgi, C. Uluisik and F. Akleman, "A MATLAB-based two-dimensional parabolic equation radiowave propagation package", in IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 47, no. 4, pp. 164-175, Agosto 2005.
- [13] R. W. P. King and S. S. Sandler, "The electromagnetic field of a vertical electric dipole over the Earth or sea", in IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 42, no. 3, pp. 382-389, Março 1994.
- [14] J. D. Parsons, The Mobile radio Propagation Channel, John Wiley and Sons, Liverpool-UK, 1998.
- [15] C. Batista and C. Rego, "A high-order unconditionally stable FDTD-based propagation method", IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, vol12, pp.809-812, 2013.