Grafos de Contextos de Sistemas Dinâmicos Simbólicos de Memória Infinita

Vilmar Silva, Daniel P. B. Chaves, Cecilio Pimentel

***Resumo*— A teoria de sistemas dinâmicos simbólicos, que explora as propriedades de sequências com restrições, é aplicada em problemas nas áreas de comunicação digital e gravação. Estes sistemas são especificados por um conjunto mínimo de sequências proibidas $\mathcal{O}$, ou alternativamente, por um grafo rotulado, denominado de grafo de contextos. Este artigo trata de um algoritmo para a construção deste grafo quando o conjunto $\mathcal{O}$ é infinito. No melhor conhecimento dos autores, não existe um procedimento sistemático na literatura para esta construção.**

***Palavras-Chave*— Dinâmica simbólica, expressões regulares, grafo de contextos, linguagens, sequências com restrições.**

***Abstract*— The theory of dynamic symbolic systems, which exploits the properties of constrained sequences, is applied to problems in the areas of digital communication and digital recording. These systems are specified by a minimal set of forbidden sequences , or alternatively, by a labeled graph, called the follower set graph. This article deals with an algorithm for the construction of this graph when the set $\mathcal{O}$ is infinite. To the best knowledge of the authors, there is no systematic procedure in the literature for this construction.**

***Keywords*— Symbolic Dynamics, regular expressions, follower set graph, languages, constrained sequences.**

I. INTRODUÇÃO

Os sistemas dinâmicos simbólicos formados por conjuntos de sequências bi-infinitas que podem ser apresentados por um grafo rotulado com um número finito de estados são bastante úteis no estudo de codificadores restritivos [1]. Dentre estes sistemas destacamos os sistemas dinâmicos de memória finita (SFT, *shift of finite type*) e os sistemas dinâmicos de memória infinita (SSS, *strict sofic shift*). Estes possuem um único conjunto mínimo de palavras proibidas $\mathcal{O}$ [1, p.33], sendo que este conjunto é infinito para um SSS.

O contexto à direita de uma palavra $\mathbf{w}$ de uma sistema dinâmico simbólico é o conjunto de todas as palavras que podem seguir $\mathbf{w}$. O conjunto dos possíveis contextos à direita permite a construção de um grafo, denominado de grafo de contextos, que tem o menor número de vértices dentre os grafos determinísticos que representam um SFT irredutível. Em [2], os autores introduziram o conceito de conjunto de restrições de uma palavra que unicamente caracteriza o seu contexto à direita. Também foi proposto um conjunto finito de palavras, denominado de conjunto de representantes dos conjuntos de restrições, que geram todos os possíveis contextos à direita. Esta ideia é usada em um novo algoritmo por divisão de vértices baseado na proposta de Moore [5] para obter o grafo de contextos para a classe de SFT. Para este fim, define-se em [2] os conceitos de máscara de restrição e memória de restrição. Este artigo trata da construção do grafo de contextos para a classe de SSS. Para o melhor conhecimento dos autores, esta construção é um problema em aberto na literatura.

Considera-se neste trabalho que um SSS é definido por um conjunto $\mathcal{O}$ descrito por uma expressão regular, uma vez que toda expressão regular possui, naturalmente, uma linguagem regular associada [4], [6, Teorema 5.2.1], existindo então uma representação desta por um grafo rotulado direcionado com um número finito de estados. Exemplos de SSS definidos por expressões regulares incluem *even shift* [1] e *S-gap* [1], [8].

A contribuição deste trabalho é tripla. A primeira é mostrar a existência de um conjunto finito de representantes dos conjuntos de restrições das palavras na linguagem de um SSS. A segunda é determinar a cardinalidade do referido conjunto de representantes. A terceira é mostrar que o algoritmo proposto em [2] também pode ser aplicado para a construção do grafo de contextos para a classe de SSS.

As próximas seções estão organizadas da seguinte forma. Na Seção II são estabelecidos os conceitos necessários da teoria de dinâmica simbólica, conjunto de restrições, máscara de restrição e memória de restrição. Na Seção III caracterizamos o conjunto $\mathcal{O}$ usado neste trabalho. Na Seção IV são apresentadas as principais contribuições deste trabalho que serão úteis para a construção do grafo de contextos na Seção V. As conclusões deste trabalho são apresentadas na Seção VI.

II. PRELIMINARES

Nesta seção faremos uma revisão de conceitos sobre dinâmica simbólica [1], conjunto de restrições, máscara de restrição e memória de restrição [2], necessários para o desenvolvimento deste artigo.

A. Dinâmica Simbólica

Seja $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto de todas as sequências bi-infinitas $x = \cdots x_{-2}x_{-1}x_0x_1\cdots$ de símbolos de um alfabeto finito $\mathcal{A}$. Uma sequência finita de símbolos consecutivos de $\mathcal{A}$ é chamada uma palavra. Dizemos que uma palavra $\mathbf{w}$ é um fator de um ponto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ se existem inteiros $i \leq j$, tais que $\mathbf{w} = x_i x_{i+1}\cdots x_j$. O comprimento de $\mathbf{w}$ é $|\mathbf{w}| = j - i + 1$. O conjunto de todas as palavras sobre $\mathcal{A}$ incluindo a palavra nula ε, que satisfaz $\mathbf{w}\varepsilon = \varepsilon\mathbf{w} = \mathbf{w}$, é $\mathcal{A}^*$. Uma dinâmica simbólica X é um subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ consistindo de todos os pontos não contendo algum fator do conjunto de palavras proibidas $\mathcal{F}$. A linguagem de X, denotada por L, é o conjunto de todas as palavras que ocorrem em pontos de X, incluindo a palavra vazia ε. O contexto à direita de uma palavra $\mathbf{w}$, denotado por

V. Silva, Departamento de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba-PB, Brasil, E-mail: vilmarvazsilva@gmail.com. D. Chaves e C. Pimentel, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil, E-mails: daniel.chaves@ufpe.br, cecilio@ufpe.br.
Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq e FACEPE.

$F(\mathbf{w})$, é o conjunto de todas as palavras em L que podem seguir $\mathbf{w}$, isto é, $F(\mathbf{w}) = \{\mathbf{u} \in L : \mathbf{wu} \in L\}$. Duas palavras $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ com o mesmo contexto são ditas equivalentes, ou seja, $F(\mathbf{w}) = F(\mathbf{u})$. Uma palavra $\mathbf{w} = w_1 \cdots w_n$ é uma proibicão mínima se $\mathbf{w} \notin L$ e ambas $w_1 \cdots w_{n-1} \in L$ e $w_2 \cdots w_n \in L$. Vamos denotar por $\mathcal{O}$ o conjunto formado por todas as palavras proibidas de comprimento mínimo de uma dinâmica simbólica. É importante observar que a minimalidade de $\mathcal{O}$ garante que a linguagem formada por este conjunto é anti-fatorial [1] e [3]. Dados $\mathcal{V}$ um conjunto de vértices, $\mathcal{E}$ um conjunto de ramos e $\mathcal{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ uma função de rotulação, então $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{L})$ é um grafo rotulado. As funções $i : \mathcal{E} \to \mathcal{V}$ e $t : \mathcal{E} \to \mathcal{V}$ especificam o vértice inicial e o vértice final de um ramo, respectivamente. Um caminho em G é uma sequência de ramos $\pi = e_1 e_2 \cdots e_n$, tal que, o vértice terminal de e_i é o vértice inicial de e_{i+1}. O rótulo de π é a palavra $\mathcal{L}(\pi) = \mathcal{L}(e_1)\mathcal{L}(e_2)\cdots\mathcal{L}(e_n)$. Um percurso em G é uma sequência bi-infinita de ramos $\xi = \cdots e_{-1}e_0e_1 \cdots$ tal que $t(e_i) = i(e_{i+1})$ para todo i. Uma palavra $\mathbf{w} \in L$ é gerada por um caminho π em G se $\mathbf{w} = \mathcal{L}(\pi)$. Uma dinâmica simbólica X é representada por G, ou G é uma apresentação de X, se o rótulo de todo percurso em G é um elemento de X, com o contrário também verdadeiro. O grafo de contextos é um grafo rotulado onde o conjunto de vértices é associado aos possíveis conjuntos de contextos, ou seja, $\mathcal{V} = \{F(\mathbf{w}) | \mathbf{w} \in L\}$. Um subconjunto X de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é um *sofic shift* se é representado por algum grafo rotulado G. *Sofic shifts* são dinâmicas simbólicas [1, Teorema 3.1.4]. SSS é um *sofic shift* cujo conjunto mínimo de palavras proibidas $\mathcal{O}$ é infinito.

B. Conjunto de Restrições

O conjunto de prefixos de uma palavra $\mathbf{w} = w_1 w_2 \cdots w_n \in \mathcal{A}^*$ é representado por $\mathcal{P}(\mathbf{w}) = \{w_1 \cdots w_j \mid 1 \leq j \leq n\} \cup \{\varepsilon\}$. De forma similar, o conjunto de sufixos de $\mathbf{w}$ é $\mathcal{S}(\mathbf{w}) = \{w_j \cdots w_n \mid 1 \leq j \leq n\} \cup \{\varepsilon\}$.

Seja $\mathbf{w} \in L$. O conjunto de restrições de $\mathbf{w}$, denotado por $\mathcal{C}(\mathbf{w})$ é dado por $\mathcal{C}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in L : \mathbf{wv} \notin L, \text{ mas, } \mathbf{wu} \in L \forall \mathbf{u} \in \mathcal{P}(\mathbf{v}) \setminus \{\mathbf{v}\}\}$. Um fato importante a ser considerado é que o contexto à direita de uma palavra na linguagem é unicamente caracterizado pelo seu conjunto de restrições [2, Teorema 1]. Para todo $\mathbf{w} \in L$, $\mathcal{C}(\mathbf{w}) = \mathcal{C}(\mathbf{v})$ para $\mathbf{v}$ o sufixo mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$. Em outras palavras, $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ constitui a informação necessária e suficiente para identificar o conjunto de restrições de alguma palavra em L. Seja $\mathbf{w} \in L$. Se $\mathbf{v}$ é o sufixo mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$, então $\mathcal{C}(\mathbf{w}a) = \mathcal{C}(\mathbf{v}a)$ para algum $a \in \mathcal{A}$ [2, Proposição 3]; ou seja, é possível determinar o conjunto de restrições da extensão de uma palavra a partir da extensão do seu sufixo mais longo em $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ pelo mesmo símbolo, que é de fundamental importância para a construção do grafo de contextos.

C. Máscara de Restrição

Denominamos $\mathbf{u} \in L$ uma restrição de $\mathbf{w} \in L$ se $\mathbf{wu} \notin L$. As restrições de uma palavra $\mathbf{w} \in L$ serão melhores exploradas através da definição seguinte.

Definição 1 (Máscara de Restrição): Seja $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$. A máscara de restrição de $\mathbf{w}$, denotado por $\mathcal{M}(\mathbf{w})$ é o subconjunto de $\mathcal{A} \times \{\square, \blacksquare\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- $(a, \blacksquare) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \mathbf{w}a \notin L, \ a \in \mathcal{A}$;
- $(a, \square) \in \mathcal{M}(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \mathbf{w}a \in L$, para $a \in \mathcal{A}$ um prefixo próprio de $\mathbf{u} \in L$ satisfazendo $\mathbf{wu} \notin L$;
- Se um símbolo não satisfaz as declarações anteriores, então não existe um par ordenado em $\mathcal{A} \times \{\square, \blacksquare\}$ com este símbolo.

Como uma extensão da definição da máscara de restrição, seja $B \subseteq \mathcal{A}^*$ tal que, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in B$, $\mathcal{M}(\mathbf{u}) = \mathcal{M}(\mathbf{w})$, daí definimos $\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(\mathbf{w})$.

D. Memória de Restrição

Dada uma palavra $\mathbf{w} \in L$, a memória de restrição de $\mathbf{w}$, denotado por $\mathcal{R}(\mathbf{w})$, é o sufixo mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$. A importância primordial da memória de restrição é determinar as restrições de uma palavra $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ estendida por um símbolo $a \in \mathcal{A}$, que é aplicado no algoritmo de separação para particionar o conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ bem como para determinar as transições de estado do grafo de contextos. Por fim, como nosso trabalho propõe a utilização do algoritmo proposto em [2] para obtenção do grafo de contextos, apresentamos a seguir um breve resumo das etapas do mesmo.

Etapa 1. Particionamento pela máscara de restrição: Nesta etapa é obtida a partição inicial, denominada de $\mathcal{P}^1$, que é formada por subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1})$ cujos elementos possuem a mesma máscara de restrição.

Etapa 2. Particionamento pela memória de restrição: Nesta etapa recursiva o particionamento proposto é empregado para refinar a partição anterior $\mathcal{P}^k$, $k \geqslant 1$.

Etapa 3. Critério de parada: O algoritmo termina quando refinamentos não são mais possíveis.

III. CARACTERIZAÇÃO DO CONJUNTO $\mathcal{O}$

Nesta seção apresentamos a caracterização do conjunto de palavras de comprimento mínimo $\mathcal{O}$ de um SSS por meio de expressões regulares.

Seja $\mathcal{A}$ um alfabeto finito e $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^*$. Definimos $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \{\mathbf{v}\} \cup \{\mathbf{w}\}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{vw}$, $\mathbf{v}^0 = \varepsilon$ e $\mathbf{v}^n = \mathbf{v}^{n-1}\mathbf{v}$. Definimos também o operador kleene, denotado por $*$, tal que $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2 + \cdots$. Estes operadores são denominados de regulares. Uma expressão regular sobre $\mathcal{A}$ é uma aplicação finita dos operadores regulares soma, produto e kleene sobre o conjunto das partes de $\mathcal{A}^*$. A seguir caracterizamos o conjunto $\mathcal{O}$ utilizado em todo o resto desse trabalho.

Definição 2: O conjunto de palavras de comprimento mínimo $\mathcal{O}$ de um SSS é dado pela expressão regular $\mathcal{O} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2^*\mathbf{w}_3 \cdots \mathbf{w}_{n-1}^*\mathbf{w}_n$ com $r \leq n-2$ operadores kleenes, onde $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ são palavras sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$ satisfazendo as seguintes condições:

1) $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_n \neq \varepsilon$ sendo $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_n$ sem operadores kleenes e $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_{n-1}$ com operadores kleenes;
2) O operador kleene só ocorre em palavras $\mathbf{w}_i$ para i par;

3) As palavras $\mathbf{w}_j$ para j ímpar podem ser nulas (isto permite que o conjunto $\mathcal{O}$ tenha palavras consecutivas com o operador Kleene).

Observação 1: A exigência da não existência de operadores kleenes nas palavras $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_n$ na primeira condição é devida ao fato que $\mathcal{O}$ é anti-fatorial, pois, se por exemplo $\mathbf{w}_1$ tiver operador kleene, então $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\cdots\mathbf{w}_n \in \mathcal{O}$, $\mathbf{w}'' = \mathbf{w}_2\cdots\mathbf{w}_n \in \mathcal{O}$ com $\mathbf{w}''$ fator de $\mathbf{w}'$ o que é uma contradição.

Exemplo 1: Seja $\mathcal{O} = ac^*bd$ um SSS sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{\ a,\ b,\ c,\ d\ \}$. Então, $n = 3$, $r = 1$, $|\mathbf{w}_1| = |\mathbf{w}_2| = 1$, $|\mathbf{w}_3| = 2$.

IV. Conjunto de Representantes dos conjuntos de restrições

Nesta seção apresentamos os principais resultados deste trabalho, que possibilita a construção do grafo de contextos para a classe de SSS.

Definição 3: Seja X um SSS com $\mathcal{O}$ dado pela Definição 2. Um conjunto suficiente de representantes das classes dos conjuntos de restrições da linguagem L de X é um subconjunto $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$ tal que

$$\{\ \mathcal{C}(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in L\ \} = \{\ \mathcal{C}(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in \mathcal{W}\ \}.$$

O resultado a seguir é útil na demonstração da Proposição 1.

Lema 1: Sejam $\mathbf{v} = v_1\cdots v_m, \mathbf{w} = w_1\cdots w_n \in \mathcal{A}^*$ com $|\mathbf{v}| = m$, $|\mathbf{w}| = n$ e $n \geqslant m$. Se $\mathbf{vw} = \mathbf{wv}$, então $\mathbf{v} = \mathbf{u}^p$ e $\mathbf{w} = \mathbf{u}^q$, onde $\mathbf{u} = v_1v_2\cdots v_d$ é prefixo e sufixo de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ com $p = \frac{m}{d}$, $q = \frac{n}{d}$ e d um divisor comum de m e n.

Demonstração: Ver Apêndice A. ■

A proposição a seguir fornece um limitante para os sufixos próprios mais longos das palavras em $\mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$ e é importante para a prova do Teorema 1 que é o principal resultado deste artigo.

Proposição 1: Seja $\mathcal{O}$ dado pela Definição 2. Se $\mathbf{w}$ é uma palavra em $\mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$ formada pela extensão dos símbolos de alguma $\mathbf{w}_i$ com operador kleene, então $|\mathbf{v}| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| + \cdots + |\mathbf{w}_i|$, em que $\mathbf{v}$ é o sufixo próprio mais longo de $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$.

Demonstração: Inicialmente considere palavras $\mathbf{w}$ em $\mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$ obtidas pela extensão dos símbolos da palavra com o primeiro operador kleene, ou seja, $\mathbf{w}_2$. É claro que se $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1\mathbf{s}$, com $\mathbf{s}$ um prefixo de $\mathbf{w}_2$ o resultado segue trivialmente, pois, $|\mathbf{v}| < |\mathbf{w}| = |\mathbf{w}_1\mathbf{s}| \leq |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|$. Daí, admita que $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_2^t\mathbf{s}$, com $|\mathbf{w}_2^t\mathbf{s}| \geqslant 1$ e suponha que $|\mathbf{v}| \geq |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|$. Vamos considerar dois casos, em que no primeiro vamos supor $|\mathbf{w}_1| > 1$, pois o segundo caso inclui a possibilidade de $|\mathbf{w}_1| = 1$.

Caso 1) $\mathbf{v}$ inicia em um sufixo próprio de $\mathbf{w}_1$.

Observe a representação na Fig. 1. Seja $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{r}$, com $\mathbf{r}$ um sufixo próprio de $\mathbf{w}_2^t\mathbf{s}$, então

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{r} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{r}\mathbf{u}, \qquad (1)$$

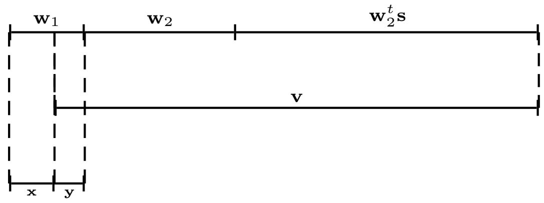

Fig. 1. Sufixo próprio mais longo iniciando em um sufixo próprio de $\mathbf{w}_1$.

em que $\mathbf{x}$ é um prefixo próprio de $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{u}$ é tal que $|\mathbf{u}| = |\mathbf{x}|$ e $\mathbf{ru} = \mathbf{w}_2^t\mathbf{s}$. Observe que $\mathbf{r}$ é também prefixo próprio de $\mathbf{w}_2^t\mathbf{s}$. Se colocarmos $\mathbf{w}_1 = \mathbf{xy}$, podemos escrever (1) na forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{xxy}\mathbf{w}_2\mathbf{r} = \mathbf{xy}\mathbf{w}_2\mathbf{ru} \Rightarrow \mathbf{xy}\mathbf{w}_2\mathbf{r} = \mathbf{y}\mathbf{w}_2\mathbf{ru}. \quad (2)$$

Vamos considerar os seguintes casos:

• $\underline{|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|}$:

Neste caso, observando (2) podemos escrever $\mathbf{x} = \mathbf{yl}$ e, substituindo em (2), obtemos:

$$\mathbf{w} = \mathbf{yly}\mathbf{w}_2\mathbf{r} = \mathbf{y}\mathbf{w}_2\mathbf{ru}. \qquad (3)$$

Segue de (3) que $\mathbf{ly}\mathbf{w}_2\mathbf{r} = \mathbf{w}_2\mathbf{ru} = \mathbf{w}_2\mathbf{w}_2^t\mathbf{s} = \mathbf{w}_2^t\mathbf{sns} = \mathbf{runs}$, onde $\mathbf{sn} = \mathbf{w}_2$. Como $|\mathbf{ru}| > |\mathbf{x}| = |\mathbf{yl}|$ e $\mathbf{ru} = \mathbf{w}_2^t\mathbf{s}$ segue que $\mathbf{ly}$ é prefixo próprio de $\mathbf{ru}$ e podemos escrever:

$$\mathbf{ly}\mathbf{w}_2\mathbf{r} = \mathbf{w}_2\mathbf{lym} \Rightarrow \mathbf{ly}\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2\mathbf{ly}. \qquad (4)$$

Aplicando o Lema 1 à (4) podemos concluir que $\mathbf{w}_2 = \mathbf{z}^p$ e $\mathbf{ly} = \mathbf{z}^q$, com $p, q \geqslant 1$ e $\mathbf{z}$ é prefixo e sufixo de $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{ly}$. Daí, segue que $\mathbf{w}_1 = \mathbf{yly} = \mathbf{yz}^q$ e utilizando a expressão regular temos que a palavra $\mathbf{w}_1\left(\mathbf{w}_2\right)^{2q}\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^q\right)^{2p}\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^q\right)^{2p-2}\mathbf{z}^q\mathbf{z}^q\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^q\right)^{2p-2}\mathbf{lyz}^q\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^q\right)^{2p-2}\mathbf{l}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n$ é proibida e contém a palavra proibida $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n$ como fator e isto é absurdo, pois $\mathcal{O}$ é anti-fatorial.

• $\underline{|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|}$:

Este caso é semelhante ao caso anterior bastando fazer $\mathbf{l} = \varepsilon$. Daí, concluimos que $\mathbf{w}_2 = \mathbf{z}^p$ e $\mathbf{ly} = \varepsilon\mathbf{y} = \mathbf{y} = \mathbf{z}^q$, com $p, q \geqslant 1$ e $\mathbf{z}$ é prefixo e sufixo de $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{y}$. Portanto, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{yy} = \mathbf{z}^{2q}$ e utilizando a expressão regular temos que a palavra $\mathbf{w}_1\left(\mathbf{w}_2\right)^{2q}\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^p\right)^{2q}\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^{2q}\right)^p\ \mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^{2q}\right)^{p-1}\left(\mathbf{z}\right)^{2q}\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^{2q}\right)^{p-1}\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n$ é proibida e contém a palavra proibida $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n$ como fator e isto é absurdo, pois $\mathcal{O}$ é anti-fatorial.

• $\underline{|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|}$:

Neste caso, ainda observando (2) podemos escrever $\mathbf{y} = \mathbf{x}^m\mathbf{l}$ com $|\mathbf{l}| < |\mathbf{x}|$ e substituindo em (2) temos $\mathbf{xx}^m\mathbf{l}\mathbf{w}_2\mathbf{r} = \mathbf{x}^m\mathbf{l}\mathbf{w}_2\mathbf{ru}$ o que implica $\mathbf{x}^m\mathbf{xl}\mathbf{w}_2\mathbf{r} = \mathbf{x}^m\mathbf{l}\mathbf{w}_2\mathbf{ru}$. Portanto

$$\mathbf{xl}\mathbf{w}_2\mathbf{r} = \mathbf{l}\mathbf{w}_2\mathbf{ru}. \qquad (5)$$

Observe que (5) é equivalente à (2), onde $\mathbf{y} = \mathbf{l}$ e $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}| = |\mathbf{l}|$, ou seja, estamos novamente no primeiro caso. Fazendo $\mathbf{x} = \mathbf{lh}$, segue que $\mathbf{w}_2 = \mathbf{z}^p$ e $\mathbf{hl} = \mathbf{z}^q$, em que $\mathbf{z}$

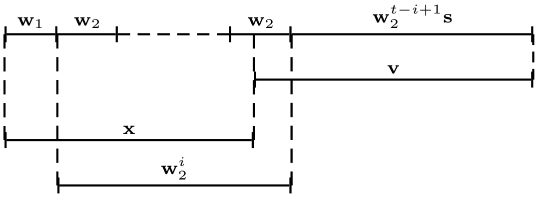

Fig. 2. Sufixo próprio mais longo iniciando em um sufixo de $\mathbf{w}_2$.

é prefixo e sufixo de $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{hl}$. Logo, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{xy} = \mathbf{xx}^m\mathbf{l} = \mathbf{lh}\left(\mathbf{lh}\right)^m\mathbf{l} = \mathbf{l}\left(\mathbf{hl}\right)^{m+1} = \mathbf{l}\left(\mathbf{z}^q\right)^{m+1}$ e utilizando a expressão regular observamos que a palavra $\mathbf{w}_1\left(\mathbf{w}_2\right)^{qm+2q}\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^p\right)^{qm+2q}\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^q\right)^{pm+2p}\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^q\right)^{(p-1)m+2p-2}\mathbf{z}^q\left(\mathbf{z}^q\right)^{m+1}\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^q\right)^{(p-1)m+2p-2}\mathbf{hl}\left(\mathbf{z}^q\right)^{m+1}\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^q\right)^{(p-1)m+2p-2}\mathbf{hw}_1\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n$ é proibida e contém a palavra proibida $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n$ como fator e isto é absurdo, pois $\mathcal{O}$ é anti-fatorial.

Caso 2) $\mathbf{v}$ inicia em um sufixo de $\mathbf{w}_2$.

Como foi comentado anteriormente se $|\mathbf{w}_1| = 1$, então $\mathbf{w}_1 = a$ com $a \in \mathcal{A}$ e $a \neq \varepsilon$ e, portanto, seu sufixo próprio mais longo em $\mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$ é ε e podemos admitir que tal sufixo inicia-se em $\mathbf{w}_2$. Daí, suponha que $\mathbf{v}$ inicia em um sufixo do i-ésimo $\mathbf{w}_2$ para algum $i = 1, 2, \ldots, t+1$.

Seja $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r}$ é sufixo de $\mathbf{w}_2^{t-i+1}\mathbf{s}$. Observando a Fig. 2 , podemos escrever:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{ru} = \mathbf{xw}_1\mathbf{w}_2\mathbf{r} \tag{6}$$

em que $\mathbf{u}$ satisfaz $\mathbf{ru} = \mathbf{w}_2^t\mathbf{s}$ e $\mathbf{x}$ é tal que $|\mathbf{x}| = |\mathbf{u}| \geqslant \left|\mathbf{w}_1\left(\mathbf{w}_2\right)^{i-1}\right|$ e daí podemos escrever $\mathbf{x} = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{w}_2\right)^{i-1}\mathbf{y}$. Substituindo em (6), temos que $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{w}_2\right)^{i-1}\left(\mathbf{w}_2\right)^{t-i+2}\mathbf{s} = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{w}_2\right)^{i-1}\mathbf{yw}_1\mathbf{w}_2\mathbf{r}$, ou seja, $\left(\mathbf{w}_2\right)^{t-i+2}\mathbf{s} = \mathbf{yw}_1\mathbf{w}_2\mathbf{r}$. Portanto

$$\mathbf{w}_2\left(\mathbf{w}_2\right)^{t-i+1}\mathbf{s} = \mathbf{yw}_1\mathbf{w}_2\mathbf{r}. \tag{7}$$

De (7) segue que $\left|\left(\mathbf{w}_2\right)^{t-i+1}\mathbf{s}\right| = |\mathbf{yw}_1\mathbf{r}|$. Como $\mathbf{yw}_1$ começa num prefixo de $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{r}$ é sufixo de $\left(\mathbf{w}_2\right)^{t-i+1}\mathbf{s}$, então $\left(\mathbf{w}_2\right)^{t-i+1}\mathbf{s} = \mathbf{yw}_1\mathbf{r}$ e substituindo em (7) segue que,

$$\mathbf{w}_2\left(\mathbf{yw}_1\right)\mathbf{r} = \left(\mathbf{yw}_1\right)\mathbf{w}_2\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{w}_2\left(\mathbf{yw}_1\right) = \left(\mathbf{yw}_1\right)\mathbf{w}_2. \tag{8}$$

Aplicando o Lema 1 à (8) segue que $\mathbf{yw}_1 = \mathbf{z}^p$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{z}^q$ com $p, q \geqslant 1$ e $\mathbf{z}$ é prefixo e sufixo de $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{yw}_1$. Utilizando a expressão regular temos que a palavra $\mathbf{w}_1\left(\mathbf{w}_2\right)^p\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^q\right)^p\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^p\right)^q\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^p\right)^{q-1}\mathbf{z}^p\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1\left(\mathbf{z}^p\right)^{q-1}\mathbf{yw}_1\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n$ é proibida e contém a palavra proibida $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_3\cdots\mathbf{w}_n$ como fator e isto é um absurdo, pois $\mathcal{O}$ é anti-fatorial.

Usando os mesmos argumentos anteriores temos o resultado válido para as palavras em $\mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$ obtidas pela extensão de símbolos da palavra com o segundo kleene. Prosseguindo desta maneira até a palavra com o r-ésimo kleene, obtemos o resultado desejado. ■

Agora podemos enunciar e provar o principal resultado deste trabalho, pois, apesar de um SSS possuir o conjunto $\mathcal{O}$ infinito, o teorema seguinte garante que podemos particionar $\mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$ em um número finito de classes de conjuntos de representantes do conjunto de restrições, o que nos permite a aplicação do algoritmo proposto em [2].

TABELA I

RESTRIÇÕES DE PALAVRAS EM $\mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$

$\mathbf{w} \in \mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$	Restrição pela expressão regular
w_{11}	$w_{12}\cdots w_{1s_1}\mathbf{w}_2^*\cdots\mathbf{w}_{n-1}^*\mathbf{w}_n$
$w_{11}w_{12}$	$w_{13}\cdots w_{1s_1}\mathbf{w}_2^*\cdots\mathbf{w}_{n-1}^*\mathbf{w}_n$
$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{w}_1$	$\mathbf{w}_2^*\cdots\mathbf{w}_{n-1}^*\mathbf{w}_n$
$\mathbf{w}_1w_{21}$	$w_{22}\cdots w_{2s_2}\mathbf{w}_2^*\cdots\mathbf{w}_{n-1}^*\mathbf{w}_n$
$\mathbf{w}_1w_{21}w_{22}$	$w_{23}\cdots w_{2s_2}\mathbf{w}_2^*\cdots\mathbf{w}_{n-1}^*\mathbf{w}_n$
$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2$	$\mathbf{w}_2^*\cdots\mathbf{w}_{n-1}^*\mathbf{w}_n$

Teorema 1: Seja X um SSS com $\mathcal{O}$ dado pela Definição 2. Então, existe um conjunto suficiente $\mathcal{W}$ de representantes das classes dos conjuntos de restrições das palavras na linguagem L de X tal que $\mathcal{W}$ é finito e $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$ em que $\mathcal{B} = \left\{\mathbf{w}_1\right\}\left\{\varepsilon, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_2^{k_1+1}\right\}\left\{\mathbf{w}_3\right\}\cdots\left\{\mathbf{w}_{n-2}\right\}\left\{\varepsilon, \mathbf{w}_{n-1}, \ldots, \mathbf{w}_{n-1}^{k_r+1}\right\}\left\{\mathbf{w}_n\right\}$ e os k_i's são maiores inteiros não negativos tais que $k_i \cdot |\mathbf{w}_{2i}| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| + \cdots + |\mathbf{w}_{2i-1}|$, $i = 1, \ldots, r$.

Demonstração: Seja $\mathcal{O}$ dado pela Definição 2. Suponha que $\mathbf{w}_1 = w_{11}w_{12}\cdots w_{1s_1}$, $\mathbf{w}_2 = w_{21}w_{22}\cdots w_{2s_2}, \ldots, \mathbf{w}_n = w_{n1}w_{n2}\cdots w_{ns_n}$. Os conjuntos de restrições das palavras em $\mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$ são formados por restrições destas pela expressão regular juntamente com as restrições dos seus sufixos próprios mais longos. Para entender melhor a demonstração, na Tabela I são listadas as palavras em $\mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$ até a palavra $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2$ e suas restrições pela expressão regular. Observe que após completar a primeira extensão por símbolos de $\mathbf{w}_2$ as restrições pela expressão regular se repetem. Agora só nos resta analisar as restrições advindas do sufixo próprio mais longo. Pela Proposição 1 se $\mathbf{v}$ é o sufixo próprio mais longo de $\mathbf{w} \in \mathcal{P}\left(\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1}\right)$, em que $\mathbf{w}$ é obtida pela extensão de símbolos de $\mathbf{w}_2$, então $|\mathbf{v}| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|$. Como $|\mathbf{w}_1|, |\mathbf{w}_2| < \infty$, existe um maior inteiro k_1 tal que $k_1 \cdot |\mathbf{w}_2| < |\mathbf{w}_1|$ o que implica $k_1 \cdot |\mathbf{w}_2| + |\mathbf{w}_2| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|$, daí $(k_1+1) \cdot |\mathbf{w}_2| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|$ e, portanto, $(k_1+2) \cdot |\mathbf{w}_2| \geqslant |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|$. Agora, se todos os k_1+1 sufixos próprios mais longos das palavras $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2^0, \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2^{k_1}$ forem distintos, então a partir daí os mesmos se repetem e, consequentemente, os conjuntos de restrições também se repetem. Se $\mathbf{w}$ for agora obtida pela extensão dos símbolos de $\mathbf{w}_4$, então $|\mathbf{v}| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| + |\mathbf{w}_3| + |\mathbf{w}_4|$. Sendo $|\mathbf{w}_1|, |\mathbf{w}_2|, |\mathbf{w}_3|, |\mathbf{w}_4| < \infty$, existe um maior inteiro k_2 tal que $k_2 \cdot |\mathbf{w}_4| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| + |\mathbf{w}_3|$, ou seja, $(k_2+1) \cdot |\mathbf{w}_4| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| + |\mathbf{w}_3| + |\mathbf{w}_4|$ e temos $(k_2+2) \cdot |\mathbf{w}_4| \geqslant |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| + |\mathbf{w}_3| + |\mathbf{w}_4|$. Daí, se todos os k_2+1 sufixos próprios mais longos das palavras $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_3\mathbf{w}_4^0, \ldots, \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_3\mathbf{w}_4^{k_2}$ forem distintos, então apartir daí os mesmos se repetem e, consequentemente, os conjuntos de restrições também se repetem. Repetindo este processo para os demais kleenes da expressão regular temos a

TABELA II

MÁSCARA DE RESTRIÇÃO PARA $\mathcal{W}$

$\mathbf{w} \in \mathcal{W}$	$\mathcal{M}(\mathbf{w})$
ε	$\emptyset$
a	$\{(b, \square), (c, \square)\}$
ab	$\{(d, \blacksquare)\}$
ac	$\{(b, \square), (c, \square)\}$
acb	$\{(d, \blacksquare)\}$

existência de maiores inteiros não negativos $k_3, \ldots, k_r$ tais que $k_3 \cdot |\mathbf{w}_6| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| + |\mathbf{w}_3| + |\mathbf{w}_4| + |\mathbf{w}_5|, \ \ldots, \ k_r \cdot |\mathbf{w}_{n-1}| < |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| + |\mathbf{w}_3| + \cdots + |\mathbf{w}_{n-2}|$. Considere o conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1\}\{\varepsilon, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_2^{k_1+1}\}\{\mathbf{w}_3\}\{\varepsilon, \mathbf{w}_4, \ldots, \mathbf{w}_4^{k_2+1}\}\{\mathbf{w}_5\} \cdots \{\mathbf{w}_{n-2}\}\{\varepsilon, \mathbf{w}_{n-1}, \ldots, \mathbf{w}_{n-1}^{k_r+1}\}\{\mathbf{w}_n\}$. O conjunto $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$ é um conjunto suficiente de representantes dos conjuntos de restrições da linguagem L de X e $\mathcal{W}$ é finito. ■

Corolário 1: Para $\mathcal{W}$ descrito no Teorema 1, então $|\mathcal{W}| \leq 1 + |\mathbf{w}_1| + (k_1 + 1) \times |\mathbf{w}_2| + \ \cdots \ + \ (k_1 + 2) \times (k_2 + 2) \times \cdots \times (k_{r-1} + 2) \times (k_r + 1) \times |\mathbf{w}_{n-1}| + (k_1 + 2) \times (k_2 + 2) \times \cdots \times (k_{r-1} + 2) \times (k_r + 2) \times (|\mathbf{w}_n| - 1)$.

Demonstração: O resultado segue pela aplicação do princípio fundamental da contagem [7, p. 09] ao conjunto $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$. ■

V. CONSTRUÇÃO DO GRAFO DE CONTEXTOS

Nesta seção apresentaremos a construção do grafo de contextos de um SSS utilizando o algoritmo proposto em [2], detalhando cada passo do mesmo. Como os conceitos de conjunto de contextos e conjunto de restrições são duais, a construção do grafo de contextos pode ser realizada a partir do conjunto $\{\mathcal{C}(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in L\}$, com uma transição de rótulo a de $\mathcal{C}(\mathbf{w})$ para $\mathcal{C}(\mathbf{w}a)$.

Exemplo 2: Seja X o SSS sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{\ a,\ b,\ c,\ d\ \}$ com $\mathcal{O} = ac^*bd$. Como $|\mathbf{w}_1| = |\mathbf{w}_2| = 1$, $|\mathbf{w}_3| = 2$, então $k_1 = 0$. Pelo Teorema 1, $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1\}\{\varepsilon, \mathbf{w}_2\}\{\mathbf{w}_3\} = \{a\}\{\varepsilon, c\}\{bd\} = \{abd, acbd\}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B} = \{\varepsilon, a, ab, ac, acb\}$. Vamos utilizar o primeiro passo do algoritmo para os elementos de $\mathcal{W}$. As respectivas máscaras de restrição estão listadas na Tabela II. Daí, a partição inicial é dada por $\mathcal{P}^1 = \{P_1 = \{\varepsilon\}, P_2 = \{a, ac\}, P_3 = \{ab, acb\}\}$. Para o segundo passo, ou seja, refinamento pela memória de restrição, as palavras em P_2 podem ser estendidas por b, c e $\mathcal{R}(ac) = ac \in P_2$ e $\mathcal{R}(acc) = \varepsilon \in P_1$. Daí, estas palavras devem ser separadas. Como $\mathcal{M}(P_3)$ não possui letras com bandeira aberta, então suas palavras não podem ser estendidas e as palavras em P_3 não podem ser separadas. Logo, refinamentos não são mais possíveis e o critério de parada para a terceira etapa é estabelecido, sendo $\mathcal{P}^2 = \{P_1' = \{\varepsilon\}, P_2' = \{a\}, P_3' = \{ac\}, P_4' = \{ab, acb\}\}$ a partição mais fina. Portanto, o grafo de contextos possui quatro vértices e existe um ramo com rótulo e do vértice P_i' para P_j' se $\mathbf{w} \in P_i'$, $\mathcal{R}(\mathbf{w}e) \in P_j'$ e $(e, \blacksquare) \notin \mathcal{M}(\mathbf{w})$ [2, Proposição 3]. Por fim, o grafo de contextos é mostrado na Fig. 3.

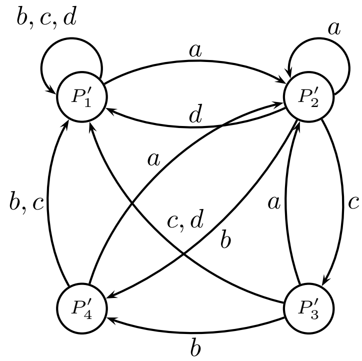

Fig. 3. Grafo de Contextos obtido da partição $\mathcal{P}^2$.

VI. CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste trabalho abriram uma nova perspectiva para a construção de grafos de contextos para a classe de SSS. Foi provada a existência de um conjunto finito de representantes dos conjuntos de restrições e foi estabelecido um limitante para tal conjunto. Uma proposta para a continuidade deste trabalho é a construção de grafos de contextos para a classe de SSS quando o conjunto $\mathcal{O}$ é representado como união de expressões regulares, pois este caso engloba algumas dinâmicas simbólicas conhecidas, tal como o *S-gap*.

APÊNDICE

A. Prova do Lema 1

Sejam $\mathbf{v} = v_1 \cdots v_m, \mathbf{w} = w_1 \cdots w_n \ \in \ \mathcal{A}^*$. Se $\mathbf{vw} = \mathbf{wv}$ e $m = n$, então $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{z}^p$, onde $\mathbf{z} = v_1 v_2 \cdots v_d$, d é um divisor de $m = n$ e $p = \dfrac{m}{d}$. Por outro lado se $n > m$, então pelo algoritmo da divisão existem únicos inteiros q e r tais que:

$$n - qm = r, \quad \text{com } 0 < r < m. \tag{9}$$

Seja d um divisor comum de m e n. De (9), $d \mid r$. Como $w_i = v_i, \ \forall\, i = 1, \ldots, m$ e $w_{m+i} = w_i, \ \forall i = 1, \ldots, r$ então, basta tomar $\mathbf{v} = (\mathbf{z})^{\frac{m}{d}}$ e $\mathbf{w} = (\mathbf{z})^{\frac{n}{d}}$, onde $\mathbf{z} = v_1 v_2 \cdots v_d$.

REFERÊNCIAS

[1] D. Lind and B. H. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.

[2] D. P. B. Chaves and C. Pimentel, "On the Follower Set Graph of Shifts of Finite Type", in *International Symposium on Information Theory*, (Honolulu, HI, USA), pp. 1802-1806, 2014.

[3] M. Crochemore, F. Mignosi, and A. Restivo, "Automata and forbidden words", *Inform. Process. Lett.*, vol. 67, pp. 111-117, 1998.

[4] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*, 3rd ed. Pearson Education, 2007.

[5] J. Berstel, L. Boasson, O. Carton, and I. Fagnot, "Minimization of automata", *CoRR*, vol. abs/1010.5318, 2010.

[6] M. V. Lawson, *Finite Automata*. Chapman & Hall/CRC, 2004.

[7] Magalhães, Marcos Nascimento. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. Edusp, 2006.

[8] Dawoud Ahmadi Dastjerdi and Somaye Jangjoo, *Dynamics and topology of S-gap shifts*, Topology Appl. 159 (2012), no. 10-11, 2654?2661. MR 2923435, https://doi.org/10.1016/j.topol.2012.04.002