Implementação de Baixa Complexidade para Algoritmos de Estimação do Ângulo de Chegada

Tadeu N. Ferreira, Marcello L. R. de Campos e Sergio L. Netto

***Resumo*— Este artigo apresenta uma implementação de baixa complexidade para algoritmos de estimação de direção de chegada (*direction-of-arrival*, DoA) como o ESPRIT ou o *covariance-based* DoA utilizando técnicas do tipo *fast subspace decomposition* (FSD). Estas técnicas permitem ainda uma detecção automática do número de fontes e possibilitam uma redução significativa da complexidade computacional, sem qualquer perda de desempenho dos algoritmos originais.**

***Palavras-Chave*— *direction-of-arrival*, decomposição em autovalores e autovetores**

***Abstract*— This paper presents a low complexity implementation for some direction-of-arrival (DoA) estimation algorithms, such as ESPRIT or covariance-based DoA, using fast subspace decomposition (FSD). Such technique also provides an automatic detection of the number of sources and yields a significant computation reduction without any performance degradation in the original algorithm.**

***Keywords*— direction-of-arrival, eigendecomposition**

I. Introdução

O uso de arranjo de antenas na conexão de *uplink* em sistemas de comunicações *wireless* proporciona uma série de vantagens na comparação com o sistema tradicional em que apenas uma antena é utilizada [1]. Em outras aplicações, como sistemas de radares e de captura de áudio, o processamento utilizando arranjos de sensores também apresenta vantagens significativa [2].

Considere um sistema de transmissão em banda estreita, em que as fontes estão localizadas aproximadamente num mesmo plano. Além disso, considere ainda que o meio de transmissão é isotrópico e o arranjo de recepção está localizado no campo distante (*far-field*) das fontes. Nessas condições, o problema de localização de fontes pode ser simplificado para o problema de estimação do ângulo θ de chegada (DoA, *direction-of-arrival*), como mostrado na Fig. 1.

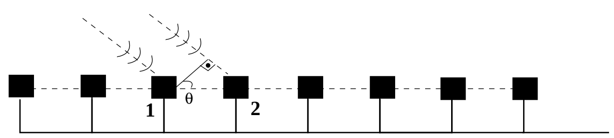

Fig. 1. Ângulo de chegada θ a ser estimado no problema de DoA.

Inicialmente, os métodos para estimação de DoA se baseavam em técnicas não-paramétricas em que a forma de onda total do sinal transmitido precisava ser estimada [2]. Tais algoritmos apresentavam elevada complexidade computacional em sua execução. Posteriormente, foi desenvolvido o algoritmo *spectral* MUSIC (*multiple signal classification*), que estima os ângulos de DoA como parâmetros do sinal de chegada [3]. Apesar de apresentar uma complexidade bem menor do que a de algoritmos não-paramétricos, o algoritmo *Spectral* MUSIC ainda requer uma alta carga computacional por incluir uma busca exaustiva em seu processamento. Uma vantagem do *Spectral* MUSIC, porém, é a de não impor nenhuma restrição na geometria do arranjo de recepção.

O algoritmo ESPRIT (*estimation of parameters via rotational invariance techniques*) [4] atinge uma redução na complexidade computacional da estimação de DoA ao exigir algumas restrições na geometria do arranjo de recepção. Tais restrições, representadas na Fig. 2, são conhecidas como invariância à translação e se traduzem em uma redundância na representação do subespaço dos sinais conhecida como invariância à rotação (*rotational invariance*).

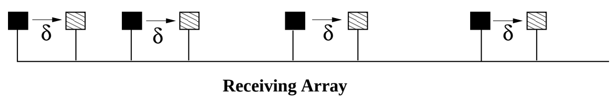

Fig. 2. Restrições típicas na geometria do arranjo de recepção impostas pelo algoritmo ESPRIT.

Recentemente, foi proposto o algoritmo CB-DoA [5], que se apresenta como uma alternativa de baixa complexidade computacional para o ESPRIT, sem prejuízo no erro médio quadrático (MSE, *mean-square* error) resultante.

Este artigo tem como objetivo apresentar uma alternativa de baixa complexidade para o CB-DoA, cuja aplicação ao ESPRIT já foi realizada em [7], substituindo as operações de decomposição em autovalores e autovetores (EVD, *eigenvalue/eigenvector decomposition*) por decomposições rápidas no espaço de Krylov [6] [7]. Verifica-se que esta substituição é capaz de reduzir a complexidade computacional do algoritmo sem afetar o desempenho correspondente.

II. Ambiente para Estimação de DoA

Considere um sistema com M fontes de transmissão e com N antenas de recepção obedecendo às restrições de geometria do ESPRIT, representadas na Fig. 2. Sejam $s_m(k)$ o sinal transmitido pela m-ésima fonte no instante k, $x_i(k)$ o sinal recebido pela i-ésima antena no instante k e $a_i(\theta_m)$ o ganho da i-ésima antena na direção θ_m da m-ésima fonte. Com estas

Tadeu N. Ferreira¸ Departamento de Engenharia de Telecomunicações, Universidade Federal Fluminense (UFF), Marcello L. R. de Campos e Sergio L. Netto, Programa de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), E-mails: tadeu.n.ferreira@gmail.com, mcampos@ieee.org, sergioln@lps.ufrj.br. Este trabalho foi parcialmente financiado por CNPq, Capes e Faperj.

definições, podemos escrever que

$$x_i(k) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(k) a_i(\theta_m) + n_i(k), \tag{1}$$

para $0 \leq i < N$, onde $n_i(k)$ representa um ruído branco aditivo gaussiano (AWGN, *additive white Gaussian noise*) recebido pela i-ésima antena no instante k.

Considere as seguintes estruturas matriciais,

$$\mathbf{s}(k) = \begin{bmatrix} s_0(k) & s_1(k) & \ldots & s_{M-1}(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_0(k) & x_1(k) & \ldots & x_{N-1}(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

$$\mathbf{n}(k) = \begin{bmatrix} n_0(k) & n_1(k) & \ldots & n_{N-1}(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0(\theta_0) & a_0(\theta_1) & \cdots & a_0(\theta_{M-1}) \\ a_1(\theta_0) & a_1(\theta_1) & \cdots & a_1(\theta_{M-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1}(\theta_0) & a_{N-1}(\theta_1) & \cdots & a_{N-1}(\theta_{M-1}) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

onde $\mathbf{A}$, a matriz de ganhos direcionais das antenas receptoras em função dos DoAs, é conhecida como *array manifold*. Usando uma notação matricial, a Eq. (1) pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k). \tag{6}$$

Os algoritmos que exploram a invariância à rotação no subespaço dos sinais (tais como o ESPRIT e o CB-DoA) necessitam que a geometria do arranjo de recepção obedeça às restrições apresentadas na Fig. 1. Neste caso, cada antena do arranjo deve fazer parte de um *doublet*, que constitui um par de antenas com vetor-deslocamento $\boldsymbol{\delta}$ constante. Isso gera dois subarranjos, um contendo as antenas de origem do vetor $\boldsymbol{\delta}$, e outro contendo as antenas de destino desse vetor, sendo que uma mesma antena pode pertencer a ambos subarranjos.

Sendo P a dimensão dos subarranjos, podemos representar o sinal recebido $x_{j,i}$ referente ao subarranjo j e antena transmissora i da seguinte forma:

$$x_{0,i}(k) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(k) a_i(\theta_m) + n_{0,i}(k), \tag{7}$$

$$x_{1,i}(k) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(k) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\omega\delta}{c}\sin\theta_m} a_i(\theta_m) + n_{1,i}(k), \tag{8}$$

para $0 \leq i < P$, onde ω representa a frequência angular da portadora e c é a velocidade de propagação da onda eletromagnética. Define-se

$$\phi_m = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\omega\delta}{c}\sin\theta_m}, \tag{9}$$

onde o parâmetro ϕ_m será efetivamente estimado e é referente ao termo do ganho da m-ésima antena.

III. Estimação de DoA usando CB-DoA

Considere que todos os sinais possuem média estatística zero. Um modelo de covariância para o sinal recebido $\mathbf{x}(k)$ pode ser expressado por

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_n, \tag{10}$$

onde $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^H(k)]$ representa a covariância do sinal transmitido enquanto $\mathbf{R}_n$ é a covariância do ruído. Supõe-se aqui que as fontes sejam descorrelacionadas entre si, ou seja, $\mathbf{R}_s$ é diagonal, enquanto o ruído é considerado espacialmente branco, ou seja, $\mathbf{R}_n = \sigma^2\mathbf{I}$.

Considere as matrizes de seleção $\mathbf{J}_0^{a,b}$ e $\mathbf{J}_1^{a,b}$ tais que

$$\mathbf{J}_0^{a,b} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a & \mathbf{0}_{a\times(b-a)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_1^{a,b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{a\times(b-a)} & \mathbf{I}_a \end{bmatrix}, \tag{11}$$

onde $\mathbf{I}_a$ é uma matriz identidade com dimensões $a \times a$. Com isso, $\mathbf{J}_0^{A,B}$ e $\mathbf{J}_1^{A,B}$ selecionam as A primeiras ou últimas linhas, respectivamente, de um vetor com B linhas. Utilizando-se as equações (11), consegue-se descrever a covariância dos vetores nos subarranjos por:

$$\mathbf{R}_{00} = \mathbf{J}_0^{P,N}\mathbf{R}_x(\mathbf{J}_0^{P,N})^H, \tag{12}$$

$$\mathbf{R}_{01} = \mathbf{J}_0^{P,N}\mathbf{R}_x(\mathbf{J}_1^{P,N})^H, \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

de modo que

$$\mathbf{R}_{00} = \mathbf{J}_0^{P,N}\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\mathbf{J}_0^{P,N})^H + \sigma^2\mathbf{I}, \tag{15}$$

$$\mathbf{R}_{01} = \mathbf{J}_0^{P,N}\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{\Phi}^H\mathbf{A}^H(\mathbf{J}_0^{P,N})^H + \sigma^2\mathbf{I}. \tag{16}$$

No algoritmo CB-DoA, inicialmente é feita uma decomposição de $\mathbf{R}_{00}$ em autovalores e autovetores (EVD, *eigenvalue*/*eigenvector decomposition*):

$$\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{U}^H = \mathrm{EVD}(\mathbf{R}_{00}), \tag{17}$$

onde $\mathbf{\Lambda}^2$ contém os autovalores de $\mathbf{R}_{00}$ em sua diagonal e $\mathbf{U}$ contém seus autovetores correspondentes. Como mostrado em [4], os autovalores de $\mathbf{R}_{00}$ podem ser separados em dois conjuntos de autovalores. Lembrando-se que M representa o número de fontes no sistema, então deve haver $(P - M)$ autovalores iguais a σ^2 enquanto os outros M autovalores são maiores que σ^2, e são denominados de autovalores do espaço dos sinais [4]. Estes M maiores autovalores são então agrupados na diagonal de $\mathbf{\Lambda}_s$, enquanto seus correspondentes autovetores são colocados nas colunas de $\mathbf{U}_s$, de modo que que podemos definir a matriz de projeção

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}_s^H\mathbf{\Lambda}_s^{-1}. \tag{18}$$

Aplicando-se esta transformação a ambos os lados do pêncil matricial $\mathbf{R}_{01} - \hat{\sigma}^2\mathbf{I}$, tem-se

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{F}(\mathbf{R}_{01} - \hat{\sigma}^2\mathbf{I})\mathbf{F}^H, \tag{19}$$

onde $\hat{\sigma}^2$ é obtida pelos menores autovalores de $\mathbf{\Lambda}$, numa abordagem semelhante à utilizada no algoritmo TXK para equalização cega [8].

A estimação de $\mathbf{\Phi}$ é obtida a partir de uma EVD sobre $\mathbf{\Psi}$,

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{\Phi}}\mathbf{B}^{-1} = \mathrm{EVD}(\mathbf{\Psi}), \tag{20}$$

onde $\mathbf{B}$ é uma matriz de posto completo. Por fim, os elementos de $\mathbf{\Phi}$ são mapeados nos DoAs utilizando a eq. (9).

TABELA I
OPERAÇÕES EXIGIDAS PELOS ALGORITMOS TLS-ESPRIT E CB-DOA.

Operação	**Complexidade** [6]	**ESPRIT**	**CB-DoA**
EVD - Não-hermitiana	$\mathcal{O}(25n^3)$	2	1
EVD - Hermitiana	$\mathcal{O}(n^2)$	1	1
Inversão	$\mathcal{O}(2n^3/3)$	2	1
Inversão - Diagonal	$\mathcal{O}(n)$	–	1
Multiplicação	$\mathcal{O}(n^3)$	6	3
Subtração	$\mathcal{O}(n^2)$	–	1

IV. DECOMPOSIÇÕES USANDO ESPAÇO DE KRYLOV

Na Tabela I, observam-se as operações aritméticas requeridas pelos algoritmos ESPRIT (na versão TLS, *total least-squares*) e CB-DoA.

Nesta tabela, verifica-se o grande peso computacional exercido pela operação de EVD para ambos os algoritmos, em particular, a EVD para matrizes não hermitianas. No entanto, no caso do algoritmo CB-DoA, a matriz hermitiana sobre a qual se realiza a operação de EVD tem dimensões $P \times P$, enquanto que a matriz não-hermitiana na qual se aplica a outra EVD apresenta dimensões $M \times M$, sendo M sempre menor que P e, comumente, $M << P$. No caso da operação de EVD sobre matrizes hermitianas, existe uma solução alternativa, apresentada no artigo [7] com o nome FSD (*fast subspace decomposition*), em que há uma redução na complexidade de operações para $\mathcal{O}(n)$.

Além de fornecer estimação para os autovalores e autovetores da matriz de covariância $\mathbf{R}_{00}$, o FSD também estima o número de fontes no ambiente de forma eficiente, como discutido na Subseção IV-B. Essencialmente, o FSD funciona em duas etapas, primeiramente são feitas atualizações de Lanczos sobre a matriz de autocovariância $\mathbf{R}_{00}$ de modo a reduzi-la a uma matriz tridiagonal. A seguir é aplicado o método para extração de autovalores e autovetores da matriz tridiagonal [6] [7].

A. Atualização de Lanczos

As atualizações de Lanczos são responsáveis por transformar uma matriz $\mathbf{A}$ em uma matriz $\mathbf{T}$ tridiagonal. Essa transformação pode ser feita pelo processo de tridiagonalização de Householder [6], ou seja, através de uma matriz ortogonal $\mathbf{Q}$, chega-se a uma transformação de similaridade $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^H$. Neste caso, considere que $\mathbf{T}$ tenha a seguinte estrutura [6]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Como $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^T$, ou seja, $\mathbf{AQ} = \mathbf{QT}$, então

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_k = \beta_{k-1}\mathbf{q}_{k-1} + \alpha_k\mathbf{q}_k + \beta_k\mathbf{q}_{k+1}, \tag{22}$$

para $0 \leq k < n$, onde $\mathbf{q}_k$ representa a k-ésima coluna de $\mathbf{Q}$. Lembrando que $\mathbf{Q}$ é uma matriz ortogonal, a Eq. (22) pode ser reescrita como

$$\mathbf{q}_k^T\mathbf{A}\mathbf{q}_k = \alpha_k. \tag{23}$$

Sendo $\mathbf{r}_k = \beta_k\mathbf{q}_{k+1}$, então $\beta_k = \|\mathbf{r}_k\|_2$ e

$$\mathbf{r}_k = (\mathbf{A} - \alpha_k\mathbf{I})\mathbf{q}_k - \beta_{k-1}\mathbf{q}_{k-1}. \tag{24}$$

Com isso, as atualizações de Lanczos podem ser descritas por [6]:

while $(\beta_k \neq 0)$
$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{r}_k/\beta_k;$
$k = k+1;$
$\alpha_k = \mathbf{q}_k^T\mathbf{A}\mathbf{q}_k;$
$\mathbf{r}_k = (\mathbf{A} - \alpha_k\mathbf{I})\mathbf{q}_k - \beta_{k-1}\mathbf{q}_{k-1};$
$\beta_k = \|\mathbf{r}_k\|_2;$
end

que são inicializadas com $\beta_0 = 1$, $\mathbf{q}_0 = 0$ e $k = 0$. Com isso, é gerada uma matriz $\mathbf{T}$ tal que a Eq. (21) seja obedecida e, além disso, $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^T$. Os autovalores de $\mathbf{T}$ são iguais aos autovalores de $\mathbf{A}$ e podem ser obtidos por decomposições QR de baixa complexidade devido à estrutura tridiagonal de $\mathbf{T}$ [6].

B. Detecção do Número de Fontes

No algoritmo CB-DoA tradicional, a detecção do número de fontes era realizada de maneira separada por algoritmos como o AIC (Akaike's information criterion) [9], onde o número de fontes $\hat{M}$ é estimado pelo valor de k que minimiza a função

$$\mathrm{AIC}(k) = -2\log\left(\frac{\prod_{i=k+1}^{N}(\lambda_i)^{(1/(N-k))}}{\frac{1}{N-k}\sum_{i=k+1}^{N}\lambda_i}\right) + 2k(2N-k), \tag{25}$$

onde λ_i são autovalores da matriz de covariância.

No caso da detecção do número de fontes no algoritmo FSD, é utilizada a métrica

$$\mathrm{FSD\_\#sources}(k) = \log\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{N-k}(\|\mathbf{R}_{00}\|^2 - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2)}}{\frac{1}{N-k}(\mathrm{Tr}(\mathbf{R}_{00}) - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i}\right). \tag{26}$$

V. ANÁLISE DE COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

A motivação principal para a aplicação do FSD no algoritmo CB-DoA é a diminuição da complexidade computacional da operação de EVD sobre matrizes hermitianas. O algoritmo resultante é visto na Tabela II. Com a técnica FSD, há uma diminuição na complexidade da operação de EVD sobre a matriz $\mathbf{R}_{00}$ e também na detecção do número de fontes em relação aos métodos tradicionais, como o AIC, como indicado na Tabela III. Sendo assim, a redução α_R de complexidade computacional para as duas versões do algoritmo CB-DoA é dada por:

$$\alpha_R = \left(1 - \frac{25M^3 + P^2 + 3M^2P + 2P + M}{25M^3 + P^3 + 3M^2P + 2P + M^3}\right)100\%. \tag{27}$$

TABELA II

DESCRIÇÃO RESUMIDA DE OPERAÇÕES DO CB-DOA COM FSD.

CB-DoA com FSD
$\hat{M}$ = FSD_#sources($\mathbf{R}_{00}$)
$[\mathbf{Q}, \mathbf{T}]$ = Lanczos($\mathbf{R}_{00}, \hat{M}$)
$[\mathbf{U}_s, \hat{\sigma}_N^2]$ = EVD_Tridiag($\mathbf{Q}, \mathbf{T}, \hat{M}$)
$\mathbf{F} = \mathbf{\Sigma}_s^{-1}\mathbf{U}_s^H$
$\mathbf{R}_a = \hat{\mathbf{R}}_{01} - \hat{\sigma}^2\mathbf{I}$
$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}\mathbf{R}_a\mathbf{F}^H$
$[\mathbf{\Phi}^H]$ = EVD($\mathbf{R}_1$)

TABELA III

COMPARAÇÃO MOSTRANDO A REDUÇÃO DE COMPLEXIDADE PROPORCIONADA PELO FSD.

Operação	**Compl.** [6] [7]	**Quant.**	**Flops**
EVD Não-hermitiana	$\mathcal{O}(25n^3)$	1	$25M^3$
EVD Hermitiana	$\mathcal{O}(n^3)$	1	P^3
EVD Lanczos	$\mathcal{O}(n^2)$		P^2
Inversão Diagonal	$\mathcal{O}(n)$	1	P
Multiplicação	$\mathcal{O}(n^3)$	3	$3M^2P$
Subtração Diagonal	$\mathcal{O}(n)$	1	P
Detecção de Fonte (AIC)	$\mathcal{O}(n^3)$	1	M^3
Detecção de Fonte (FSD)	$\mathcal{O}(n)$		M

Uma das restrições de funcionamento do algoritmo CB-DoA é a de $M < P$. Em geral, pode-se afirmar que $M << P$. Num caso em que $M = 1$ e $P = 2$, temos, por exemplo, $\alpha_R = (1 - 37/48)100\% \approx 23\%$. À medida que o valor de P é aumentado, essa redução de complexidade é mais expressiva, tendendo ao valor $\alpha_R = (1 - 1/P)100\%$. A Fig. 3 apresenta os resultados

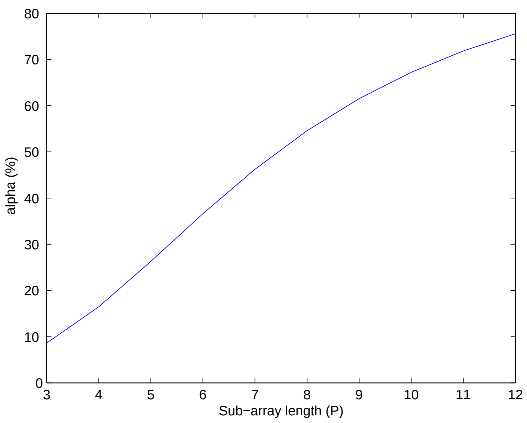

Fig. 3. Redução α_R para o número de fontes fixo $M = 2$ e a dimensão P do sub-arranjo variando entre 3 e 12.

para o caso de $M = 2$, variando-se o valor de P entre 3 e 12, onde se verifica uma redução bastante expressiva na complexidade do algoritmo CB-DoA progressivamente quando a dimensão P do sub-arranjo é aumentada. Destaca-se ainda desta análise que a redução de complexidade é feita em relação ao algoritmo CB-DoA, considerado de baixa complexidade quando comparado aos algoritmos alternativos para estimação de DoA.

VI. SIMULAÇÕES

A seção anterior procurou medir a redução de complexidade atingida ao se fazer a operação de EVD por atualizações de Lanczos e a detecção do número de fontes via FSD. O objetivo desta seção é mostrar que essa redução de complexidade não foi atingida às custas de uma degradação no desempenho do algoritmo. Para isto, a Fig. 4 mostra a evolução no MSE (*mean-square error*) do algoritmo CB-DoA tradicional e a versão FSD para uma faixa de SNR (*signal-to-noise ratio*) entre 5 e 50 dB. São usadas $M = 2$ fontes localizadas em 2 e 7 graus, com $P = 4$ elementos nos sub-arranjos, num total de 5 antenas de recepção. A métrica MSE é calculada por:

$$\text{MSE} = \frac{1}{2Q}\sum_{q=1}^{300}\sum_{m=1}^{2}|\theta_m - \hat{\theta}_m|^2, \tag{28}$$

ou seja, é feita uma média dos erros quadráticos na estimação dos θ para cada fonte e nas realizações de Monte-Carlo, que no caso foram 300. Verifica-se, a partir da Fig. 4, que o MSE das duas versões do algoritmo CB-DoA é praticamente o mesmo para toda a faixa de SNR, sendo que nesse cenário em que $M = 2$ e $P = 4$, tem-se uma redução de 16,5% no número de flops utilizando a técnica FSD.

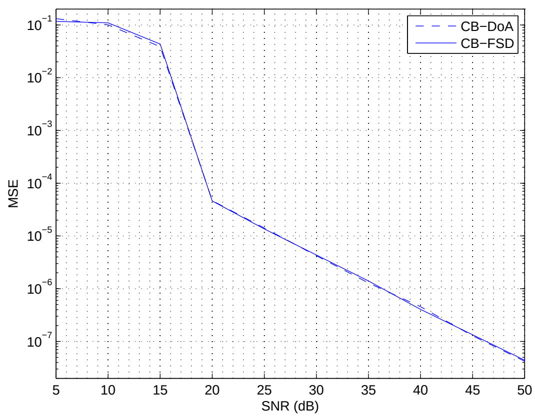

Fig. 4. Simulação do algoritmo CB-DoA, com EVD calculado de maneira tradicional e com detecção de fonte por AIC (legenda CB-DoA) e a versão com FSD (legenda CB-FSD) com $M = 2$ e $P = 4$.

VII. CONCLUSÕES

Neste artigo foi apresentada uma nova versão para o algoritmo CB-DoA com menor custo computacional de implementação. O novo algoritmo CB-DoA também possui um método para detecção automática para o número de fontes, com menor custo que os métodos clássicos. Simulações computacionais indicam que estas simplificações aritméticas não provocam qualquer perda de desempenho do algoritmo resultante.

REFERÊNCIAS

[1] L. C. Godara, "Applications of Antenna Arrays to Mobile Communications I: Performance Improvement, Feasibility and System Considerations," *Proceedings of the IEEE*, v. 85, n. 7, pp 1031-1060, July 1997.

[2] H. L. van Trees, "Optimum Array Processing," John Wiley and Sons, New York, 2002.

[3] R. O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. AP-34, n. 3, pp. 276-280, March 1986.

[4] R. Roy e T. Kailath, "ESPRIT - Estimation of Parameters via Rotational Invariance Techniques," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 37, n. 7, pp. 984-995, July 1989.

[5] T. Ferreira, S. L. Netto e P. S. R. Diniz, "Low Complexity Covariance-based DoA Estimation Algorithm," In: *Proceedings of the 15th European Signal Processing Conference*, pp. 100-104, Poznan, September 2007.

[6] G. H. Golub e C. F. van Loan, *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 3^{rd} edition, Baltimore, 1996.

[7] G. Hu e T. Kailath, "Fast Subspace Decomposition," *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 42, n. 3, pp. 539–551, March 1994.

[8] L. Tong, G. Xu and T. Kailath, "Blind Identification and Equalization Based on Second-Order Statistics: A Time-Domain Approach," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, n. 2, pp. 340-349, March 1994.

[9] M. Wax and T. Kailath, "Detection of Signals by Information Theoretic Criteria," *IEEE Trans. on Accoustics, Speech and Signal Processing*, v. 33, n. 2, pp. 387–392, April 1985.