

# Modelo Complexo $\eta$ - $\mu$ Bivariável com Correlações Cruzadas

Alessandro P. de Oliveira, Thiago A. M. de Bairros, Rausley A. A. de Souza e Michel D. Yacoub

**Resumo**— Neste trabalho, propõe-se um modelo de desvanecimento  $\eta$ - $\mu$  bivariável complexo com um parâmetro de deslocamento de fase para representar correlações cruzadas entre as componentes cartesianas do modelo. São obtidas expressões em forma fechada para a distribuição conjunta envolvendo duas envoltórias e duas fases, bem como para as distribuições marginais das componentes em fase e quadratura. O modelo inclui casos particulares conhecidos. Como aplicação, considera-se um sistema com detecção de portadora parcialmente coerente sujeito ao desvanecimento  $\eta$ - $\mu$ . Os resultados mostram que os parâmetros do modelo  $\eta$ - $\mu$  e a correlação influenciam significativamente o desempenho do sistema.

**Palavras-Chave**— distribuição  $\eta$ - $\mu$ , distribuição conjunta envoltória-fase bivariável, diferença de fase, deslocamento de fase.

**Abstract**— In this work, a complex bivariate  $\eta$ - $\mu$  fading model with a phase-shift parameter is proposed to represent cross-correlations between the Cartesian components of the model. Closed-form expressions are derived for the joint distribution involving two envelopes and two phases, as well as for the marginal distributions of the in-phase and quadrature components. The proposed model includes well-known special cases. As an application, a partially coherent carrier detection system operating over an  $\eta$ - $\mu$  fading channel is considered. The results show that the  $\eta$ - $\mu$  model parameters and the correlation significantly affect the system performance.

**Keywords**—  $\eta$ - $\mu$  distribution, bivariate envelope-phase joint distribution, phase difference, phase shift.

## I. INTRODUÇÃO

Durante a propagação em canais de comunicações sem fio, sinais de rádio-frequência estão sujeitos ao fenômeno de desvanecimento, o qual provoca alterações aleatórias em características como amplitude e fase devido a efeitos de propagação, tais como reflexão, difração e espalhamento. Nesse contexto, esses parâmetros são usualmente tratados de forma estocástica por meio de modelos estatísticos, fundamentais para o projeto e a análise de sistemas de comunicações sem fio, incluindo estudos de cobertura, desempenho e tráfego.

Em geral, estatísticas marginais, como envoltória, potência e fase, são suficientes para a avaliação do sistema. Entretanto, determinadas aplicações demandam estatísticas adicionais, frequentemente baseadas apenas em informações de envoltória e potência, enquanto características relacionadas à fase permanecem menos exploradas em razão da elevada complexidade matemática envolvida [1]. Como consequência,

estudos relacionados às estatísticas de fase ainda permanecem relativamente limitados na literatura, mantendo esse tema como uma área em aberto para investigação e discussão.

O modelo de fase proposto em [2] foi empregado tanto na análise da capacidade de canais MIMO [3] quanto na derivação de métricas de desempenho de sistemas de comunicação. Nesse contexto, a caracterização estatística da diferença de fase possibilitou a obtenção da probabilidade de erro de símbolo para esquemas  $M$ -PSK [4]. Em [5], são investigadas e comparadas análises da probabilidade média de erro de bit probabilidade de erro de bit média (*average bit error probability*, ABEP) em canais com desvanecimento considerando distribuições de fase uniforme e não uniforme aplicadas a sistemas OFDM.

Em [6], foi proposta a distribuição conjunta envoltória-fase de dois sinais complexos Nakagami- $m$  correlacionados. Nesse trabalho, também foram obtidas as funções densidade de probabilidade função densidade de probabilidades (FDPs) referentes às componentes em fase e quadratura. Em [7], foi apresentado um modelo complexo  $\alpha$ - $\mu$  bivariável em que a correlação cruzada entre as componentes fase-quadratura e quadratura-fase foi considerada. Em [1], foi apresentado um modelo complexo  $\alpha$ - $\mu$  bivariável em que se considerou, simultaneamente, a correlação cruzada entre as componentes fase-quadratura e quadratura-fase e o desbalanceamento de *Clusters*. Neste trabalho, a análise de desempenho de sistemas BPSK parcialmente coerentes foi realizada. Um modelo  $\eta$ - $\mu$  bivariável complexo foi proposto em [8], sendo o modelo descrito em [6] obtido como caso particular. Entretanto, em [8] não foi apresentada nenhuma análise de desempenho de sistemas. Tanto em [6] quanto em [8], assume-se a existência de correlação entre as componentes fase-fase e quadratura-quadratura, desconsiderando-se, entretanto, correlações cruzadas entre fase e quadratura. A consideração das correlações cruzadas entre fase e quadratura é motivada, ao menos, pela necessidade de preservar a compatibilidade com um de seus casos particulares, que é o modelo Rayleigh. Além disso, a principal motivação consiste em representar o fenômeno físico associado a essa correlação, que corresponde ao efeito do *delay spread* na propagação do sinal [7].

Este artigo propõe um modelo complexo  $\eta$ - $\mu$  bivariável que, além de considerar as correlações entre as componentes fase-fase e quadratura-quadratura, incorpora também as correlações cruzadas entre fase-quadratura e quadratura-fase. São obtidas a FDP conjunta envoltória-fase e as FDPs das componentes em fase e quadratura. Adicionalmente, a FDP envoltória-fase obtida é utilizada na análise de desempenho de sistemas BPSK parcialmente coerentes.

## II. PRELIMINARES

A distribuição  $\eta$ - $\mu$  modela variações de curto prazo em canais sem linha de visada [9]. Esse modelo possui dois formatos distintos: no Formato 1, o parâmetro  $\eta$  representa a razão entre as potências das componentes em fase e quadratura, enquanto no Formato 2 ele corresponde ao coeficiente de correlação entre essas componentes. A relação matemática entre os dois formatos é dada por:  $\eta_{\text{Format1}} = (1 - \eta_{\text{Format2}})/(1 + \eta_{\text{Format2}})$  e  $\eta_{\text{Format2}} = (1 - \eta_{\text{Format1}})/(1 + \eta_{\text{Format1}})$ , com  $0 < \eta_{\text{Format1}} < \infty$  e  $-1 < \eta_{\text{Format2}} < 1$ . Neste trabalho, considera-se apenas o Formato 1, sendo  $\mu > 0$  o parâmetro associado ao número de *clusters* de multipercurso. Os modelos Nakagami- $m$ , Hoyt e Rayleigh podem ser obtidos como casos particulares mediante escolhas adequadas dos parâmetros  $\eta$  e  $\mu$  [9, Sec. 3.3]. Sejam  $N_1$  e  $N_2$  dois processos aleatórios complexos descritos por variáveis aleatórias do tipo  $\eta$ - $\mu$ , parametrizadas por  $(\eta_1, \mu, \hat{r}_1)$  e  $(\eta_2, \mu, \hat{r}_2)$  dados por  $N_1 = X_1 + jY_1 = R_1 e^{j\Theta_1}$  e  $N_2 = X_2 + jY_2 = R_2 e^{j\Theta_2}$ , em que as variáveis  $X_1, X_2, Y_1$  e  $Y_2$  são as componentes em fase e quadratura dos processos  $N_1$  e  $N_2$ . As fases são representadas por  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ , enquanto as envoltórias correspondentes são definidas por  $R_1 = |N_1|$  e  $R_2 = |N_2|$ , com potências médias  $\hat{r}_1^2 = \mathbb{E}[R_1^2]$  e  $\hat{r}_2^2 = \mathbb{E}[R_2^2]$ , em que  $\mathbb{E}[\cdot]$  é o operador matemático Esperança. A raiz do valor médio quadrático (root mean square, RMS) de  $R$  é dada por  $\hat{r} = \sqrt{\mathbb{E}[R^2]}$ . No Formato 1,  $X$  e  $Y$  correspondem a processos independentes que, de maneira geral, possuem variâncias distintas. Nesse caso, o parâmetro  $\eta$  ( $0 < \eta < \infty$ ) é definido pela razão entre as potências médias das componentes em fase e quadratura, podendo ser expresso como  $\eta = \hat{r}_X^2 / \hat{r}_Y^2 = \sigma_X^2 / \sigma_Y^2$ . Os parâmetros  $\hat{r}_X$  e  $\hat{r}_Y$  correspondem ao valor RMS das componentes em fase e quadratura, respectivamente.

A FDP conjunta envoltória-fase do modelo  $\eta$ - $\mu$  pode ser expressa como [10, eq. (8)]  $f_{R,\Theta}(r, \theta) = (2\mu^{2\mu} h^{2\mu} r^{4\mu-1} |\sin 2\theta|^{2\mu-1} / ((h^2 - H^2)^\mu \hat{r}^{4\mu} \Gamma^2(\mu))) \times \exp(-2\mu h r^2 (h + H \cos 2\theta) / (\hat{r}^2 (h^2 - H^2)))$ , em que  $h = (2 + \eta^{-1} + \eta)/4$ ,  $H = (\eta^{-1} - \eta)/4$ ,  $\Gamma(\cdot)$  representa a função Gamma [11, eq. (8.310.1)], com  $r \geq 0$  e  $-\pi \leq \theta < \pi$ .

As FDPs marginais associadas ao desvanecimento  $\eta$ - $\mu$  podem ser obtidas a partir de integração, isto é,  $f_R(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{R,\Theta}(r, \theta) d\theta$  e  $f_\Theta(\theta) = \int_0^\infty f_{R,\Theta}(r, \theta) dr$ . Dessa forma, obtêm-se [10, eqs. (1) e (9)]  $f_R(r) = (4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}} h^\mu) / (\Gamma(\mu) H^{\mu-\frac{1}{2}} \hat{r}) (r/\hat{r})^{2\mu} \exp(-2\mu h (r/\hat{r})^2) \times I_{\mu-\frac{1}{2}}(2\mu H (r/\hat{r})^2)$  e  $f_\Theta(\theta) = (h^2 - H^2)^\mu \Gamma(2\mu) |\sin 2\theta|^{2\mu-1} / (2^{2\mu} \Gamma^2(\mu) (h + H \cos 2\theta)^{2\mu})$ . sendo  $I_\nu(\cdot)$  a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem  $\nu$  [12, eq. (9.6.3)].

No caso mais básico, previamente considerado em [8], assume-se a existência de correlação entre as componentes em fase  $X_1$  e  $X_2$ , bem como entre as componentes em quadratura  $Y_1$  e  $Y_2$ . Neste trabalho, por meio de [8, eq. (1)] mostra-se que as FDPs conjuntas das componentes em fase,  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$  e em quadratura  $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ , podem ser obtidas substituindo-se  $Z_1 = X_1, Z_2 = X_2$ , e  $Z_1 = Y_1, Z_2 = Y_2$ .

Neste cenário de correlação cruzada nula, o parâmetro  $0 \leq \lambda^2 \leq 1$  corresponde ao coeficiente de correlação de potência

das componentes em fase do modelo complexo  $\eta$ - $\mu$ , o qual assume o mesmo valor para as componentes em quadratura.

Assumindo inicialmente independência conjunta entre as componentes em fase ( $X_1, X_2$ ) e em quadratura ( $Y_1, Y_2$ ), a densidade conjunta bivariável fase-quadratura foi apresentada em [8, eq. (2)]. Esta FDP corresponde a  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \times f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$  para o caso balanceado de número de *Clusters* em [13].

Observe que [8, eq. (2)] é válida apenas para o caso em que as componentes cruzadas  $X_1$  e  $Y_2$ , bem como  $X_2$  e  $Y_1$ , são descorrelacionadas. Em outras palavras, a componente em fase  $X_1$  do processo complexo  $\eta$ - $\mu$   $N_1$  não apresenta correlação com a componente em quadratura  $Y_2$  do processo complexo  $\eta$ - $\mu$   $N_2$ . De forma análoga, a componente em fase  $X_2$  do processo complexo  $\eta$ - $\mu$   $N_2$  é descorrelacionada da componente em quadratura  $Y_1$  do processo complexo  $\eta$ - $\mu$   $N_1$ . O objetivo deste trabalho é superar essa limitação por meio da proposição de um modelo bivariável complexo  $\eta$ - $\mu$  que também considere a correlação cruzada entre as componentes em fase e quadratura, além da dedução de suas principais estatísticas.

## III. MODELO PROPOSTO

### A. FDP Bivariável Conjunta Envoltória-Fase com Correlação Cruzada

Dadas duas variáveis aleatórias complexas, a existência de correlação cruzada entre a componente em fase de uma variável e a componente em quadratura da outra, bem como entre a componente em quadratura de uma e a componente em fase da outra, resulta em um deslocamento de fase em uma das variáveis complexas. De maneira análoga, a presença de um deslocamento de fase entre duas variáveis aleatórias complexas implica a existência de correlação cruzada entre suas componentes em fase e quadratura, bem como entre as componentes em quadratura e em fase. Assim, a partir de [8, eq. (2)] e seguindo [14, eq. 1.5-17], introduz-se um parâmetro de deslocamento de fase  $\phi$  nas variáveis aleatórias  $X_2$  e  $Y_2$ , de modo que  $X_1 = R_1 \cos \Theta_1, Y_1 = R_1 \sin \Theta_1, X_2 = R_2 \cos(\Theta_2 - \phi), Y_2 = R_2 \sin(\Theta_2 - \phi)$ , e  $|J| = r_1 r_2$ . Seguindo o procedimento apresentado em [14, eq. 1.5-17], o parâmetro de deslocamento de fase  $\phi$  pode ser expresso por  $\phi = \arg[\tan(\lambda_2/\lambda_1)]$ . A introdução do parâmetro  $\phi$  é realizada porque essa informação de fase é perdida durante o processo de obtenção da FDP conjunta da envoltória Rayleigh [14, eq. 1.5-22]. Como o modelo Nakagami- $m$ , que serve de base para o modelo  $\eta$ - $\mu$ , é derivado do modelo Rayleigh, essa informação de fase também deve ser incorporada ao modelo proposto. Nesse novo cenário, em que há correlação cruzada entre as componentes em fase e quadratura dos processos  $N_1$  e  $N_2$ , inexistente no modelo proposto em [8], define-se  $\lambda_1 = \mathbb{C}(X_1, X_2) = \mathbb{C}(Y_1, Y_2)$  e  $\lambda_2 = \mathbb{C}(X_1, Y_2) = -\mathbb{C}(Y_1, X_2)$  [15], em que  $\mathbb{C}(\cdot)$  representa o operador covariância. No modelo isotrópico, o parâmetro  $\lambda_2$  é dado por [15]  $\lambda_2 = \Delta\omega \bar{T} J_0(\beta d)/(1 + (\Delta\omega \bar{T})^2)$ , em que  $\beta$  representa uma constante de fase,  $d$  corresponde à distância entre dois pontos de recepção,  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  denota a diferença entre as frequências angulares dos processos  $N_1$  e  $N_2$ ,  $\bar{T}$  é o espalhamento de retardo (*delay spread*) e  $J_n(\cdot)$

corresponde à função de Bessel de primeiro tipo e ordem  $n$ . Observe que, para  $\beta d = 0$ , a correlação fase-quadratura e quadratura-fase será diferente de zero sempre que  $\Delta\omega\bar{T} \neq 0$ , ou seja, quando  $\Delta\omega \neq 0$  (processos  $N_1$  e  $N_2$  propagando-se em frequências ligeiramente distintas, isto é,  $\omega_1 \neq \omega_2$ ) e  $\bar{T} > 0$  (banda de coerência finita). Por outro lado, quando  $\bar{T} = 0$ , correspondente ao caso de banda de coerência infinita (ou canal plano), obtém-se  $\lambda_2 = 0$ , implicando ausência de correlação fase-quadratura e quadratura-fase. Portanto, torna-se razoável, e até mesmo necessário, considerar a existência de correlação cruzada fase-quadratura e quadratura-fase entre os processos  $N_1$  e  $N_2$ . O coeficiente  $\lambda_1$  relaciona-se com  $\lambda_2$  por meio de  $\lambda_2 = \Delta\omega\bar{T}\lambda_1$ . Dessa forma, embora  $\lambda_2$  se anule para  $\Delta\omega = 0$  ou  $\bar{T} = 0$ , o coeficiente  $\lambda_1 = J_0(\beta d)/(1 + (\Delta\omega\bar{T})^2)$  permanece diferente de zero, representando a persistência da correlação entre as componentes fase-fase e quadratura-quadratura dos processos considerados. Pode-se expressar o coeficiente de correlação  $\lambda^2$  em função de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , de modo que  $\lambda^2 = 16\mu^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/(\hat{r}_1^2\hat{r}_2^2)$ . Após a transformação de variáveis e em seguida, algumas substituições trigonométricas, obtém-se a conjunta de envoltória-fase. Na sequência, aplica-se mais uma transformação de variáveis, que é dada por  $f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) = f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)|J|$ , em que  $P_1 = R_1/\hat{r}_1$ ,  $P_2 = R_2/\hat{r}_2$  e  $|J| = \hat{r}_1\hat{r}_2$ . Assim, a conjunta envoltória-fase, com a envoltória normalizada pelo valor RMS, é obtida e apresentada em (6), em que  $0 \leq \rho_1, \rho_2 < \infty$  e  $-\pi \leq \theta_1, \theta_2 < \pi$ . Para  $\phi = 0$ , (6) reduz-se à FDP conjunta de duas envoltórias e duas fases, conforme o procedimento indicado em [8], coincidindo, para o caso  $p = 0$  em [13, eq. (22)]. Para  $\mu = \mu/2$  e  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ , (6) reduz-se à FDP conjunta de duas envoltórias e duas fases de [6]. Para  $\mu = 1/2$  e  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ , (6) reduz-se à distribuição conjunta bivariável com envoltória Rayleigh e fase uniforme [14, eq. (1.5-22)]. A FDP conjunta de fase pode ser obtida numericamente por meio da integração de  $f_{P_1 P_2 \Theta_1 \Theta_2}(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2)$  em relação às variáveis  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , ou seja,  $f(\theta_1, \theta_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{P_1 P_2 \Theta_1 \Theta_2}(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) d\rho_1 d\rho_2$ .

#### B. FDP Conjunta Bivariável das Componentes em Fase e Quadratura com Correlação Cruzada

Para obter a FDP conjunta bivariável das componentes em fase e quadratura com correlação cruzada, aplica-se em (6) a transformação de variáveis  $X_1 = P_1\hat{r}_1 \cos \Theta_1$ ,  $Y_1 = P_1\hat{r}_1 \sin \Theta_1$ ,  $X_2 = P_2\hat{r}_2 \cos \Theta_2$ ,  $Y_2 = P_2\hat{r}_2 \sin \Theta_2$ , com  $|J| = P_1P_2\hat{r}_1^2\hat{r}_2^2$ . Além disso, utilizando [12, eqs. (4.3.31) e (4.3.32)], obtém-se (5). Considerando  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  e  $\mu = 1/2$ , obtém-se a partir de (5) a FDP conjunta Gaussiana complexa bivariável correlacionada [14, eq. (1.5-16)].

#### C. FDP Conjunta das Componentes em Fase, em Quadratura e Fase-Quadratura Correlacionadas

A partir da FDP conjunta bivariável das componentes em fase e quadratura dada em (5), podem ser obtidas as FDPs conjuntas das componentes correlacionadas em fase, quadratura ou fase-quadratura. Para  $\lambda_1 = 0$ , tem-se  $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_1, y_2) \times f(x_2, y_1)$ , enquanto, para  $\lambda_2 = 0$ , obtém-se  $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_1, x_2) \times f(y_1, y_2)$ . Dessa forma, ao considerar  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = \lambda\hat{r}_1\hat{r}_2/(4\mu)$  em (5), e realizando procedimento análogo para  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_1 = \lambda\hat{r}_1\hat{r}_2/(4\mu)$ , obtém-se as seguintes FDPs

$$\begin{aligned} f(x_2, y_1) &= \frac{\lambda^{1-\mu}\mu^{1+\mu}|x_2y_1|^\mu}{(1-\lambda^2)\Gamma(\mu)} \left( \frac{\hat{r}_1^2\hat{r}_2^2}{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} \right)^{-\frac{1-\mu}{2}} \\ &\times \exp \left[ -\frac{\mu}{1-\lambda^2} \left( \frac{y_1^2(1+\eta_1)}{\hat{r}_1^2} + \frac{x_2^2(1+\eta_2)}{\hat{r}_2^2} \right) \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{\mu}{1-\lambda^2} \left( \frac{2\lambda x_2y_1\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}}{\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \right] \\ &\times I_{\mu-1} \left( \frac{2\lambda\mu\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}|x_2y_1|}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \\ &\times \operatorname{sech} \left( \frac{2\lambda\mu\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}|x_2y_1|}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(x_1, y_2) &= \frac{\lambda^{1-\mu}\mu^{1+\mu}|x_1y_2|^\mu}{(1-\lambda^2)\Gamma(\mu)} \left( \frac{\eta_1\eta_2\hat{r}_1^2\hat{r}_2^2}{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} \right)^{-\frac{1-\mu}{2}} \\ &\times \exp \left[ -\frac{\mu}{1-\lambda^2} \left( \frac{x_1^2(1+\eta_1)}{\eta_1\hat{r}_1^2} + \frac{y_2^2(1+\eta_2)}{\eta_2\hat{r}_2^2} \right) \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{\mu}{1-\lambda^2} \left( \frac{2\lambda x_1y_2\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}}{\sqrt{\eta_1\eta_2}\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \right] \\ &\times I_{\mu-1} \left( \frac{2\lambda\mu\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}|x_1y_2|}{\sqrt{\eta_1\eta_2}(1-\lambda^2)\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \\ &\times \operatorname{sech} \left( \frac{2\lambda\mu\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}|x_1y_2|}{\sqrt{\eta_1\eta_2}(1-\lambda^2)\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= \frac{\lambda^{1-\mu}\mu^{1+\mu}|y_1y_2|^\mu}{(1-\lambda^2)\Gamma(\mu)} \left( \frac{\hat{r}_1^2\hat{r}_2^2}{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} \right)^{-\frac{1-\mu}{2}} \\ &\times \exp \left[ -\frac{\mu}{1-\lambda^2} \left( \frac{y_1^2(1+\eta_1)}{\hat{r}_1^2} + \frac{y_2^2(1+\eta_2)}{\hat{r}_2^2} \right) \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{\mu}{1-\lambda^2} \left( \frac{2\lambda y_1y_2\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}}{\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \right] \\ &\times I_{\mu-1} \left( \frac{2\lambda\mu\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}|y_1y_2|}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \\ &\times \operatorname{sech} \left( \frac{2\lambda\mu\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}|y_1y_2|}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{\lambda^{1-\mu}\mu^{1+\mu}|x_1x_2|^\mu}{(1-\lambda^2)\Gamma(\mu)} \left( \frac{\eta_1\eta_2\hat{r}_1^2\hat{r}_2^2}{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} \right)^{-\frac{1-\mu}{2}} \\ &\times \exp \left[ -\frac{\mu}{1-\lambda^2} \left( \frac{x_1^2(1+\eta_1)}{\eta_1\hat{r}_1^2} + \frac{x_2^2(1+\eta_2)}{\eta_2\hat{r}_2^2} \right) \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{\mu}{1-\lambda^2} \left( \frac{2\lambda x_1x_2\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}}{\sqrt{\eta_1\eta_2}\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \right] \\ &\times I_{\mu-1} \left( \frac{2\lambda\mu\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}|x_1x_2|}{\sqrt{\eta_1\eta_2}(1-\lambda^2)\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \\ &\times \operatorname{sech} \left( \frac{2\lambda\mu\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}|x_1x_2|}{\sqrt{\eta_1\eta_2}(1-\lambda^2)\hat{r}_1\hat{r}_2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

As equações (3) e (4) são equivalentes ao modelo sem correlação cruzada de [8].

#### IV. FDP DA DIFERENÇA DE FASE

Para a análise de desempenho desenvolvida na Seção V, torna-se necessária a obtenção da FDP da diferença de fase. Assim, em (6), aplica-se a seguinte transformação de variáveis  $f_{P_1, P_2, \Delta\Theta, \Phi}(\rho_1, \rho_2, \Delta\theta, \varphi) = f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2)|J|$ , em que  $\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2$ ,  $\Phi = \Theta_2$  e  $|J|=1$ . A FDP da diferença de fase é obtida por meio da integração de  $f_{P_1, P_2, \Delta\Theta, \Phi}(\rho_1, \rho_2, \Delta\theta, \varphi)$  em relação às variáveis  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  e  $\varphi$ , isto é,  $f_{\Delta\Theta}(\Delta\theta, \lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f_{P_1, P_2, \Delta\Theta, \Phi}(\rho_1, \rho_2, \Delta\theta, \varphi) d\rho_1 d\rho_2 d\varphi$ , em que  $-\phi - \pi \leq \Delta\theta < -\phi + \pi$ . A Figura 1(a) apresenta a FDP

$$\begin{aligned}
 f(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \frac{16^\mu (\eta_1 \eta_2)^{\frac{1}{2}(1-\mu)} ((1+\eta_1)(1+\eta_2))^{1+\mu} \lambda^{2-4\mu} \mu^{2+4\mu} (\hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2)^{-1-2\mu}}{|y_1(y_2 \lambda_1 - x_2 \lambda_2)|^{-\mu} |x_1(x_2 \lambda_1 + y_2 \lambda_2)|^{-\mu} (1-\lambda^2)^2 \Gamma(\mu)^2} \exp \left( -\frac{\mu \left( \left( y_1^2 + \frac{x_1^2}{\eta_1} \right) (1+\eta_1) \right)}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^2} \right) \\
 &\times \exp \left[ -\frac{\mu}{1-\lambda^2} \left( \frac{(1+\eta_2) \left( (y_2 \lambda_1 - x_2 \lambda_2)^2 + \frac{(x_2 \lambda_1 + y_2 \lambda_2)^2}{\eta_2} \right)}{\hat{r}_2^2} - \frac{8\mu \sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} (y_1(y_2 \lambda_1 - x_2 \lambda_2) + \frac{x_1(x_2 \lambda_1 + y_2 \lambda_2)}{\sqrt{\eta_1 \eta_2}})}{\hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2} \right) \right] \\
 &\times I_{\mu-1} \left( \frac{8\mu^2 \sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} |y_1(y_2 \lambda_1 - x_2 \lambda_2)|}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2} \right) I_{\mu-1} \left( \frac{8\mu^2 \sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} |x_1(x_2 \lambda_1 + y_2 \lambda_2)|}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2 \sqrt{\eta_1 \eta_2}} \right) \\
 &\times \operatorname{sech} \left( \frac{8\mu^2 \sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} |y_1(y_2 \lambda_1 - x_2 \lambda_2)|}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2} \right) \operatorname{sech} \left( \frac{8\mu^2 \sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} |x_1(x_2 \lambda_1 + y_2 \lambda_2)|}{(1-\lambda^2) \hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2 \sqrt{\eta_1 \eta_2}} \right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) &= \frac{\lambda^{2-2\mu} \mu^{2+2\mu} 8^{-\mu}}{(1-\lambda^2)^2 \Gamma^2(\mu)} \left( \frac{\sqrt{\eta_1 \eta_2}}{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} \right)^{-1-\mu} |\cos[2(\theta_1 - \theta_2 + \phi)] - \cos[2(\theta_1 + \theta_2 - \phi)]|^\mu \\
 &\times \exp \left[ -\frac{\mu \rho_1^2 (1+\eta_1)}{1-\lambda^2} \left( \frac{1 - \cos(2\theta_1)}{2} + \frac{1 + \cos(2\theta_1)}{2\eta_1} \right) \right] \exp \left[ -\frac{\mu \rho_2^2 (1+\eta_2)}{1-\lambda^2} \left( \frac{1 - \cos(2\theta_2 - 2\phi)}{2} + \frac{1 + \cos(2\theta_2 - 2\phi)}{2\eta_2} \right) \right] \\
 &\times \exp \left[ \frac{2\mu \rho_1 \rho_2 \sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} \lambda}{1-\lambda^2} \left( \frac{-\cos(\theta_1 + \theta_2 - \phi) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + \phi)}{2} + \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2 - \phi) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + \phi)}{2\sqrt{\eta_1 \eta_2}} \right) \right] \\
 &\times (\rho_1 \rho_2)^{1+2\mu} I_{\mu-1} \left( \frac{\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} \lambda \mu \rho_1 \rho_2}{1-\lambda^2} |-\cos(\theta_1 + \theta_2 - \phi) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + \phi)| \right) \\
 &\times I_{\mu-1} \left( \frac{\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}}{\sqrt{\eta_1 \eta_2} (1-\lambda^2) (\lambda \mu \rho_1 \rho_2)^{-1}} |\cos(\theta_1 + \theta_2 - \phi) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + \phi)| \right) \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}}{(1-\lambda^2) (\lambda \mu \rho_1 \rho_2)^{-1}} |-\cos(\theta_1 + \theta_2 - \phi) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + \phi)| \right) \\
 &\times \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{(1+\eta_1)(1+\eta_2)} \lambda \mu \rho_1 \rho_2}{\sqrt{\eta_1 \eta_2} (1-\lambda^2)} |\cos(\theta_1 + \theta_2 - \phi) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + \phi)| \right) \quad (6)
 \end{aligned}$$

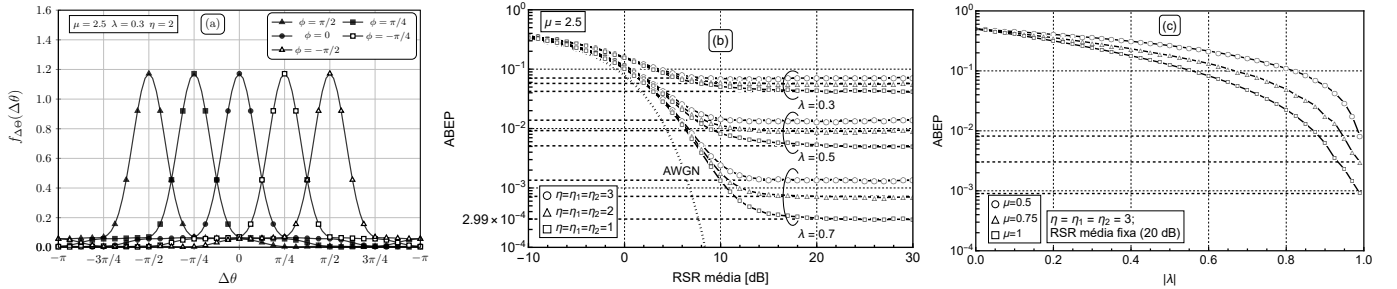


Fig. 1. (a) FDP da diferença de fase, (b) ABEP em função da relação sinal-ruído (RSR) média e (c) ABEP em função da correlação de potência.

da diferença de fase para distintos valores de  $\phi$ , evidenciando que esse parâmetro provoca um deslocamento da distribuição ao longo do eixo  $\Delta\theta$ . Observa-se ainda que, embora a posição do pico varie com  $\phi$ , o formato da FDP permanece inalterado, caracterizando uma translação angular da distribuição.

## V. APLICAÇÃO DO MODELO PROPOSTO NA ANÁLISE DE DESEMPENHO DA MODULAÇÃO BPSK

Um modelo  $\eta$ - $\mu$  bivariável complexo foi proposto em [8]; entretanto, nenhuma análise de desempenho de sistemas foi realizada. Como aplicação do modelo proposto, considera-se a transmissão de um sinal em um canal  $\eta$ - $\mu$  com desvanecimento. Assumindo estimação imperfeita do canal, o sinal discreto recebido pode ser expresso por  $\hat{z} = R_1 \exp(j\Theta_1)x + n$ , em que  $x$  representa o sinal transmitido com energia média por bit  $E_b$ , enquanto  $n$  corresponde ao ruído Gaussiano com densidade espectral de potência unilateral  $N_0$ . Os parâmetros  $R_1$  e  $\Theta_1$  denotam, respectivamente, a envoltória e a fase do canal  $\eta$ - $\mu$  associado à propagação do sinal transmitido. No receptor,

utiliza-se  $R_2 \exp(j\Theta_2)$  como coeficiente de desvanecimento estimado para compensar o efeito de  $R_1 \exp(j\Theta_1)$ , de modo que  $z = \hat{z}/(R_2 e^{j\Theta_2}) = R_1 e^{-j(\Theta_1 - \Theta_2)} x / R_2 + n / (R_2 e^{j\Theta_2})$ . Observe que as variáveis aleatórias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  são completamente caracterizadas pela FDP conjunta correlacionada  $\eta$ - $\mu$  dada em (6). Nesse contexto, a diferença de fase associada à variável aleatória  $\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2$  possui FDP representada por  $f_{\Delta\Theta}(\Delta\theta, \lambda)$ . Observe que  $f_{\Delta\Theta}(\Delta\theta, \lambda)$  é função do parâmetro  $\lambda$ , e não especificamente dos coeficientes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , visto que diferentes combinações entre esses parâmetros conduzem ao mesmo valor de  $\lambda$ . Consequentemente, um mesmo valor de  $\lambda$  pode estar associado a infinitos valores de  $\phi$ . Observa-se ainda que  $f_{\Delta\Theta}(\Delta\theta, \lambda)$  é uma função par em relação ao parâmetro  $\lambda$ . Além disso, os cálculos da ABEP devem ser realizados em toda a extensão da fase  $\Delta\theta$ , isto é,  $-\phi - \pi \leq \Delta\theta < -\phi + \pi$ . Entretanto, conforme observado na Figura 1(a), o parâmetro  $\phi$  promove predominantemente um deslocamento angular da FDP da diferença de fase, preservando praticamente inalterado o formato da distribuição. Dessa forma, como a ABEP é

obtida por integração ao longo de todo o intervalo de  $\Delta\theta$ , o valor resultante permanece invariante em relação a  $\phi$ . Assim, sem perda de generalidade, adotou-se  $\phi = 0$ , conduzindo a uma expressão mais simples para a ABEP expressa por [1]  $P_s = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{\gamma} \cos \Theta) f_{\Delta\Theta}(\Delta\theta, |\lambda|) f_\Gamma(\gamma) d\Delta\theta d\gamma$ , em que  $\text{erfc}(\cdot)$  representa a função erro complementar e  $\gamma$  corresponde à relação sinal-ruído (RSR) instantânea por bit do sinal recebido. A modulação BPSK foi adotada no cálculo da ABEP devido à sua simplicidade analítica; contudo, a generalização do modelo para modulações de ordem superior pode ser efetuada de maneira direta. Todavia, a invariância da ABEP em relação a  $\phi$  não implica que esse parâmetro seja irrelevante para a caracterização do canal, uma vez que parâmetros como a banda de coerência, o tempo de coerência e a distância de coerência, importantes na modelagem e análise de sistemas 5G e 6G [16], podem ser obtidos a partir da FDP conjunta das envoltórias, derivada por integração da FDP conjunta envoltória-fase [17], podendo ser afetados por  $\phi$  mesmo que a ABEP permaneça inalterada.

Na Figura 1(b), são apresentadas as curvas da ABEP em função da RSR média por bit. Nas análises, considera-se um sistema BPSK sujeito a desvanecimento  $\eta$ - $\mu$ , ruído aditivo Gaussiano branco (*additive white Gaussian noise*, AWGN) e erro de estimação da portadora, modelado pela FDP da diferença de fase  $f_{\Delta\Theta}(\Delta\theta, \lambda)$ . A ABEP é avaliada para  $\mu = 2.5$  fixo e para os seguintes conjuntos de parâmetros: (i)  $\eta = \{1, 2, 3\}$  e (ii)  $\lambda = \{0.3, 0.5, 0.7\}$ . Adicionalmente, inclui-se uma curva referente ao caso AWGN sob detecção coerente ideal ( $\lambda \rightarrow 1$ ), para efeito de comparação. Observa-se que o aumento de  $\lambda$  reduz significativamente a ABEP, indicando que uma maior correlação de potência melhora o desempenho do sistema. Por outro lado, menores valores de  $\lambda$  resultam em maiores probabilidades de erro. Além disso, verifica-se que o aumento do valor do parâmetro  $\eta$  conduz à degradação do desempenho do sistema, ocasionando maiores valores de ABEP para uma mesma RSR média. Nota-se ainda que, para altas RSRs, as curvas tendem a patamares constantes, caracterizando a presença de um erro irreduzível sendo dependente apenas dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\eta$  e  $\mu$ . Na região de  $\text{RSR} \rightarrow \infty$  (alta RSR), a influência do ruído AWGN torna-se desprezível e a ABEP passa a ser determinada predominantemente pelos parâmetros estatísticos do canal, podendo ser descrita por sua expressão assintótica [1]  $P_s^\infty = 1 - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{\Delta\Theta}(\Delta\theta, |\lambda|) d\theta$ . As linhas tracejadas, na Figura 1(b), indicam os valores assintóticos da ABEP, para os quais as curvas convergem à medida que a RSR aumenta. Como exemplo, para  $\lambda = 0.7$ , a ABEP assume o valor de 0.000299. A Figura 1(c) apresenta a ABEP em função de  $|\lambda|$  para diferentes valores de  $\mu$ . Observa-se, pelas curvas, que a ABEP decresce à medida que os parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  aumentam. No limite  $\lambda \rightarrow 1$ , a ABEP aproxima-se de seu valor mínimo, sendo então essencialmente determinada pelos parâmetros  $\eta$  e  $\mu$ , uma vez que a influência do erro de fase se torna praticamente desprezível.

## VI. CONCLUSÕES

Neste artigo, foi proposto um modelo complexo  $\eta$ - $\mu$  envolvendo dois processos correlacionados. A introdução do parâmetro de fase, em conjunto com os parâmetros já presentes

no modelo anteriormente apresentado, possibilita análises mais abrangentes e mais aderentes a cenários reais. Os modelos propostos em [6] e [8] são obtidos como casos particulares do modelo apresentado. Observou-se que o parâmetro  $\phi$  provoca um deslocamento angular da FDP da diferença de fase, sem alterar a ABEP. Além disso, o aumento de  $\lambda$  e  $\mu$  reduz a ABEP, enquanto o aumento de  $\eta$  eleva seus valores. A validação dos resultados por meio de simulações de Monte Carlo e a influência do deslocamento de fase nos parâmetros de banda, tempo e distância de coerência, assim como no desempenho de outros sistemas de modulação, deverão ser investigada em trabalhos futuros.

## ACKNOWLEDGMENTS

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq (Processo nº 302085/2025-4).

## REFERÊNCIAS

- [1] T. A. M. Bairros, A. P. Oliveira, R. A. A. Souza, and M. D. Yacoub, "Modelo complexo  $\alpha$ - $\mu$  bivariável com correlações cruzadas e desbalanceamento de clusters," in *Anais do XL Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT2022)*, Set. 2022.
- [2] M. D. Yacoub, "Nakagami- $m$  phase-envelope joint distribution: A new model," vol. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Mar. 2010.
- [3] T. R. C. Zhong, S. Jin and K. k. Wong, "On the capacity of non-uniform phase MIMO Nakagami- $m$  fading channels," vol. 14, no. 6, pp. 536–538, Jun. 2010.
- [4] C. Polprasert and J. A. Ritcey, "A Nakagami fading phase difference distribution and its impact on BER performance," vol. 7, no. 7, pp. 2805–2813, Jul. 2008.
- [5] K. A. Hamdi, "Analysis of OFDM over Nakagami- $m$  fading with nonuniform phase distributions," vol. 11, no. 2, pp. 488–492, Feb. 2012.
- [6] T. A. M. Bairros and M. D. Yacoub, "Distribuição conjunta fase-envoltória Nakagami- $m$  bivariável," in *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT2015)*, Set. 2015.
- [7] T. A. M. Bairros, A. P. Oliveira, R. A. A. Souza, and M. D. Yacoub, "Modelo complexo  $\alpha$ - $\mu$  bivariável com correlações cruzadas," in *Anais do XXXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT2019)*, Set. 2019.
- [8] A. P. Oliveira, T. A. M. Bairros, M. D. YACOB, and R. A. A. Souza, "A bivariate  $\eta$ - $\mu$  complex fading model," in *Anais do SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC2019)*, Nov. 2019.
- [9] M. D. Yacoub, "The  $\kappa$ - $\mu$  distribution and the  $\eta$ - $\mu$  distribution," vol. 49, no. 1, pp. 68–81, Feb. 2007.
- [10] D. B. da Costa and M. D. Yacoub, "The  $\eta$ - $\mu$  joint phase-envelope distribution," vol. 6, pp. 195–198, Apr. 2007.
- [11] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 17th ed. Burlington, MA, USA: Academic Press, 2007.
- [12] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications, Incorporated, 1972.
- [13] A. P. Oliveira, T. A. M. Bairros, R. A. A. Souza, and M. D. Yacoub, "Modelo complexo  $\eta$ - $\mu$  bivariável com desbalanceamento de clusters," in *Anais do XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT2020)*, Set. 2020.
- [14] W. C. Jakes and D. C. Cox, Eds., *Microwave Mobile Communications*. Wiley-IEEE Press, 1994.
- [15] J. R. Mendes, M. D. Yacoub, and U. S. Dias, "Power correlation coefficient of a very general fading model in maximal ratio combining," vol. 58, no. 9, pp. 2472–2479, 2010.
- [16] C.-X. Wang, Z. Lv, X. Gao, X. You, Y. Hao, and H. Haas, "Pervasive wireless channel modeling theory and applications to 6g gbsms for all frequency bands and all scenarios," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 71, no. 9, pp. 9159–9173, Sep. 2022.
- [17] M. D. Yacoub, *Foundations of Mobile radio engineering*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Inc., 1993.