

Lentes de Luneburg em SLA para Beamforming e Beamsteering via Transformação Óptica e Simulação por Ray-Tracing

Luiz Paulo Batista Kramer, Humberto Xavier de Araújo, Yara Paulina Santana Bentes e Maria Eduarda Cajango Ruela

Resumo— Apresenta-se uma metodologia para projeto de lentes de Luneburg fabricáveis por impressão 3D em SLA na faixa mmW, utilizando estruturas TPMS como células unitárias reconfiguráveis. A permissividade efetiva da estrutura é caracterizada por simulação Floquet e extraída pelo método NRW, gerando uma curva $\varepsilon_{\text{eff}}(t)$ que mapeia o gradiente de Luneburg em fração volumétrica. Duas geometrias são exploradas: esférica e disco planar via Transformação Óptica Quasi-Conformal (QCTO). Simulações por *ray-tracing* confirmam o foco aberrado-livre; verificação onda-completa com alimentador *patch* obtém ganho de pico de 28,5 dBi (esférica) e 22,6 dBi (QCTO) em *boresight*, e demonstra *beamsteering* por deslocamento do alimentador até $\theta_b \approx 23^\circ$ (esférica) e $\theta_b \approx 48^\circ$ (QCTO).

Palavras-Chave— Lentes GRIN, TPMS, manufatura aditiva, QCTO, ray-tracing, beamsteering.

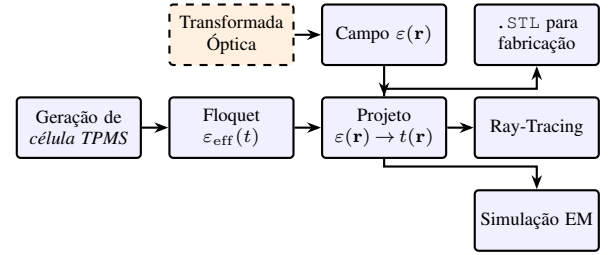


Fig. 1. Pipeline de projeto e verificação. A célula TPMS é caracterizada por simulação Floquet, fornecendo a curva $\varepsilon_{\text{eff}}(t)$. O campo de permissividade alvo $\varepsilon(r)$ – obtido pela expressão analítica de Luneburg ou pela Transformação Óptica QCTO (bloco tracejado) – é invertido no estágio de projeto, que produz o mapa de espessuras $t(r)$ e o arquivo .STL para fabricação. A geometria resultante é validada por *ray-tracing* e por simulação EM onda-completa.

I. INTRODUÇÃO

Sistemas 5G/6G em mmW e sub-THz exigem antenas de alto ganho com *beamsteering*, e a complexidade dos arranjos com defasadores ativos cresce rapidamente com a frequência. Lentes GRIN são alternativa passiva: a lente de Luneburg, em particular, foca qualquer onda plana incidente sobre o ponto antípoda da sua superfície, permitindo varredura ampla apenas pelo deslocamento do alimentador [1], [2].

Historicamente, sua fabricação foi restrita pelo perfil contínuo $\varepsilon_r(r) = 2 - (r/R)^2$, mas a manufatura aditiva permite realizar o gradiente como modulação espacial da fração volumétrica de uma rede *subwavelength* [3]. Este trabalho apresenta uma metodologia de projeto baseada em superfícies mínimas triplamente periódicas (TPMS, do inglês *triply periodic minimal surfaces*), abrangendo a geração paramétrica da célula, a caracterização Floquet/NRW da permissividade efetiva, o projeto por inversão $\varepsilon \rightarrow t$ (com t a espessura de parede da célula) e a verificação por *ray-tracing* e onda-completa. As principais contribuições são: (i) a tradução do tensor QCTO de Kundtz e Smith [5] em uma aproximação dielétrica escalar realizável e (ii) a verificação onda-completa em SLA mmW ($D/\lambda \approx 10$ em 160 GHz). Diferentemente de lentes de Luneburg impressas anteriores – em geral esféricas, em frequências mais baixas e por jato de polímero/FDM –, adota-se aqui SLA a 160 GHz com células TPMS híbridas. O fluxo de projeto é esquematizado na Fig. 1.

II. LENTE DE LUNEBURG E TRANSFORMAÇÃO ÓPTICA

A lente de Luneburg clássica é uma esfera dielétrica de raio R com perfil

$$n(r) = \sqrt{2 - (r/R)^2}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (1)$$

ou seja, $\varepsilon_r(r) \in [1, 2]$. No contínuo ideal, qualquer onda plana focaliza no ponto da superfície oposta à direção de incidência e a simetria esférica torna o perfil isento de aberrações para qualquer ângulo de varredura. A realização prática introduz aberrações residuais por (i) discretização em N cascas, (ii) truncamento de ε no piso $\varepsilon_{\text{min}} > 1$ imposto pelo material e (iii) dispersão da célula unitária.

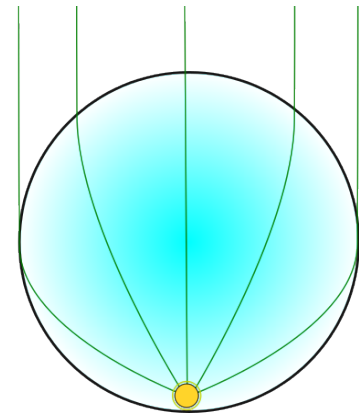


Fig. 2. Lente de Luneburg clássica: onda plana incidente focaliza no ponto antípoda da superfície.

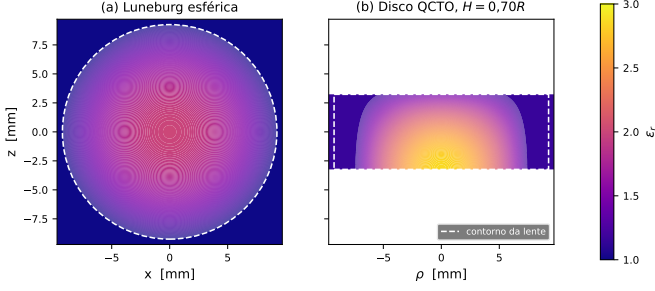


Fig. 3. Campo de permissividade ε no plano xz para (a) a lente de Luneburg esférica clássica ($\varepsilon(r)=2-(r/R)^2$, $R=9,25$ mm) e (b) o disco QCTO equivalente ($H=0,70R$) com *clamping* de ε em $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_i]$, onde $\varepsilon_{\min}$ é o piso imposto pela imprimeabilidade da célula e $\varepsilon_i=2,8$ o limite do material denso. Ambos compartilham a mesma escala de cores e a mesma extensão em x .

A localização do foco *sobre* a superfície curva dificulta a integração com um alimentador planar. A Transformação Óptica Quasi-Conformal (QCTO) de Li e Pendry [4], aplicada por Kundtz e Smith [5], mapeia o hemisfério superior em um disco de altura H via $z_v = z_s \sqrt{R^2 - \rho^2}/H$, produzindo uma *face de saída plana* compatível com alimentadores em PCB; o preço, na aproximação escalar, é um pequeno deslocamento focal Δz_f abaixo da face (Seção V). A componente axial do tensor resultante é dominante para raios paraxiais e fica

$$\varepsilon_z(\rho, z_s) = n_v^2 \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{H}, \quad (2)$$

onde n_v é o índice de Luneburg avaliado na coordenada virtual $r_v = \sqrt{\rho^2 + z_s^2(R^2 - \rho^2)/H^2}$. O pico ocorre em ($\rho=0, z_s=0$) valendo $\varepsilon_{z,\max} = 2R/H$.

Sendo $\varepsilon_i = 2,8$ (Radix SLA), exige-se $H \geq 2R/\varepsilon_i \approx 0,714 R$. Adota-se $H = 0,70 R$, com $\varepsilon_{z,\max} \approx 2,857$, o que requer *clamping* em ε_i num platô central que cobre $< 2\%$ do volume. A Fig. 3 mostra $\varepsilon(\rho, z)$ resultante; a componente transversal ε_ρ é descartada (assume-se $\varepsilon_\rho = \varepsilon_z$), deslocando o foco para abaixo da face plana de saída.

III. CARACTERIZAÇÃO DA CÉLULA UNITÁRIA TPMS

Para realizar o gradiente de Luneburg, a célula unitária deve satisfazer quatro requisitos: (i) cobrir uma faixa ampla de ε_{eff} ajustável por um único parâmetro geométrico; (ii) ser eletromagneticamente isotrópica, para não distorcer a frente de onda; (iii) ser autossustentável, dispensando suportes internos na impressão; e (iv) ter custo de malha gerenciável na simulação. Confrontam-se seis candidatas com esses critérios – quatro TPMS (giroide, Schwartz-P, diamond, lidinóide) e duas treliças (isotruss, octet) –, cujas colunas da Tab. I medem precisamente cada requisito. Todas são parametrizadas pela espessura t da parede, que ajusta a fração volumétrica f_v ; as TPMS são superfícies mínimas implícitas – o giroide (Schwartz-G), por exemplo, satisfaz $\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x = c$, com o isovalor c controlando f_v [6].

Para cada espessura, a permissividade efetiva ε_{eff} é obtida por quatro métodos independentes sobre uma cela cúbica de aresta $a=0,2$ mm:

- **NRW** [7]: inversão de S_{11}, S_{21} em incidência normal;

- **Autovalor de Bloch**: banda fundamental TEM via FEM;
- **Maxwell-Garnett (MG)**: $\varepsilon_{\text{MG}} = \varepsilon_h(1 + 2f_v\beta)/(1 - f_v\beta)$, $\beta = (\varepsilon_i - \varepsilon_h)/(\varepsilon_i + 2\varepsilon_h)$;
- **Bruggeman simétrico**: raiz positiva de $f_v(\varepsilon_i - \varepsilon)/(\varepsilon_i + 2\varepsilon) + (1 - f_v)(\varepsilon_h - \varepsilon)/(\varepsilon_h + 2\varepsilon) = 0$.

Os dois primeiros são onda-completa (portas Floquet em $\pm z$, periodicidade em x, y); MG e Bruggeman são fórmulas analíticas que dependem apenas de f_v e dos dielétricos hospedeiro e de inclusão ($\varepsilon_h=1, \varepsilon_i=2,8$).

A Tab. I resume as seis células varridas em $t \in [0,01, 0,10]$ mm sobre resina Radix SLA a 160 GHz, reportando $\varepsilon_{\text{eff}}(t)$, contagem de polígonos, menor detalhe geométrico e anisotropia residual. Giroide e isotruss – que combinam $\varepsilon_{\min}$ baixo com anisotropia $\leq 3\%$ – são as células adotadas no projeto híbrido (Sec. IV).

A Fig. 4 detalha giroide e isotruss. Adota-se o NRW como referência por ser diretamente comparável a medições.

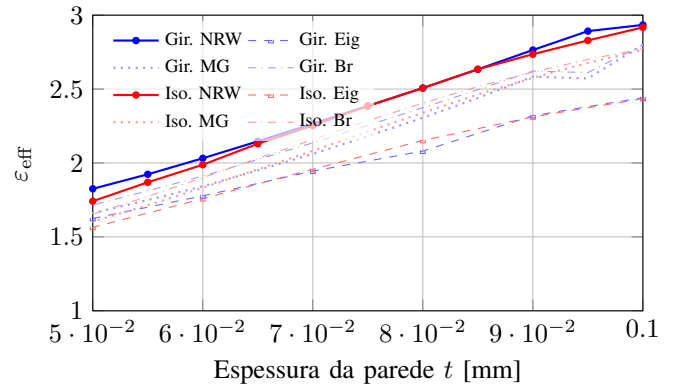


Fig. 4. Permissividade efetiva de giroide e isotruss SLA versus espessura t da parede, por quatro métodos: NRW (S-param), autovalor de Bloch, Maxwell-Garnett e Bruggeman (estes dois últimos calculados a partir do $f_v(t)$ de cada estrutura).

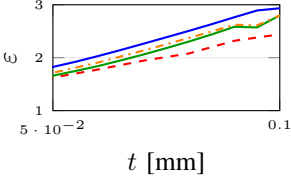
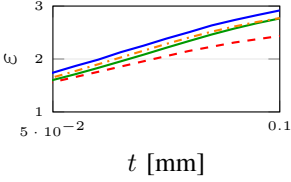
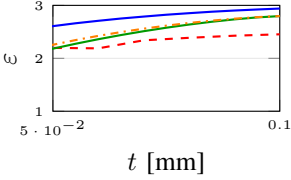
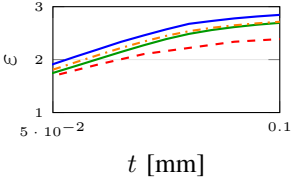
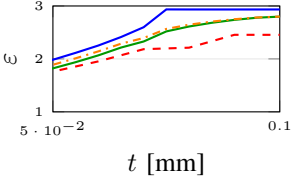
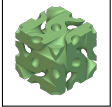
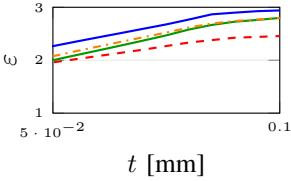
A faixa útil de ε_{eff} é delimitada por dois mecanismos distintos. O *teto* é o material: os métodos analíticos saturam corretamente em $\varepsilon_i=2,8$, enquanto o NRW chega a $\sim 2,93$ em paredes espessas – artefato de ressonância próxima ao limite Bragg, fisicamente impossível numa mistura ar/dielétrico –, de modo que $\varepsilon_i=2,8$ é o teto físico de projeto. O *piso* é a impressão: $\varepsilon_{\min} \approx 1,16$ não decorre do material, mas da resolução por voxel do Micro-SLA ($\sim 5 \mu\text{m}$), que exige paredes $t \gtrsim 3$ voxels – abaixo disso a célula deixa de ser fabricável.

IV. PROJETO DA LENTE

Duas geometrias derivadas do perfil de Luneburg são instanciadas pelo mesmo pipeline: (i) *esférica completa*, com gradiente radial $\varepsilon(r) = 2 - (r/R)^2$ truncado em $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_i]$; e (ii) *disco planar QCTO*, com perfil 2D $\varepsilon(\rho, z)$ dado por (2). O mapa de espessuras radial é exemplificado na Fig. 5 para a versão esférica SLA. A imposição $\varepsilon_{\min}=1,16$ produz uma casca externa clamping: resolvendo $2 - (r/R)^2 = 1,16$ obtém-se $r/R \approx 0,917$, isto é, a região $0,917 \leq r/R \leq 1$ – cerca de $1 - 0,917^3 \approx 23\%$ do volume – fica com índice fixo $n \approx 1,077$ em vez do casamento ideal $n \rightarrow 1$. Essa descontinuidade já faz

TABELA I

 COMPARAÇÃO DE SEIS CÉLULAS UNITÁRIAS EM RADIX SLA ($\epsilon_r=2,8$): $\epsilon(t)$ POR NRW, AUTOVALOR (Eig), MAXWELL-GARNETT (MG) E BRUGGEMAN (BR); ANISOTROPIA PELO AUTOVALOR DE BLOCH.

Estrutura	$\epsilon_{\text{eff}}(t)$	Polígonos	Detalhe mín. [μm]	Anisotropia (Eig)
		8 462–17 290	2,2–4,7	3,0 %
Giroide	t [mm]			
		3 130–8 294	2,8–4,7	1,5 %
Isotruss	t [mm]			
		8 412–12 344	1,6–4,2	1,9 %
Schwartz-P	t [mm]			
		3 764–8 962	2,2–5,4	1,1 %
Octet	t [mm]			
		8 462–19 088	1,8–4,9	2,3 %
Diamond	t [mm]			
		8 462–26 816	2,0–4,2	2,5 %
Lidinóide	t [mm]			

parte do modelo simulado na Seção VI: o ganho ali reportado é o desempenho *realizável* pela lente impressa, não o do perfil contínuo ideal.

Composição híbrida (lente esférica). A maior parte do volume da lente é preenchida com *isotruss*, que reúne boa imprimibilidade, isotropia adequada (Tab. I) e custo computacional bem menor do que o das TPMS implícitas. Nas cascas externas, onde a permissividade-alvo é baixa e a parede deve ser fina, opta-se pelo *giroide*: nessa faixa de t pequeno, sua relação $\epsilon(t)$ permite reduzir ϵ sem que o detalhe geométrico mínimo encolha proporcionalmente, mantendo a célula imprimível em SLA. A transição entre as duas redes ocorre em

$r/R \approx 0,8$, onde ambas atingem a mesma fração volumétrica para a mesma espessura nominal.

Disco QCTO (planar). O disco QCTO é fabricado em giroide puro. Apesar de o giroide apresentar a maior anisotropia entre as células caracterizadas (Tab. I), o autossuporte da superfície mínima é determinante na geometria de disco fino ($H < R$) – treliças como octet/isotruss exigiriam suportes internos descartáveis incompatíveis com a topologia QCTO contínua –, e a anisotropia $\sim 3\%$ é pequena diante da já assumida no descarte da componente ϵ_p do tensor.

O mapeamento $\epsilon \rightarrow t$ usa a inversa numérica das curvas da Fig. 4, aplicando a curva do isotruss até a transição e do giroide

a partir dela. Os parâmetros principais são $R = 9,25$ mm, $D/\lambda \approx 9,9$ em 160 GHz e célula $a=0,2$ mm ($a/\lambda \approx 0,11$).

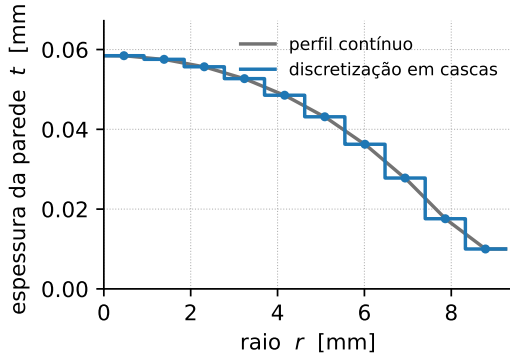


Fig. 5. Mapa de espessuras $t(r)$ da lente esférica SLA mmW ($R=9,25$ mm).

V. SIMULAÇÃO POR RAY-TRACING

A validação geométrica é feita em um código de óptica geométrica comercial – abordagem consolidada para caracterização de lentes Luneburg impressas e estruturas de transformação óptica [3], [5], [8]. O meio GRIN é definido como variável global $n(x, y, z)$ avaliando-se (1) (esférica) ou (2) (QCTO). Onda plana é lançada via grade hexapolar de ~ 331 raios sobre abertura de raio $0,95R$. Cada geometria usa o campo de índice *contínuo* clampado em $[1,077, 1,712]$; a discretização em 10 cascas só é introduzida na simulação onda-completa (Seção VI). A Fig. 6 reúne os dois conjuntos: esférica com fonte cônica ($\pi/3$) deslocada 0, 2, 4 mm (linha superior) e disco QCTO sob onda plana em $\theta_i = 0^\circ, 15^\circ, 45^\circ$ (linha inferior).

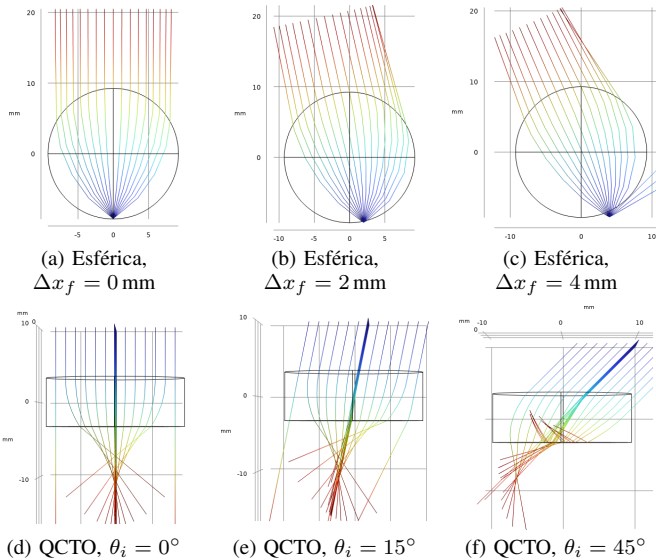


Fig. 6. Ray-tracing comparativo do beamsteering: (a)–(c) lente esférica clássica com fonte cônica (semi-abertura $\pi/3$) deslocada 0, 2 e 4 mm sob a superfície inferior – o feixe colimado de saída inclina-se em proporção ao deslocamento; (d)–(f) disco QCTO escalar iluminado por onda plana cilíndrica em $\theta_i = 0^\circ, 15^\circ, 45^\circ$ – o ponto focal desloca-se lateralmente abaixo da face plana de saída.

Três métricas-chave são extraídas: o *ângulo máximo de varredura* (limite angular além do qual a colimação degrada), a

distância ótima alimentador-lente (foco da QCTO a $\Delta z_f \approx R$ abaixo da face), e as *reflexões parciais* nas cascas internas (ramos divergentes na região de alto ε). A *posição* do foco concorda em $< 5\%$ com a previsão analítica de Luneburg na esférica (a forma difracional foge ao escopo de óptica geométrica para $D/\lambda \approx 10$); o $\Delta z_f \approx R$ da QCTO escalar é limitação inerente à realização dielétrica isotrópica do tensor de Kundtz e Smith. Os ângulos de varredura previstos são coerentes, em tendência e magnitude, com os do onda-completa (Seção VI), validando o ray-tracing como preditor no laço de projeto.

Cada simulação ray-tracing converge em ~ 1 s contra ~ 2 h 20 min do onda-completa por configuração (≈ 4 ordens de grandeza), consolidando o ray-tracing como ferramenta de otimização no laço de projeto e a simulação onda-completa como *validação final*.

VI. DESEMPENHO DE ANTENA: BEAMFORMING E BEAMSTEERING

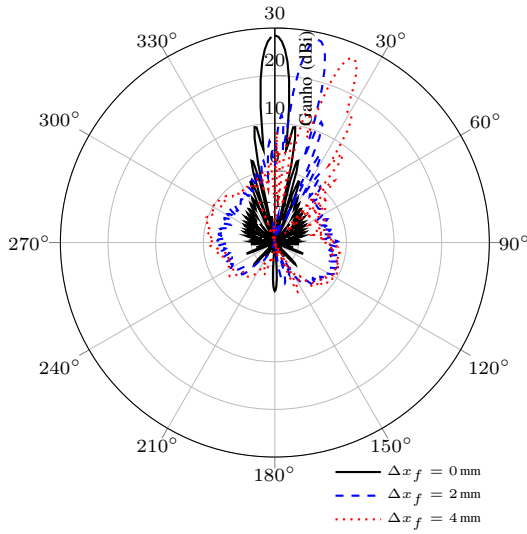
A verificação onda-completa foi feita no CST Microwave Studio em 160 GHz, com uma antena *patch* ressonante como alimentador, posicionada em contato com a face de saída da lente. A microestrutura é substituída por um meio efetivo $\varepsilon(\mathbf{r})$, obtido pelo mapeamento $t \rightarrow \varepsilon$ da Fig. 4. A lente esférica é então discretizada em 10 cascas concêntricas, cada uma com ε constante – aproximação que dispensa a malha do interior das paredes e economiza $\sim 10^7$ tetraedros.

Beamforming (alimentador centrado). A diretividade máxima para a abertura em 160 GHz é $D_{\max} = 4\pi A/\lambda^2 \approx 29,8$ dBi; com $\eta_{\text{ap}} \approx 0,55$ típica de GRIN espera-se $G \approx 27,2$ dBi. Os modelos foram simulados com o campo clampado ($\varepsilon \in [1,16, 2,8]$), refletindo a lente fabricável. Em *boresight*: $G_{\text{esf}} = 28,5$ dBi (esférica) e $G_{\text{QCTO}} = 22,6$ dBi (disco QCTO). A esférica supera o estimador em $\sim 1,3$ dB ($\eta_{\text{ap}} \approx 0,74$), mostrando que a casca externa clampada (Seção IV) não degrada criticamente a performance; o disco QCTO fica $\sim 5,9$ dB abaixo da esférica. Essa perda decorre da aproximação escalar: ao descartar a componente ε_ρ do tensor de Kundtz e Smith, o foco recua $\Delta z_f \approx R$ abaixo da face de saída (Seção V), afastando o alimentador do plano focal – mesmo mecanismo que responde pela queda de $\sim 5,6$ dB em 48° .

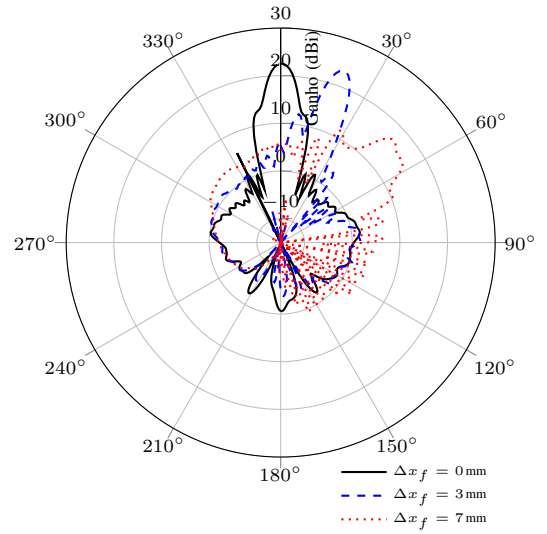
Beamsteering (alimentador deslocado). A varredura é obtida deslocando o alimentador lateralmente sobre a superfície inferior da lente. Para a esférica, $\Delta x_f = 0, 2$ e 4 mm produzem feixes em $\theta_b = 0^\circ, 12^\circ$ e 23° , preservando o ganho até 12° e com apenas $\sim 1,5$ dB de queda em 23° . Para o disco QCTO, $\Delta x_f = 0, 3$ e 7 mm produzem $\theta_b = 0^\circ, 20^\circ$ e 48° – ângulos de varredura maiores ($\sim 2\times$ a esférica para o mesmo Δx_f relativo), ao custo de $\sim 5,6$ dB em 48° . Os padrões de campo distante no plano $\phi=90^\circ$ estão na Fig. 7.

VII. CONCLUSÕES

Apresentou-se uma metodologia integrada – geração paramétrica, caracterização Floquet/NRW, ray-tracing e simulação onda-completa – para projeto e verificação de lentes de Luneburg fabricáveis por impressão 3D em SLA. A principal contribuição é o fluxo que traduz o tensor QCTO em uma



(a) Lente esférica clássica



(b) Disco QCTO escalar

Fig. 7. Padrões de radiação em plano $\phi=90^\circ$ obtidos por simulação onda-completa: (a) lente esférica clássica com alimentador deslocado em $\Delta x_f = 0, 2, 4$ mm; (b) disco QCTO escalar com alimentador deslocado em $\Delta x_f = 0, 3, 7$ mm. Em ambas as geometrias, o deslocamento do alimentador inclina o feixe principal, confirmando em onda-completa o comportamento previsto pelo *ray-tracing* da Fig. 6.

célula TPMS híbrida realizável e o valida em 160 GHz: a versão esférica aproxima-se do desempenho da lente ideal ($\eta_{ap} \approx 0,74$), enquanto a QCTO troca $\sim 5,9$ dB de ganho por uma face de saída plana compatível com alimentadores em PCB – *tradeoff* cujo mecanismo, o deslocamento focal $\Delta z_f \approx R$ da aproximação escalar, foi aqui quantificado. O contraste de custo computacional entre *ray-tracing* e onda-completa (quatro ordens de grandeza) consolida o primeiro como ferramenta de otimização no laço de projeto e o segundo como validação final. As simulações empregam meio efetivo sem perdas, de modo que os ganhos reportados refletem a diretividade realizável e não incorporam perdas dielétricas/ôhmicas, eficiência de radiação, nem o espalhamento e a anisotropia residual da microestrutura TPMS real; a caracterização experimental do protótipo impresso – incluindo a medição de eficiência – é o passo seguinte, ao lado da transposição para FDM em 5G sub-6 GHz e de arranjos *multi-feed* para varredura simultânea.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UFT – Universidade Federal do Tocantins e ao Laboratório Integrado de 5G, IA e IoT, vinculado ao Instituto de Atenção às Cidades, pelo incentivo e apoio no desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] Huawei, “6G: The Next Horizon White Paper,” 2020. [Online]. Disponível: <https://www.huawei.com/en/huaweitech/future-technologies/6g-white-paper>.
- [2] R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*. Berkeley, CA: Univ. of California Press, 1944.
- [3] J. R. Liang, J. Liu, X. Chen e Z. N. Chen, “3D-printed gradient-index lens antenna for wide-angle scan: design and measurement,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, v. 68, n. 12, pp. 7841–7849, dez. 2020.
- [4] J. Li e J. B. Pendry, “Hiding under the carpet: a new strategy for cloaking,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 101, art. 203901, 2008.
- [5] N. Kundtz e D. R. Smith, “Extreme-angle broadband metamaterial lens,” *Nature Materials*, v. 9, pp. 129–132, 2010.

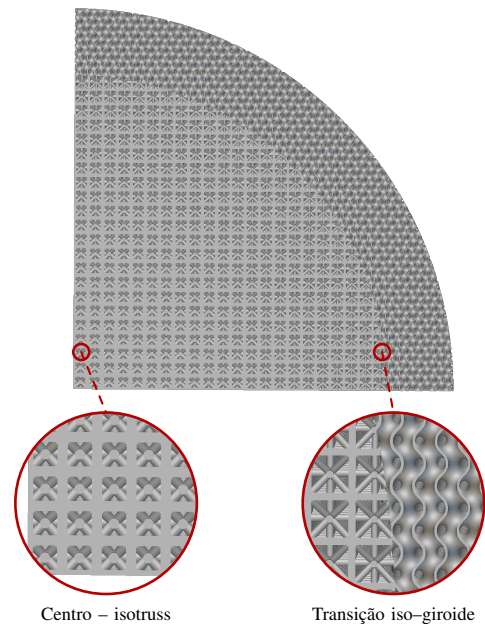


Fig. 8. Lente esférica SLA com composição híbrida. O corte equatorial em um quarto evidencia o gradiente radial de fração volumétrica; os insets circulares destacam a célula isotruss no centro e a transição isotruss-giroide em $r/R \approx 0,8$.

- [6] I. Maskery, A. O. Aremu, L. Parry, R. D. Wildman, C. J. Tuck e I. A. Ashcroft, “Effective design and simulation of surface-based lattice structures featuring volume fraction and cell type grading,” *Materials & Design*, v. 155, pp. 220–232, 2018.
- [7] A. M. Nicolson e G. F. Ross, “Measurement of the intrinsic properties of materials by time-domain techniques,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 19, n. 4, pp. 377–382, 1970.
- [8] M. Liang, X. Yu, R. Sabory-Garcia, W.-R. Ng e H. Xin, “A 3-D Luneburg lens antenna fabricated by polymer jetting rapid prototyping,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, v. 62, n. 4, pp. 1799–1807, abr. 2014.