

Aproximação Baseada em Sombreamento para Somas de Variáveis Aleatórias Nakagami- m com Parâmetros de Forma Inteiros e Semi-Inteiros

Bryan Fernando Sarango Rodríguez, Paula Isabel Tilleria Lucero, Fernando Darío Almeida García e José Cândido Silveira Santos Filho

Resumo— Este artigo propõe uma aproximação nova e arbitrariamente precisa para a distribuição da soma de variáveis aleatórias Nakagami- m , aplicável a parâmetros de forma inteiros e semi-inteiros. Nossa abordagem introduz um paradigma de modelagem fundamentalmente distinto em relação às técnicas convencionais (por exemplo, casamento de momentos, casamento assintótico ou aproximações baseadas no Teorema Central do Limite), ao empregar um conjunto auxiliar de variáveis aleatórias que atuam como sombreamento multiplicativo sobre as variáveis Nakagami- m originais. Esse mecanismo permite obter expressões novas, tratáveis e computacionalmente eficientes para a função densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada da soma. Além de vantagens matemáticas e computacionais, o método proposto oferece benefícios adicionais em relação às soluções existentes: (i) precisão ajustável por meio de parâmetros reguláveis, (ii) convergência em probabilidade para a distribuição exata da soma à medida que os parâmetros reguláveis aumentam, e (iii) capacidade de ajustar o perfil completo da distribuição, incluindo o corpo e as caudas.

Palavras-Chave— Distribuição Nakagami- m , desvanecimento, mecanismo de sombreamento, somas de variáveis aleatórias.

I. INTRODUÇÃO

A caracterização estatística de somas de variáveis aleatórias (VAs) é fundamental em sistemas de comunicações sem fio, nos quais tais somas surgem naturalmente na detecção de sinais, equalização, combinação de diversidade e cancelamento de interferência. Nesse contexto, cada VA modela as flutuações de sinal induzidas pelo desvanecimento sob condições de propagação variáveis. Avaliar o desempenho do sistema requer a caracterização estatística da soma, especificamente a função densidade de probabilidade (PDF, do inglês *probability density function*) e a função de distribuição acumulada (CDF, do inglês *cumulative distribution function*). No entanto, obter essas estatísticas impõe desafios matemáticos e computacionais significativos.

B. F. Sarango Rodríguez, P. I. Tilleria Lucero e F. D. Almeida García pertencem ao Laboratório de Comunicações Sem Fio e Inteligência Artificial (WAI Lab), Instituto Nacional de Telecomunicações (INATEL), Santa Rita do Sapucaí, MG, 37536-001, Brasil (e-mail: bryan.rodriguez@dtel.inatel.br; paula.lucero@dtel.inatel.br; fernando.almeida@inatel.br). J. C. S. Santos Filho pertence ao Laboratório de Tecnologia Sem Fio, Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP 13083-852, Brasil (e-mail: jcssf@unicamp.br). Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Projeto Brasil 6G com apoio da RNP/MCTI (Concessão 01245.010604/2020-14), pelo Projeto xGMobile (Código XGM-AFCCT-2025-8-1-1) com recursos da EMBRAPA/MCTI (Concessão 052/2023 PPI IoT/Manufatura 4.0), pela FAPEMIG (Concessões nº APQ-05305-23, PPE-00124-23) e pela FINEP (nº 1060/2 contrato 01.25.0883.00).

Extensa pesquisa tem sido dedicada à obtenção das estatísticas exatas da soma (PDF e CDF) para diversas distribuições de desvanecimento. Por exemplo, em [1], foi proposta uma representação em série infinita aninhada para a PDF exata da soma de VAs Nakagami- m independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Contudo, como o número de séries aninhadas cresce com o número de VAs na soma, essa abordagem sofre de alta complexidade computacional e tratabilidade limitada. Expressões exatas mais eficientes para as somas de VAs Nakagami- m , κ - μ e α - μ foram desenvolvidas em [2]–[4], sendo que os dois últimos arcabouços englobam o cenário Nakagami- m como caso especial. Infelizmente, essas soluções também se baseiam em representações por séries infinitas e estão restritas ao caso i.i.d. Em [5], uma expressão exata para a PDF da soma de VAs Nakagami- m independentes e não identicamente distribuídas (i.n.i.d.) foi obtida em termos da função hipergeométrica multivariada de Lauricella [6]. Todavia, essa função não está disponível em softwares comerciais e requer avaliações de séries infinitas aninhadas. Além disso, a dimensionalidade da função de Lauricella cresce com o número de VAs na soma, tornando a abordagem impraticável para somas grandes.

Para contornar as dificuldades matemáticas e os custos computacionais das abordagens exatas, muitos estudos recorreram a soluções aproximadas para obter as estatísticas da soma de diversas distribuições de desvanecimento. Uma contribuição pioneira nessa direção foi feita por Nakagami em [7], que propôs aproximar a soma de VAs Nakagami- m i.i.d. por outra VA Nakagami- m . Com base nessa ideia, trabalhos posteriores introduziram a técnica de casamento de momentos (MM, do inglês *moment matching*) [8], na qual os momentos da distribuição exata da soma são igualados aos de um modelo aproximado escolhido. Uma extensão desse método foi apresentada em [9], que utilizou a distribuição α - μ [10], mais flexível, tendo Nakagami- m como caso especial. Mesmo assim, a técnica de MM frequentemente não consegue aproximar as caudas da distribuição com precisão adequada. Para lidar com essa limitação, técnicas de casamento assintótico (AM, do inglês *asymptotic matching*) foram introduzidas em [11], [12] e posteriormente refinadas em [13] para melhor capturar o comportamento da cauda esquerda, especialmente próximo à origem. Embora o método AM ofereça maior precisão na região da cauda esquerda, tende a perder precisão na representação do corpo e da cauda direita da PDF. Em [14], um arcabouço de MM de ordem variável foi proposto

para VAs α - μ i.i.d. e i.n.i.d., usando uma série de Puiseux truncada. Mais recentemente, [15] propôs uma aproximação de três vertentes combinando séries de potências, transformadas de Laplace e expansões em séries gaussianas. No entanto, essa técnica ainda enfrenta obstáculos computacionais significativos, especialmente quando se exige alta precisão.

Neste artigo, apresentamos uma nova aproximação baseada em sombreamento (*shadowing*) para a soma de VAs Nakagami- m i.i.d. e i.n.i.d., aplicável a parâmetros de forma inteiros e semi-inteiros. Diferentemente dos métodos de aproximação convencionais, essa abordagem dispensa o ajuste da soma a qualquer forma funcional predefinida (por exemplo, distribuições Nakagami- m , Gaussiana ou α - μ). A ideia central é incorporar um conjunto auxiliar de VAs que atuam como sombreamento multiplicativo sobre as variáveis Nakagami- m originais. Os parâmetros de forma dessas VAs de sombreamento funcionam como parâmetros reguláveis, permitindo que o modelo aproxime as estatísticas exatas da soma com precisão arbitrária. Essa abordagem resulta em expressões computacionalmente eficientes e matematicamente tratáveis para a PDF e a CDF, ao mesmo tempo em que alcança maior precisão do que os métodos de aproximação existentes. Diferentemente das abordagens anteriores, que se destinam principalmente a aproximar a cauda esquerda ou o corpo da PDF da soma, nosso método captura todo o suporte da distribuição, incluindo o corpo e ambas as caudas. Além disso, à medida que os parâmetros de forma do sombreamento tendem ao infinito, as aproximações propostas convergem em probabilidade para as soluções exatas, tornando-se assintoticamente exatas no limite.

A seguir, $\mathbb{E}[\cdot]$ denota esperança estatística; $\mathbb{V}[\cdot]$, variância; $\|\cdot\|$, norma euclidiana; $|\cdot|$, valor absoluto; $\lfloor \cdot \rfloor$ e $\lceil \cdot \rceil$, os operadores piso e teto, respectivamente; $(\cdot)_{(\cdot)}$, o símbolo de Pochhammer; $\Gamma(\cdot)$, a função Gama completa; $\gamma(\cdot, \cdot)$, a função gama incompleta inferior; $\mathcal{L}\{\cdot\}$, a transformada de Laplace; $\mathcal{L}\{\cdot\}^{-1}$, a transformada de Laplace inversa; $\mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais excluindo o zero; $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números inteiros; e $\sim$, “assintoticamente igual próximo de zero,” isto é, $h(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{g(x)} = 1$.

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja R a soma de L VAs i.n.i.d. $\{R_l\}_{l=1}^L$, isto é,

$$R = \sum_{l=1}^L R_l, \quad (1)$$

em que R_l é uma VA Nakagami- m com PDF dada por

$$f_{R_l}(r_l) = \frac{2m_l m_l r_l^{2m_l-1}}{\Omega_l m_l \Gamma(m_l)} \exp\left(-\frac{m_l r_l^2}{\Omega_l}\right), \quad (2)$$

$\Omega_l = \mathbb{E}[R_l^2]$ denota a potência média (parâmetro de escala), e m_l , a severidade do desvanecimento (parâmetro de forma). A descrição estatística exata de (1) é computacionalmente proibitiva e matematicamente intratável; mesmo para m_l inteiro ou semi-inteiro, inexitem soluções exatas em forma fechada. Neste trabalho, propomos uma aproximação tratável e precisa, preservando as características essenciais da distribuição exata da soma.

III. SOLUÇÃO BASEADA EM SOMBREAMENTO

Nesta seção, utilizamos um mecanismo de sombreamento para aproximar a soma em (1).

Seja $\tilde{R}$ a seguinte soma (aproximada) de L VAs i.n.i.d.:

$$\tilde{R} \triangleq \sum_{l=1}^L X_l, \quad (3)$$

em que $X_l = R_l S_l$ representa o produto de duas VAs Nakagami- m independentes, sendo $\{S_l\}_{l=1}^L$ um conjunto de VAs auxiliares de sombreamento Nakagami- m , cada uma caracterizada por um parâmetro de forma $m_{s,l}$ e um parâmetro de escala normalizado $\Omega_{s,l} = \mathbb{E}[S_l^2] = 1$. O parâmetro de escala foi definido como unitário para garantir que $\mathbb{E}[X_l^2] = \mathbb{E}[R_l^2]$, enquanto o parâmetro de forma $m_{s,l}$ atua como parâmetro de ajuste responsável por fornecer o nível de precisão desejado, conforme demonstrado na Seção V. A PDF de X_l pode ser obtida como [16, eq. (6)]

$$f_{X_l}(x_l) = \frac{4\psi_l^{\frac{1}{2}(m_l+m_{s,l})} x_l^{m_l+m_{s,l}-1}}{\Gamma(m_l) \Gamma(m_{s,l})} K_{m_l-m_{s,l}}(2\sqrt{\psi_l} x_l), \quad (4)$$

em que $\psi_l = \frac{m_l m_{s,l}}{\Omega_l}$ e $K_v(\cdot)$ é a função de Bessel modificada do segundo tipo de ordem v . É importante destacar que, conforme o parâmetro de ajuste $m_{s,l}$ tende ao infinito, $\tilde{R}$ converge para R em probabilidade: quando $m_{s,l} \rightarrow \infty$, $\mathbb{V}[S_l] \rightarrow 0$ enquanto $\mathbb{E}[S_l^2] = 1$, o que implica $S_l \rightarrow 1$ e, portanto, $X_l \rightarrow R_l$. Assim, ajustando o conjunto de parâmetros $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$, $\tilde{R}$ pode aproximar R com precisão arbitrariamente alta. Naturalmente, quanto maiores os valores de $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$, mais precisa será a aproximação. Esse princípio de convergência fundamenta a aproximação proposta. Para aplicar essa aproximação, é necessário encontrar a PDF e a CDF da soma em (3). Isso é obtido pelo teorema a seguir.

Teorema 1: Sob as condições $m_l \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{N} - \frac{1}{2})$ e $|m_l - m_{s,l}| \in \mathbb{N} - \frac{1}{2}$, a PDF e a CDF de $\tilde{R}$ em (3) são dadas, respectivamente, por

$$f_{\tilde{R}}(r) = \Phi \sum_{l=1}^L \sum_{j_l=1}^{\sigma_l} \frac{A_{l,j_l} r^{j_l-1}}{(j_l-1)!} e^{(-2r\sqrt{\psi_l})} \quad (5)$$

$$F_{\tilde{R}}(r) = \Phi \sum_{l=1}^L \sum_{j_l=1}^{\sigma_l} \frac{A_{l,j_l} \gamma(j_l, 2r\sqrt{\psi_l})}{(2\sqrt{\psi_l})^{j_l} (j_l-1)!}, \quad (6)$$

em que $\Phi = \prod_{l=1}^L \Phi_l$, $\Phi_l = \frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{\psi_l}^{m_l+m_{s,l}-\frac{1}{2}}}{\Gamma(m_l)\Gamma(m_{s,l})}$, $\sigma_l = m_l^\dagger + 2\min(m_l, m_{s,l})$, $m_l^\dagger = \lfloor |m_l - m_{s,l}| - \frac{1}{2} \rfloor$, e os coeficientes A_{l,j_l} são apresentados em (7), mostrados na parte superior da próxima página.

Demonstração: Veja Apêndice I. ■

Observação 1: O Teorema exige duas condições sobre os parâmetros de desvanecimento $\{m_l\}_{l=1}^L$ e $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$. Primeiro, requer $m_l \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{N} - \frac{1}{2})$, ou seja, nossa solução se aplica apenas a valores inteiros ou semi-inteiros de $\{m_l\}_{l=1}^L$. Essa restrição decorre da PDF de X_l em (13) juntamente com a decomposição em frações parciais de $\mathcal{L}\{f_{\tilde{R}}\}(s)$ em (19). Segundo, por conta de (13), o Teorema exige $|m_l - m_{s,l}| \in \mathbb{N} - \frac{1}{2}$, isto é, a diferença absoluta entre m_l e $m_{s,l}$ deve ser um número semi-inteiro. Nesse caso, porém, não há restrição na prática: para qualquer valor dado de m_l , o parâmetro $m_{s,l}$

$$A_{l,j_l} = \frac{1}{(\sigma_l - j_l)!} \left[\sum_{m=0}^{\sigma_l - j_l} \binom{\sigma_l - j_l}{m} \frac{(\sigma_l - m + 1)_m}{(s + 2\sqrt{\psi_l})^{m - \sigma_l}} \sum_{\sum_{q=1}^L p_q = \sigma_l - j_l - m} \frac{(\sigma_l - j_l - m)!}{\prod_{z=1}^L p_z!} \prod_{t=1}^L \sum_{i_t=0}^{m_t^\dagger} \frac{\phi_{i_t,t}(-1)^{p_t} (-b_t + i_t)_{p_t}}{(s + 2\sqrt{\psi_l})^{-b_t + i_t + p_t}} \right] \Big|_{s=-2\sqrt{\psi_l}} \quad (7)$$

pode sempre ser ajustado para satisfazer a segunda condição e, ao mesmo tempo, atingir um nível de precisão desejado para a distribuição da soma.

Observação 2: Nossa abordagem garante PDF e CDF matematicamente válidas, ou seja, $f_{\tilde{R}}(r) \geq 0$ e $\int_0^\infty f_{\tilde{R}}(r)dr = 1$ para qualquer $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$. Tal consistência difere de métodos baseados em séries truncadas [14], [15]. Diferentemente de [11]–[13], restritos à cauda esquerda da PDF de R , o método proposto aproxima a distribuição completa: corpo e ambas as caudas. Para $m_{s,l} \rightarrow \infty$, $\tilde{R}$ torna-se assintoticamente exato, conforme validado na Seção V.

Observação 3: Valores maiores de $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$ aumentam a precisão, mas também elevam o custo computacional dos coeficientes A_{l,j_l} , que, por sua vez, podem ser calculados de forma transparente por métodos numéricos e rotinas simbólicas integradas, como `Apart` no MATHEMATICA ou `Residue` no MATLAB.

IV. ESCOLHA DOS PARÂMETROS DE SHADOWING

Nesta seção, propomos um critério de ajuste assintótico para selecionar o conjunto $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$. Esse critério é voltado a capturar o comportamento da cauda esquerda da PDF de R , uma região crítica para avaliar o desempenho de sistemas de comunicações sem fio [17]. Mais especificamente, $m_{s,l}$ é selecionado de modo que $f_{\tilde{R}}(r)$ corresponda ao comportamento assintótico da PDF de R , $f_R(r)$, nas proximidades da origem, isto é, quando $r \rightarrow 0$. É importante notar que outros critérios de ajuste também podem ser empregados.

Usando [12], pode-se mostrar que o comportamento assintótico de $f_R(r)$ é governado por

$$f_R(r) \sim a_0 r^{b_0}, \quad (8)$$

em que os coeficientes a_0 e b_0 determinam o comportamento linear e angular (em uma visualização da PDF em escala logarítmica) da PDF de R ao redor da origem, respectivamente, e são dados por

$$a_0 = \left[\Gamma \left(L + \sum_{l=1}^L (2m_l - 1) \right) \right]^{-1} \prod_{l=1}^L \frac{2m_l \Gamma(2m_l)}{\Gamma(m_l) \Omega_l^{m_l}} \quad (9a)$$

$$b_0 = -1 + \sum_{l=1}^L 2m_l. \quad (9b)$$

A expressão assintótica em (8) é comumente denominada *assíntota* de $f_R(r)$.

A. Critério de Ajuste Assintótico

Como $\tilde{R} \rightarrow R$ quando $m_{s,l} \rightarrow \infty$, uma aproximação assintótica natural para $f_R(r)$ é dada pela representação assintótica de $f_{\tilde{R}}(r)$, obtida como (veja Apêndice III)

$$f_{\tilde{R}}(r) \sim \tilde{a}_0 r^{\tilde{b}_0}, \quad (10)$$

em que $\tilde{a}_0 = \Phi \left[\Gamma \left(\sum_{l=1}^L 2m_l \right) \right]^{-1} \left(\prod_{l=1}^L \phi_l \right)$ e $\tilde{b}_0 = -1 + \sum_{l=1}^L 2m_l$ são os coeficientes linear e angular, respectivamente, e

$$\phi_l = (4\sqrt{\psi_l})^{-m_l^\dagger} \Gamma \left(|m_l - m_{s,l}| + m_l^\dagger + \frac{1}{2} \right) \times \frac{\Gamma(2 \min(m_l, m_{s,l}))}{\Gamma(m_l^\dagger + 1) \Gamma(m_l^\dagger + |m_l - m_{s,l}| + \frac{1}{2})}. \quad (11)$$

Para ajustar perfeitamente o comportamento assintótico de $f_R(r)$ via (10), é necessário que $a_0 = \tilde{a}_0$ e $b_0 = \tilde{b}_0$. Observe que, nas expressões, $b_0 = \tilde{b}_0$, ou seja, os coeficientes angulares são idênticos por construção; portanto, basta nos concentrarmos na condição de igualdade dos coeficientes lineares ($a_0 = \tilde{a}_0$). No entanto, atingir essa igualdade não é trivial. Por um lado, como $m_{s,l} \geq 1/2$, pode existir um grande número de combinações potenciais para o conjunto $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$ que poderiam satisfazer essa igualdade. Por outro lado, a estrutura analítica de $\tilde{a}_0$, combinada com a natureza transcendental e não monótona das funções gama envolvidas, sugere que a igualdade exata pode não ser atingível em certos casos (isto é, $a_0 \neq \tilde{a}_0$). Para lidar com esses casos, formulamos o seguinte problema de otimização, que busca minimizar a norma euclidiana do vetor $\mathbf{m}_s = [m_{s,1}, m_{s,2}, \dots, m_{s,L}]$, garantindo que (i) a condição $|m_l - m_{s,l}| \in \mathbb{N} - \frac{1}{2}$ seja satisfeita $\forall l$ e (ii) o erro relativo entre $\tilde{a}_0$ e a_0 permaneça dentro de um limiar de precisão predefinido ϵ :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_s^* &= \arg \min_{\mathbf{m}_s} \|\mathbf{m}_s\| \\ \text{s.a. } &\frac{|a_0 - \tilde{a}_0|}{a_0} < \epsilon \\ &|m_l - m_{s,l}| \in \mathbb{N} - \frac{1}{2} \quad \forall l, \end{aligned} \quad (12)$$

em que $\mathbf{m}_s^* = [m_{s,1}^*, m_{s,2}^*, \dots, m_{s,L}^*]$ representa o vetor contendo os menores valores possíveis de $m_{s,l}$ que satisfazem todas as restrições do problema de otimização. O problema (12) admite solução eficiente via algoritmos leves como gradiente descendente [18] ou busca em grade adaptativa [19].

V. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, validamos a precisão das aproximações propostas por meio de simulações de Monte Carlo. Para fins de referência, também as comparamos com os métodos de MM, AM e uma aproximação gaussiana baseada no Teorema Central do Limite (TCL). Os valores de $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$ foram escolhidos via critério de ajuste assintótico com $\epsilon = 10^{-3}$, conforme descrito na Seção IV-A.

A Fig. 1 compara nosso método com aproximações convencionais para a soma de três variáveis Nakagami- m i.i.d. A aproximação Nakagami- m por MM [8] oferece precisão razoável no corpo da distribuição, mas se afasta consideravelmente nas caudas, em particular na cauda esquerda. A aproximação Nakagami- m por AM [11] melhora o comportamento da

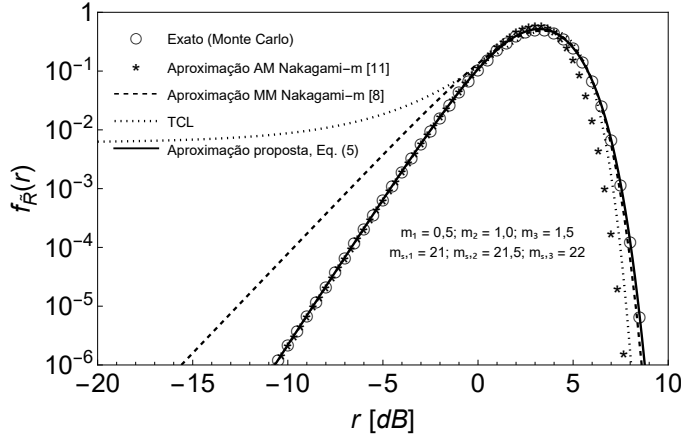


Fig. 1: PDF de $\tilde{R}$ com $L = 3$; $\Omega_1 = 1, 0$; $\Omega_2 = 0, 5$; $\Omega_3 = 1, 0$; e diferentes valores de $\{m_l\}_{l=1}^L$ e $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$.

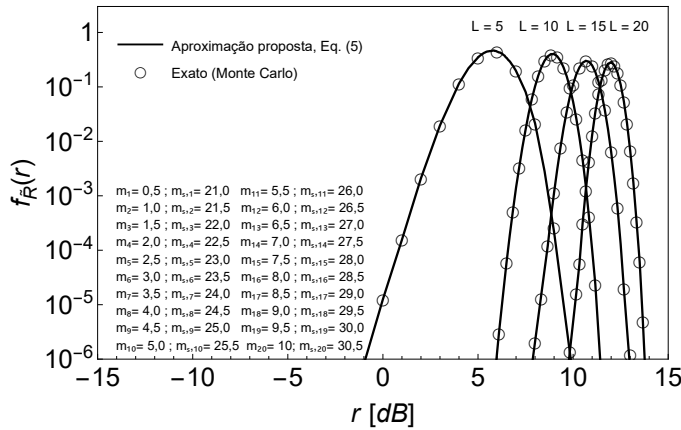


Fig. 2: PDF de $\tilde{R}$ com $\Omega_l = 1, 0$ para l ímpar, $\Omega_l = 0, 5$ para l par, e vários valores de L , m_l e $m_{s,l}$. Cada curva representa a soma de L VAs Nakagami- m , em que os vetores de parâmetros $\{m_l\}_{l=1}^L$ e $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$ correspondem a $L \in \{5, 10, 15, 20\}$ parcelas.

cauda esquerda, mas apresenta imprecisões significativas no corpo e na cauda direita. Em geral, esses métodos sofrem de limitações regionais. A aproximação via TCL apresenta o pior desempenho, com ajuste ruim em ambas as caudas e ao redor do pico da distribuição. Por outro lado, nossa aproximação baseada em sombreado mantém alta precisão em todo o domínio da densidade de probabilidade, da cauda esquerda à direita, mostrando-se claramente superior às abordagens convencionais.

A Fig. 2 demonstra a excelente precisão da aproximação proposta no ajuste à PDF exata de R para diferentes valores de $L \in \{5, 10, 15, 20\}$, representando cenários de soma com complexidade variada, caracterizados por parâmetros de desvanecimento m_l distintos e parâmetros de sombreado $m_{s,l}$ correspondentes. Em todos os cenários, há uma concordância estreita entre nossas curvas aproximadas e as simulações de Monte Carlo, corroborando nossos resultados analíticos.

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho, propusemos uma nova abordagem para caracterizar a soma de VAs Nakagami- m com parâmetros de forma inteiros e semi-inteiros. O método introduz um

mecanismo auxiliar de sombreado multiplicativo que atua como modulação estocástica sobre as VAs da soma, o que, pelo que sabemos, é uma estratégia inédita. O arcabouço proposto permite um controle refinado da precisão por meio de parâmetros ajustáveis e torna-se assintoticamente exato quando os parâmetros de forma do sombreado tendem ao infinito. Os resultados numéricos demonstram elevada precisão tanto no corpo quanto nas caudas da distribuição, fornecendo uma alternativa tratável às soluções exatas.

APÊNDICE I PROVA DO TEOREMA

Começamos aplicando a representação em soma finita da função de Bessel modificada do segundo tipo, dada em [20, eq. (97)], à equação (4), o que resulta em

$$f_{X_l}(x_l) = \Phi_l x_l^{m_l + m_{s,l} - \frac{3}{2}} \exp(-2\sqrt{\psi_l} x_l) \times \sum_{k=0}^{m_l^\dagger} \frac{(4\sqrt{\psi_l} x_l)^{k - m_l^\dagger} \Gamma(-k + |m_l - m_{s,l}| + m_l^\dagger + \frac{1}{2})}{\Gamma(-k + m_l^\dagger + 1) \Gamma(m_l^\dagger + k + |m_l - m_{s,l}| + \frac{1}{2})}, \quad (13)$$

desde que $|m_l - m_{s,l}| \in \mathbb{N} - \frac{1}{2}$, em que $m_l^\dagger = \lceil \frac{1}{2} - |m_l - m_{s,l}| \rceil$, e Φ_l é definido no Teorema.

Para encontrar a PDF da soma em (3), procedemos ao cálculo da transformada de Laplace da PDF em (13), isto é,

$$\mathcal{L}\{f_{X_l}\}(s) = \int_0^\infty \exp(-sx_l) f_{X_l}(x_l) dx_l, \quad (14)$$

em que $s \in \mathbb{C}$. Substituindo (13) em (14), calculando a integral resultante e realizando manipulações algébricas, obtemos

$$\mathcal{L}\{f_{X_l}\}(s) = \Phi_l \sum_{k=0}^{m_l^\dagger} \frac{\phi_{k,l}}{(s + 2\sqrt{\psi_l})^{k - b_l}}, \quad (15)$$

em que $b_l = -2 \min(m_l, m_{s,l})$ e

$$\phi_{k,l} = (4\sqrt{\psi_l})^{k - m_l^\dagger} \Gamma\left(-k + |m_l - m_{s,l}| + m_l^\dagger + \frac{1}{2}\right) \times \frac{\Gamma(k + 2 \min(m_l, m_{s,l}))}{\Gamma(-k + m_l^\dagger + 1) \Gamma(m_l^\dagger + k + |m_l - m_{s,l}| + \frac{1}{2})}. \quad (16)$$

Como a soma em (3) é considerada i.n.i.d., a transformada de Laplace de $f_{\tilde{R}}(r)$ é dada pelo produto das transformadas de Laplace marginais, isto é, $\mathcal{L}\{f_{\tilde{R}}\}(s) = \prod_{l=1}^L \mathcal{L}\{X_l\}(s)$. Assim, usando (15), a transformada de Laplace de $f_{\tilde{R}}(r)$ pode ser expressa como

$$\mathcal{L}\{f_{\tilde{R}}\}(s) = \Phi F(s), \quad (17)$$

em que Φ é definido no Teorema, e

$$F(s) = \sum_{k_1=0}^{m_1^\dagger} \frac{\phi_{k_1,1}}{(s + 2\sqrt{\psi_1})^{k_1 - b_1}} \times \cdots \times \sum_{k_L=0}^{m_L^\dagger} \frac{\phi_{k_L,L}}{(s + 2\sqrt{\psi_L})^{k_L - b_L}}. \quad (18)$$

Observe que a estrutura de (18) consiste em um produto de funções racionais com denominadores distintos. Portanto, aplicamos a decomposição em frações parciais para reescrever (17) de forma mais compacta e analiticamente tratável como

$$\mathcal{L}\{f_{\tilde{R}}\}(s) = \Phi \sum_{l=1}^L \sum_{j_l=1}^{\sigma_l} \frac{A_{l,j_l}}{(s + 2\sqrt{\psi_l})^{j_l}}, \quad (19)$$

em que σ_l é definido no Teorema, e A_{l,j_l} denota os coeficientes resultantes da decomposição em frações parciais, com dedução apresentada no Apêndice II.

A partir de (19), a PDF de $\tilde{R}$ pode agora ser calculada via inversão padrão da transformada de Laplace [21]: $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+\nu)^n\}(r) = \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\nu r}$. Assim, (5) é obtida. Finalmente, a CDF de $\tilde{R}$ pode ser calculada integrando (5) de zero a r , isto é, $F_{\tilde{R}}(r) = \int_0^r f_{\tilde{R}}(u) du$, resultando em (6). Isso conclui a prova.

APÊNDICE II

DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

Os coeficientes da decomposição em frações parciais A_{l,j_l} podem ser calculados usando a fórmula geral de resíduos [21, eq. (A-36)]:

$$A_{l,j_l} = \frac{1}{(\sigma_l - j_l)!} \frac{d^{\sigma_l - j_l}}{ds^{\sigma_l - j_l}} \left[(2\sqrt{\psi_l} + s)^{\sigma_l} F(s) \right] \Big|_{s=-2\sqrt{\psi_l}}, \quad (20)$$

em que $\frac{d^n}{ds^n}$ denota a derivada de ordem n em relação a s . No nosso caso, $n = \sigma_l - j_l$; no entanto, por conveniência de notação, continuaremos usando n ao longo da dedução.

Para calcular a derivada de ordem n em (20), aplicamos a regra geral de Leibniz, dada por

$$\frac{d^n}{ds^n} [G(s) F(s)] = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{d^m}{ds^m} [G(s)] \frac{d^{n-m}}{ds^{n-m}} [F(s)], \quad (21)$$

em que $G(s) = (2\sqrt{\psi_l} + s)^{\sigma_l}$ e $F(s)$ é dado em (18).

Calculamos agora a derivada de ordem m de $G(s)$, que pode ser obtida em forma fechada como

$$\frac{d^m}{ds^m} [G(s)] = (\sigma_l - m + 1)_m (s + 2\sqrt{\psi_l})^{\sigma_l - m}. \quad (22)$$

Por sua vez, a derivada de ordem $(n - m)$ de $F(s)$ pode ser obtida aplicando recursivamente a regra geral de Leibniz, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-m}}{ds^{n-m}} [F(s)] &= \sum_{\sum_{q=1}^L p_q = n-m} \frac{(n-m)!}{p_1! p_2! \cdots p_L!} \\ &\times \prod_{t=1}^L \sum_{i_t=0}^{m_t} \frac{\phi_{i_t,t} (-1)^{p_t} (-b_t + i_t)_{p_t}}{(s + 2\sqrt{\psi_t})^{-b_t + i_t + p_t}}, \end{aligned} \quad (23)$$

em que $\sum_{\sum_{q=1}^L p_q = n-m}$ denota a soma sobre todas as combinações possíveis de L -tuplas $(p_1, \dots, p_L)$ de inteiros não negativos que satisfazem $\sum_{q=1}^L p_q = n - m$. Por fim, substituindo (22) e (23) em (20), obtemos (7), completando a prova.

APÊNDICE III

ESTATÍSTICAS ASSINTÓTICAS DE $\tilde{R}$

Como $r \rightarrow 0$ no domínio real positivo, isso corresponde a $s \rightarrow \infty$ no domínio de Laplace, uma vez que valores pequenos de r estão associados a componentes de alta frequência. Consequentemente, uma representação assintótica da PDF de $\tilde{R}$ pode ser obtida a partir de (17) retendo apenas os primeiros termos (dominantes) das somatórias de (18), a saber,

$$\mathcal{L}\{f_{\tilde{R}}\}(s) \sim \Phi \prod_{l=1}^L \phi_l (2\sqrt{\psi_l} + s)^{b_l}. \quad (24)$$

Como, por construção, o conjunto de parâmetros reguláveis $\{m_{s,l}\}_{l=1}^L$ é escolhido de forma suficientemente grande para garantir um alto nível de precisão, segue que $\min(m_l, m_{s,l}) = m_l \forall l$. Assim, após a inversão de Laplace, chegamos finalmente a (10). Isso conclui a prova.

REFERÊNCIAS

- [1] P. Dharmawansa, N. Rajatheva, and K. Ahmed, "On the distribution of the sum of Nakagami- m random variables," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 55, no. 7, pp. 1407–1416, Jul. 2007.
- [2] F. D. A. García, F. R. A. Parente, N. O. Garzón, H. R. C. Mora, and J. C. S. Santos Filho, "Uma Solução Exacta Mais Eficiente para a Soma de Variáveis Aleatórias Nakagami- m e Aplicações (in Portuguese)," in *Proc. XXXIX Brazilian Symposium of Telecommunications (SBrt)*, Fortaleza, CE, Brazil, Sep. 2021.
- [3] F. D. A. García, F. R. A. Parente, M. D. Yacoub, and J. C. S. Santos Filho, "Exact κ - μ sum statistics," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 12, no. 7, pp. 1284–1288, Jul. 2023.
- [4] —, "On the exact sum PDF and CDF of α - μ variates," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 22, no. 8, pp. 5084–5095, Aug. 2023.
- [5] M. A. Rahman and H. Harada, "New exact closed-form PDF of the sum of Nakagami- m random variables with applications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 59, no. 2, pp. 395–401, Feb. 2011.
- [6] A. M. Mathai, R. K. Saxena, and H. J. Haubold, *The H-function: Theory and Applications*. New York, NY: Springer, 2009.
- [7] M. Nakagami, "The m -distribution—A general formula of intensity distribution of rapid fading," *Stat. Methods Radio Wave Propag.*, vol. 26, no. 2, pp. 3–36, Apr. 1960.
- [8] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, "Nakagami- m approximation to the sum of M non-identical independent Nakagami- m variates," *Electron. Lett.*, vol. 40, no. 15, pp. 951–952, Jul. 2004.
- [9] D. B. da Costa, M. D. Yacoub, and J. C. S. Santos Filho, "An improved closed-form approximation to the sum of arbitrary Nakagami- m variates," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, no. 6, pp. 3854–3858, Nov. 2008.
- [10] M. D. Yacoub, "The α - μ distribution: A physical fading model for the Stacy distribution," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.
- [11] V. Perim, J. D. V. Sánchez, and J. C. S. Santos Filho, "Asymptotically exact approximations to generalized fading sum statistics," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 19, no. 1, pp. 205–217, Jan. 2020.
- [12] F. R. A. Parente and J. C. S. Santos Filho, "Asymptotically exact framework to approximate sums of positive correlated random variables and application to diversity-combining receivers," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 8, no. 4, pp. 1012–1015, Aug. 2019.
- [13] V. G. C. F. Perim, F. R. A. Parente, F. D. A. García, and J. C. S. Santos Filho, "Aproximações mais precisas para somas de envoltórias em regime de alta SNR (in Portuguese)," in *Proc. XL Brazilian Symposium of Telecommunications (SBrt)*, Santa Rita do Sapucaí, MG, Brazil, Sep. 2022.
- [14] M. Payami and A. Falahati, "Accurate variable-order approximations to the sum of α - μ variates with application to MIMO systems," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 20, no. 3, pp. 1612–1623, Mar. 2021.
- [15] G. Taricco, "Series expansions and approximations of the Nakagami- m sum probability density function," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 11, no. 1, pp. 160–164, Jan. 2022.
- [16] G. K. Karagiannidis, N. C. Sagias, and P. T. Mathiopoulos, "N*Nakagami: A novel stochastic model for cascaded fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 55, no. 8, pp. 1453–1458, Aug. 2007.
- [17] Z. Wang and G. B. Giannakis, "A simple and general parameterization quantifying performance in fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 8, pp. 1389–1398, Aug. 2003.
- [18] S. P. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [19] F. Hutter, L. Kotthoff, and J. Vanschoren, *Automated machine learning: methods, systems, challenges*. Springer Nature, 2019.
- [20] F. D. A. García, F. d. P. Calmon, and J. C. S. S. Santos Filho, "Enhanced channel characterization for RIS-aided systems over Nakagami- m fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 75, no. 4, pp. 6207–6223, Apr. 2026.
- [21] A. Oppenheim, A. Willsky, and S. Nawab, *Signals & Systems (2nd Ed.)*. Prentice-Hall, 1996.