

Estimação da direção de chegada de formas de onda conhecidas em arranjos de antenas circulares em diferentes condições de acoplamento mútuo

Nicolas S. M. M. de Oliveira, Cláudio A. B. Saunders Filho, e José A. Apolinário Jr.

Resumo— Este trabalho investiga a estimação de direção de chegada em arranjos circulares uniformes compactos sob forte acoplamento mútuo, cenário típico em rádios definidos por software portáteis. Um estimador interferométrico baseado em forma de onda conhecida (KW, do inglês *known-waveform*) é comparado a métodos clássicos, como *Delay-and-Sum*, *Capon* e *MUSIC*, utilizando modelos de acoplamento obtidos por simulação eletromagnética. A análise considera diferentes níveis de acoplamento por meio da variação do raio do arranjo. Os resultados mostram que métodos clássicos são altamente sensíveis à distorção da resposta espacial do arranjo, enquanto o estimador KW mantém baixa a raiz do erro quadrático médio em todas as condições avaliadas.

Palavras-Chave— DoA, RDS, forma de onda conhecida, arranjo circular uniforme, arranjos compactos de antenas, acoplamento mútuo, interferometria.

Abstract— This work investigates direction-of-arrival estimation in compact uniform circular arrays under strong mutual coupling, a typical scenario in portable software-defined radios. A known-waveform (KW) interferometric estimator is compared with classical methods, including *Delay-and-Sum*, *Capon*, and *MUSIC*, using coupling models derived from electromagnetic simulations. The analysis considers different coupling levels by varying the array radius. Results show that classical methods are highly sensitive to array manifold distortion, while the KW estimator maintains low root mean square error across all evaluated conditions.

Keywords— DoA, SDR, known waveform, uniform circular array, compact antenna array, mutual coupling, interferometry.

I. INTRODUÇÃO

A necessidade crescente por sistemas de comunicações táticas mais confiáveis e eficientes tem favorecido o uso de rádios definidos por software (SDR, do inglês *Software Defined Radio*) dotados de múltiplos elementos de antena [1]. O emprego de arranjos de antenas possibilita explorar o domínio espacial do sinal, permitindo a aplicação de técnicas como *beamforming* para reforçar o ganho na direção do sinal de interesse (SOI, do inglês *signal of interest*) e reduzir a influência de interferências [2], [3]. Entretanto, quando esses arranjos precisam ser embarcados em plataformas compactas, como rádios portáteis ou drones, surgem restrições físicas severas, o que leva ao uso de arranjos compactos, isto é, com espaçamento entre elementos inferior a meio comprimento de onda [4], [5].

Nicolas S. M. M. de Oliveira, Cláudio A. B. Saunders Filho, e José A. Apolinário Jr., Seção de Engenharia Elétrica (SE/3), Instituto Militar de Engenharia (IME), Rio de Janeiro-RJ, Brasil, e-mails: nicolas.oliveira@ime.eb.br, saunders@ime.eb.br e apolin@ime.eb.br.

Essa redução de dimensões torna mais pronunciado um efeito físico importante: o acoplamento mútuo. Decorrente da interação eletromagnética entre antenas muito próximas, esse fenômeno modifica a resposta ideal do arranjo, introduzindo distorções tanto de amplitude quanto de fase nos sinais recebidos. Como consequência, algoritmos clássicos de processamento espacial, normalmente formulados com base em um modelo idealizado do arranjo, podem sofrer degradação significativa de desempenho [6], [7].

Este trabalho considera um cenário de comunicações táticas cooperativas, no qual os nós SDR trocam dados por meio de um protocolo compartilhado um protocolo compartilhado, em oposição a aplicações de radar ou de interceptação passiva. Sob essa premissa, o receptor tem acesso *a priori* à estrutura do sinal incidente por meio dos preâmbulos ou sequências piloto padronizadas definidas pelo protocolo de comunicação.

Nos SDR atuais, a substituição de arquiteturas rígidas por plataformas digitais reconfiguráveis permite implementar, de forma flexível, diferentes formas de onda, tais como FSK, PSK e QAM, em função das necessidades do cenário operacional [8], [9]. Um aspecto recorrente nesses sistemas é a presença de um preâmbulo ou sequência de treinamento no início dos pacotes transmitidos. Esse trecho conhecido do sinal constitui uma fonte relevante de informação *a priori*, que pode ser explorada de maneira sistemática em tarefas de processamento espacial [7], [10]–[12].

Essa estrutura previamente conhecida fundamenta métodos de estimação de direção de chegada (DoA) baseados em forma de onda conhecida, nos quais a correlação cruzada entre as amostras recebidas e o sinal de referência é utilizada para obter assinaturas espaciais [10], [13], [14]. Em contraste com técnicas clássicas, que se apoiam principalmente em propriedades estatísticas do sinal recebido, a abordagem KW utiliza a informação da forma de onda como elemento de referência, o que tende a aumentar a precisão da estimação em situações de baixa relação sinal-ruído (SNR, do inglês *Signal-to-noise ratio*) ou elevada interferência.

A hipótese central deste trabalho é que o uso de conhecimento *a priori* sobre o sinal, mais especificamente de sua forma de onda, pode resultar em um método de estimação de DoA naturalmente mais robusto aos efeitos do acoplamento mútuo introduzidos pela compactação do arranjo. Assim, o objetivo deste artigo é investigar quantitativamente essa hipótese por meio de simulações detalhadas.

Embora métodos de DoA assistidos por KW já tenham sido estudados na literatura [7], [10]–[12], [14], seu comportamento

na presença de forte acoplamento mútuo em arranjos compactos ainda foi pouco investigado. Em especial, a relação entre a distorção da resposta espacial do arranjo e o processamento KW ainda carece de uma avaliação sistemática. Este trabalho busca preencher essa lacuna ao apresentar uma análise detalhada da robustez do método KW [12], utilizando, de forma inédita, arranjos circulares uniformes compactos obtidos a partir de modelagem eletromagnética. O estudo examina o comportamento desse estimador sob diferentes condições de ruído, interferência e acoplamento.

Além disso, este trabalho estende a análise apresentada em [15], no qual o impacto do acoplamento mútuo foi avaliado pela comparação entre cenários ideal e com acoplamento. Diferentemente daquele estudo, o presente trabalho investiga a variação do acoplamento por meio da mudança do raio do arranjo, permitindo analisar seus efeitos no desempenho dos algoritmos de estimação de DoA.

Este artigo está organizado da seguinte forma: a Seção II estabelece os modelos de sistema e de sinal. A Seção III descreve os algoritmos de estimação de DoA avaliados. A Seção IV apresenta e analisa os resultados das simulações e discute as implicações dos achados experimentais, seguida da conclusão na Seção V.

II. MODELO DE SISTEMA E DE SINAL

Esta seção estabelece o arcabouço matemático utilizado para a análise. Detalhamos os modelos para o arranjo de antenas, os sinais incidentes e o efeito de distorção causado pelo acoplamento mútuo.

A. Modelo de sinal em um Arranjo Circular Uniforme

A geometria do arranjo de antenas considerada neste estudo é um Arranjo Circular Uniforme (UCA, do inglês *uniform circular array*), composto por M elementos distribuídos equidistantemente em uma circunferência de raio r , conforme ilustrado na Figura 1. A posição angular do m -ésimo elemento é dada por:

$$\beta_m = \frac{2\pi(m-1)}{M}, \quad m = 1, \dots, M.$$

Assumindo L sinais conhecidos de banda estreita que incidem sobre o arranjo, o *snapshot* complexo em banda base recebido no instante de tempo k é modelado como:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(\theta, \phi) \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k), \quad (1)$$

onde:

- $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de *snapshot* $M \times 1$;
- $\mathbf{A}(\theta, \phi) = [\mathbf{a}(\theta_1, \phi_1) \dots \mathbf{a}(\theta_L, \phi_L)]$ é a matriz de resposta espacial do arranjo;
- $\mathbf{s}(k)$ é o vetor $L \times 1$ contendo as formas de onda dos sinais incidentes;
- $\mathbf{n}(k)$ é o vetor de ruído branco complexo aditivo de dimensão $M \times 1$;

Para um UCA, o vetor de resposta do arranjo $\mathbf{a}(\theta, \phi)$ admite uma expressão em forma fechada que relaciona a direção de chegada do sinal (definida pelo ângulo zenital θ e pelo azimute

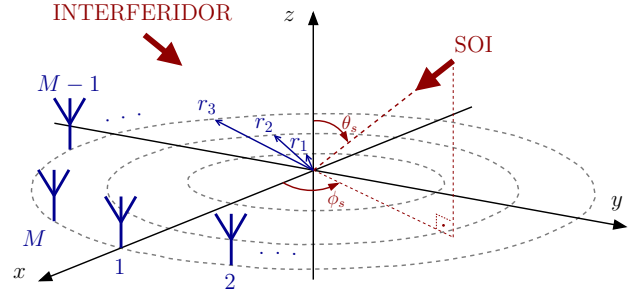


Fig. 1: Configuração geométrica do UCA.

ϕ) com os deslocamentos de fase relativos entre os elementos do arranjo:

$$\mathbf{a}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} e^{-jk_0 r \sin \theta \cos(\phi - \beta_1)} \\ e^{-jk_0 r \sin \theta \cos(\phi - \beta_2)} \\ \vdots \\ e^{-jk_0 r \sin \theta \cos(\phi - \beta_M)} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

onde $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ é o número de onda correspondente ao comprimento de onda λ_0 .

B. Modelo de Acoplamento Mútuo

O acoplamento mútuo é um fenômeno físico em arranjos de antenas no qual a energia irradiada por um elemento é captada por elementos vizinhos. Em arranjos compactos, onde a distância entre os elementos é pequena, essa interação eletromagnética se intensifica e altera a resposta ideal do arranjo [2], [16].

Este trabalho adota um modelo de acoplamento obtido por simulação eletromagnética de onda completa de um arranjo composto por dipolos verticais idênticos de meia onda utilizando o MATLAB® Antenna Array Designer Toolbox, resultando na matriz de acoplamento mútuo $\mathbf{C}_M$.

Seja $\mathbf{x}_{\text{ideal}}(k) \in \mathbb{C}^M$ o vetor de *snapshot* ideal que seria observado na ausência de acoplamento mútuo, e seja $\mathbf{x}(k)$ o vetor de *snapshot* realmente recebido. O efeito de acoplamento é modelado como

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}_M \mathbf{x}_{\text{ideal}}(k). \quad (3)$$

III. ALGORITMOS DE ESTIMAÇÃO DE DOA

Nesta seção são apresentados, de forma sucinta, os algoritmos de estimação de DoA considerados neste trabalho. O objetivo é destacar as diferenças entre suas abordagens conceituais e hipóteses adotadas, com ênfase no nível de conhecimento disponível sobre o sinal e na sensibilidade a imperfeições no modelo do arranjo.

A. Métodos Clássicos de DoA

Os métodos tradicionais de estimação de DoA assumem que a forma de onda do sinal de interesse não é conhecida previamente. Dessa forma, baseiam-se essencialmente nas características estatísticas e espaciais dos sinais recebidos [13], [17]:

- *Delay-and-Sum* (D&S): Trata-se de uma abordagem clássica que realiza uma varredura no espaço angular em busca da direção que maximiza a potência de saída do arranjo;
- Capon: Este método constrói um filtro espacial que minimiza a potência total na saída, associada a ruído e interferência, impondo simultaneamente a condição de resposta sem distorção na direção do sinal desejado;
- MUSIC: Método de subespaço de alta resolução que explora a decomposição em autovalores da matriz de covariância para separar os subespaços de sinal e ruído.

B. Método de DoA com Forma de Onda Conhecida

Diferentemente das técnicas clássicas, a abordagem baseada em forma de onda conhecida, aqui designada como método KW, incorpora explicitamente informações *a priori* do sinal de interesse, como preâmbulos ou sequências piloto, para realizar a estimação da DoA [10], [13], [14]. A partir da correlação entre os dados recebidos e a forma de onda de referência, o método obtém diretamente informações espaciais, dispensando a necessidade de decomposição da matriz de covariância e apresentando maior robustez em cenários com baixa SNR ou forte interferência.

1) *Estimação da assinatura espacial*: Seja $y(k) \in \mathbb{C}$ a forma de onda de referência conhecida no receptor, correspondente ao SOI. Sob a presença de acoplamento mútuo dado pela Equação (3), o vetor recebido contém uma resposta espacial distorcida, $\mathbf{C}_M \mathbf{a}(\theta_s, \phi_s)$, em vez do vetor de resposta ideal $\mathbf{a}(\theta_s, \phi_s)$. O estimador KW, no entanto, ainda preserva relações de fase exploráveis entre pares de sensores, como mostrado a seguir. O vetor de correlação cruzada e o escalar de autocorrelação são estimados a partir de K *snapshots* como

$$\hat{\mathbf{r}}_{xy} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k) y^*(k), \quad \hat{r}_{yy} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |y(k)|^2. \quad (4)$$

A estimativa da assinatura espacial é então obtida por

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{r}}_{xy} / \hat{r}_{yy}. \quad (5)$$

Sob a hipótese de que o ruído $\mathbf{n}(k)$ é descorrelacionado da forma de onda de referência e que $K \rightarrow \infty$, tem-se $\hat{\mathbf{b}} \rightarrow \gamma \mathbf{C}_M \mathbf{a}(\theta_s, \phi_s)$, em que γ é uma constante complexa que captura a potência do SOI e a normalização da referência. Embora o acoplamento distorça os perfis de amplitude e de fase absoluta dos elementos, a geometria do UCA preserva relações de fase exploráveis entre pares de sensores, o que viabiliza o estimador interferométrico descrito a seguir.

2) *Diferenças de fase e sistema linear*: Define-se o conjunto de bases interferométricas $\mathcal{D} \subseteq \{1, \dots, \lfloor M/2 \rfloor\}$, em que cada $\Delta \in \mathcal{D}$ corresponde a um par de sensores separados por Δ posições angulares no UCA. Essa escolha assegura a utilização de todas as bases não redundantes do arranjo. Para cada Δ e cada $m = 1, \dots, M$, define-se $p = m$ e $q = ((m + \Delta - 1) \bmod M) + 1$, e mede-se a diferença de fase

$$\eta_{\Delta}(m) = \angle(\hat{\mathbf{b}}(q) \hat{\mathbf{b}}^*(p)). \quad (6)$$

Substituindo a expressão do vetor de resposta dada em (2) e aplicando a identidade $\cos(\phi - \beta) = \cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta$, obtém-se

$$\eta_{\Delta}(m) = k_0 r [(\cos \beta_p - \cos \beta_q), (\sin \beta_p - \sin \beta_q)] \mathbf{g}, \quad (7)$$

com $\mathbf{g} = [\sin \theta_s \cos \phi_s, \sin \theta_s \sin \phi_s]^T$. Empilhando-se todas as M equações para cada $\Delta \in \mathcal{D}$, constrói-se o sistema

$$\mathbf{C} \mathbf{g} = \boldsymbol{\eta}, \quad (8)$$

em que cada linha de $\mathbf{C}$ é dada por $k_0 r [\cos \beta_p - \cos \beta_q, \sin \beta_p - \sin \beta_q]$, dependendo apenas da geometria do arranjo e do comprimento de onda de operação, podendo ser pré-computada de forma *off-line*.

3) *Solução em forma fechada*: A estimativa de $\mathbf{g}$ é obtida pela solução de mínimos quadrados de (8),

$$\hat{\mathbf{g}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \hat{\boldsymbol{\eta}}, \quad (9)$$

e os parâmetros angulares do SOI são, então, recuperados em forma fechada por

$$\hat{\theta}_s = \sin^{-1} \left(\sqrt{\hat{g}_1^2 + \hat{g}_2^2} \right), \quad \hat{\phi}_s = \arg\{\hat{g}_1 + j\hat{g}_2\}. \quad (10)$$

A solução (10) fornece estimativas independentes de azimuth e elevação, sem decomposição espectral ou busca em grade angular. Em termos computacionais, a complexidade é dominada por multiplicações matriciais e pela inversão de $\mathbf{C}^T \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, o que torna o método particularmente atrativo para implementação em SDR em tempo real [12].

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO E ANÁLISE

Uma comparação quantitativa de desempenho dos algoritmos de estimação de DoA considerados foi conduzida sob condições simuladas projetadas para emular cenários operacionais desafiadores. A precisão da estimação é quantificada pela raiz do erro quadrático médio (RMSE, do inglês *Root Mean Square Error*). Para cada ponto operacional, o RMSE é calculado sobre as $N_t = 3800$ realizações descritas na Seção IV-A como

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N_t} \sum_{t=1}^{N_t} \left(\hat{\phi}_{\text{SOI},t} - \phi_{\text{SOI},t} \right)^2},$$

em que $\phi_{\text{SOI},t}$ é o azimuth verdadeiro do SOI na t -ésima realização e $\hat{\phi}_{\text{SOI},t}$, a estimativa correspondente.

A. Configuração da Simulação

O ambiente de simulação foi projetado para avaliar a robustez dos algoritmos sob condições controladas, porém desafiadoras, de processamento de sinais, com foco no impacto do acoplamento mútuo em arranjos compactos. Considera-se um único sinal de interesse ($L = 1$). O SOI consiste em uma forma de onda FSK binária com taxa de símbolos $R_s = 9600$ sym/s, desvio de frequência de 4.8 kHz e 30 amostras por símbolo, com sequências de bits aleatórias geradas a cada realização. Cada estimação é realizada utilizando um suporte amostral de $K = 2000$ *snapshots*. O sinal interferente é modelado como uma forma de onda FM de banda estreita com

o mesmo desvio de frequência, produzindo uma perturbação espectralmente semelhante.

Todas as fontes encontram-se no plano horizontal ($\theta = 90^\circ$). A grade de azimuth é definida como $\mathcal{G} = \{-180^\circ, -162^\circ, -144^\circ, \dots, 162^\circ\}$, contendo 20 direções espaçadas uniformemente por 18° . Para cada ponto operacional definido por (SNR, ISR), os ângulos de azimuth do SOI e do interferente são variados conjuntamente sobre o produto cartesiano $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, excluindo-se os pares com $\phi_{\text{SOI}} = \phi_{\text{int}}$, totalizando $20 \times 19 = 380$ configurações angulares distintas. Para cada configuração, são geradas 10 realizações de Monte Carlo independentes, cada uma com novas sequências de bits para o SOI, uma nova realização do interferente e um novo vetor de ruído, totalizando 3 800 realizações por ponto operacional.

O arranjo consiste em um UCA de oito elementos operando em $f_c = 500$ MHz. Considera-se sempre a presença de acoplamento mútuo, sendo sua intensidade controlada pela variação do raio do arranjo. Foram avaliados diferentes valores de raio $r \in \{0.10\lambda_0, 0.15\lambda_0, 0.20\lambda_0, 0.25\lambda_0\}$, em que valores menores de raio correspondem a maior acoplamento mútuo entre elementos. A condição $r/\lambda_0 \leq 1/4$ é adotada para evitar ambiguidade de fase nas diferenças entre sensores, garantindo que estas permaneçam no intervalo $[-\pi, \pi)$ e permitindo a aplicação direta da formulação interferométrica em forma fechada [12].

A robustez dos algoritmos é avaliada variando a SNR de -6 dB a 6 dB, enquanto a relação interferência-sinal (ISR, do inglês *Interference-to-Signal Ratio*) é mantida fixa em $\text{ISR} = -6$ dB. O RMSE é calculado exclusivamente sobre o SOI.

B. Análise do RMSE da Precisão de Estimação de DoA

1) *Impacto do Acoplamento Mútuo (Raio do Arranjo)*: As Figuras 2, 3, 4 e 5 apresentam o desempenho dos algoritmos para diferentes valores de raio do UCA, mantendo $\text{ISR} = -6$ dB.

Observa-se que, à medida que o raio do arranjo diminui, o acoplamento mútuo se intensifica, resultando em degradação significativa no desempenho dos métodos clássicos. Em particular, os algoritmos MUSIC e Capon apresentam aumento substancial do RMSE, evidenciando alta sensibilidade a erros no modelo do arranjo causados pelo acoplamento.

O método Delay-and-Sum, embora menos sensível que os métodos baseados em subespaço, também sofre degradação conforme o arranjo se torna mais compacto.

Em contraste, o estimador KW mantém desempenho consistentemente robusto em todas as configurações de raio avaliadas. Mesmo nos cenários mais críticos, correspondentes a $r = 0.10\lambda_0$, o método apresenta baixa variação de RMSE com a SNR e permanece significativamente superior aos demais algoritmos.

Esse comportamento evidencia que a exploração de conhecimento *a priori* da forma de onda permite mitigar os efeitos da distorção do *manifold* do arranjo causada pelo acoplamento mútuo. Diferentemente dos métodos clássicos, cuja performance depende fortemente da precisão do modelo do arranjo, o estimador KW baseia-se na extração direta de

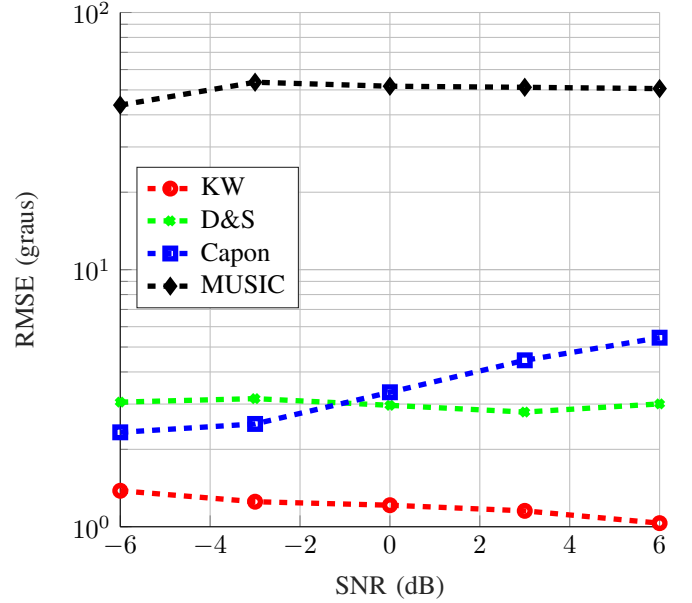


Fig. 2: RMSE médio em função da SNR para $\text{ISR} = -6$ dB e raio $r = 0.25\lambda_0$.

assinaturas espaciais, tornando-o intrinsecamente mais robusto a imperfeições físicas do sistema.

Além disso, observa-se que, mesmo com o aumento da SNR, os métodos clássicos não recuperam desempenho nos cenários de forte acoplamento, indicando que a limitação não é imposta pelo ruído, mas sim pelo erro estrutural no modelo do arranjo.

Em conjunto, os resultados demonstram que a compactação do arranjo, embora desejável do ponto de vista prático, impõe limitações severas aos métodos clássicos de DoA, enquanto a abordagem KW apresenta robustez consistente, tornando-se particularmente adequada para aplicações em SDR com restrições de tamanho.

V. CONCLUSÃO

Este trabalho investigou o problema do processamento espacial em arranjos circulares compactos, nos quais o acoplamento mútuo se torna um fator dominante. A análise mostrou que a variação do raio do arranjo impacta diretamente a precisão dos métodos clássicos, evidenciando sua dependência de um modelo ideal do arranjo. Por outro lado, a utilização de conhecimento *a priori* da forma de onda permite contornar essas limitações, proporcionando uma estimação de DoA mais robusta frente às imperfeições físicas do sistema.

De forma geral, os resultados indicam que abordagens KW constituem uma alternativa eficaz para viabilizar o uso de arranjos compactos em sistemas SDR, especialmente em aplicações onde restrições de tamanho tornam o acoplamento mútuo inevitável.

Como trabalho futuro, pretende-se realizar validações experimentais com arranjos reais e plataformas SDR, de modo a avaliar o desempenho do método proposto sob condições práticas de operação e limitações de *hardware*.

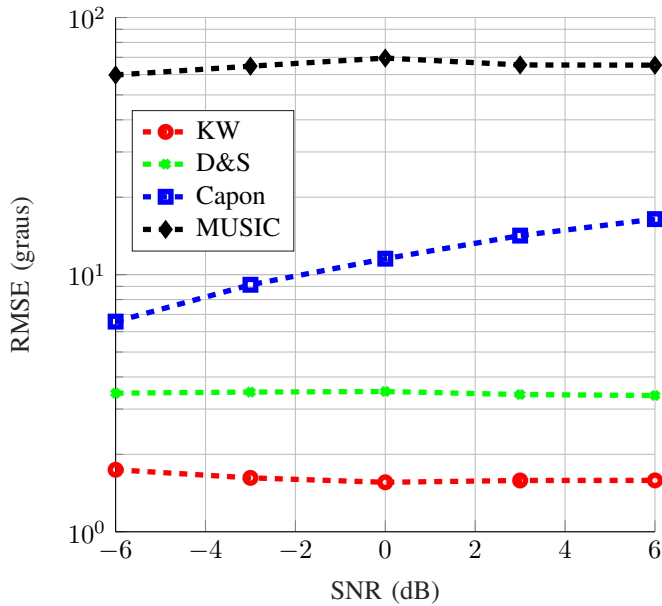


Fig. 3: RMSE médio em função da SNR para $ISR = -6$ dB e raio $r = 0.20\lambda_0$.

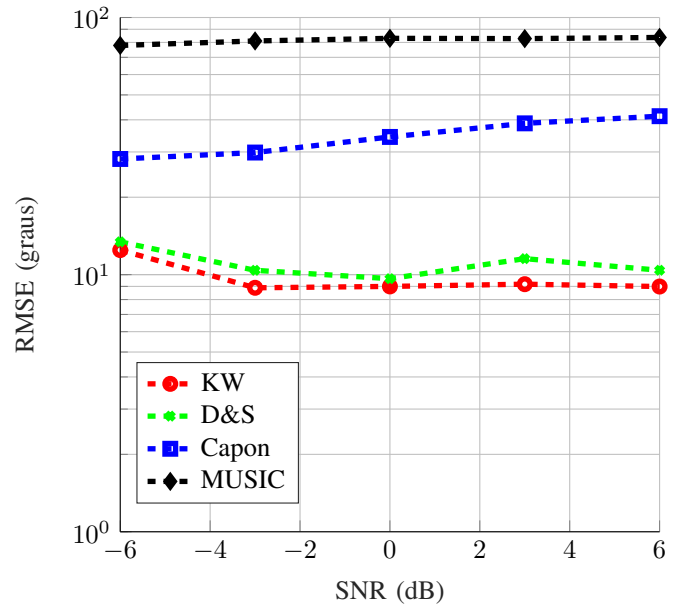


Fig. 5: RMSE médio em função da SNR para $ISR = -6$ dB e raio $r = 0.10\lambda_0$.

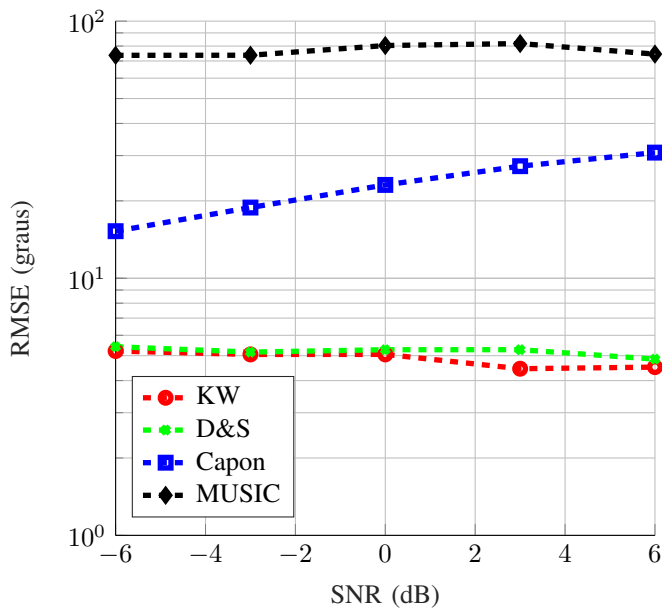


Fig. 4: RMSE médio em função da SNR para $ISR = -6$ dB e raio $r = 0.15\lambda_0$.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Mitola, "The software radio architecture," *IEEE Communications Magazine*, vol. 33, no. 5, pp. 26–38, 1995.
- [2] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 4th ed. Wiley, 2016.
- [3] H. L. Van Trees, *Optimum Array Processing*. Wiley, 2002.
- [4] M. G. Pralon, G. D. Galdo, M. Landmann, M. A. Hein, and R. S. Thomä, "Suitability of Compact Antenna Arrays for Direction-of-Arrival Estimation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 65, pp. 7244–7256, 2017.
- [5] Z. Bozorgasl, H. Chen, and M. J. Dehghani, "2D-DOA Estimation in Uniform Circular Arrays in the Presence of Mutual Coupling," in *2025 59th Annual Conference on Information Sciences and Systems, CISS 2025*, 2025, pp. 1–6.
- [6] L. Han, H. Yin, M. Gao, and J. Xie, "A Superdirective Beamforming Approach With Impedance Coupling and Field Coupling for Compact Antenna Arrays," *IEEE Open Journal of the Communications Society*, vol. 5, pp. 7262–7277, 2024.
- [7] J. F. Gu, W. P. Zhu, and M. N. Swamy, "Fast and efficient DOA estimation method for signals with known waveforms using nonuniform linear arrays," *Signal Processing*, vol. 114, pp. 265–276, 2015.
- [8] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2008.
- [9] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th ed. New York: Wiley, 2001.
- [10] J. F. Gu, P. Wei, and H. M. Tai, "Fast direction-of-arrival estimation with known waveforms and linear operators," *IET Signal Processing*, vol. 2, pp. 27–36, 2008.
- [11] Y. Y. Dong, C. Dong, W. Liu, M. M. Liu, and Z. Tang, "A Structure-Aware DOA Estimation Method for Sources with Short Known Waveforms," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 71 271–71 278, 2018.
- [12] Z. Hu, Q. Wu, J. Zou, and Q. Wan, "Fast and Efficient Two-Dimensional DOA Estimation for Signals with Known Waveforms Using Uniform Circular Array," *Applied Sciences (Switzerland)*, vol. 12, p. 4007, 2022.
- [13] J. Li and R. T. Compton, "Maximum Likelihood Angle Estimation for Signals with Known Waveforms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 9, pp. 2850–2862, 1993.
- [14] J. Li, B. Halder, P. Stoica, and M. Viberg, "Computationally Efficient Angle Estimation for Signals with Known Waveforms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, pp. 2154–2163, 1995.
- [15] N. Oliveira, J. Apolinário Jr., C. Saunders F., and M. Campos, "DOA estimation for compact circular arrays with known signal waveforms under mutual coupling," in *(submitted) IEEE International Conference on Electronics Circuits and Systems (ICECS)*, 2026.
- [16] B. Friedlander, "The Effect of Mutual Coupling on Directivity and SNR in Super-Directive Antenna Arrays," in *Conference Record - Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*. IEEE Computer Society, 2024, pp. 1735–1739.
- [17] P. S. R. Diniz, M. L. R. de Campos, W. A. Martins, M. V. S. Lima, and J. A. Apolinário Jr., *Online Learning and Adaptive Filters*, 1st ed. Cambridge University Press, 2023.