

# Implementação Eficiente de Filtros de Hammerstein Adaptativos Usando o Algoritmo NLMS

Eduardo Luiz Ortiz Batista e Rui Seara

**Resumo**—Este trabalho apresenta uma nova estratégia para implementação de filtros de Hammerstein adaptativos visando contornar problemas numéricos decorrentes do processo adaptativo em cascata inerente a esses filtros. Tais problemas são em geral superados fixando um dos coeficientes do filtro de Hammerstein, o que pode levar a uma redução considerável na velocidade de convergência do algoritmo adaptativo. A estratégia proposta neste trabalho utiliza um procedimento de normalização dos coeficientes que evita a fixação do valor de um deles, permitindo obter uma mais alta velocidade de convergência. Como resultado, um algoritmo com muito bom desempenho e custo computacional aceitável é obtido. Resultados de simulação são apresentados corroborando a eficácia da estratégia proposta.

**Palavras-Chave**—Filtros adaptativos, filtros não-lineares, filtros de Hammerstein, algoritmo NLMS.

**Abstract**—This paper presents a novel strategy to implement adaptive Hammerstein filters aiming to circumvent numerical problems arising from the cascade adaptive process inherent to these filters. Such problems are often overcome maintaining one of the filter coefficients fixed, which may significantly impair the convergence speed of the adaptive algorithm. The proposed strategy uses a coefficient normalization procedure, which avoids maintaining one of the coefficients fixed and thus permits to obtain a faster convergence speed. As a result, an adaptive algorithm with very good performance and acceptable computational cost is obtained. Simulation results are presented attesting the effectiveness of the proposed strategy.

**Keywords**—Adaptive filters, nonlinear filters, Hammerstein filters, NLMS algorithm.

## I. INTRODUÇÃO

Os sistemas de processamento de sinais considerando algoritmos de filtragem adaptativa vêm sendo cada vez mais utilizados nos últimos anos. Isso se deve, em parte, à crescente capacidade dos processadores digitais de sinais modernos, fato esse que vem permitindo o uso de estruturas de filtragem que até então sofriam sérias restrições de aplicação. Exemplos são as estruturas de filtros não-lineares, as quais têm se tornado comuns em muitos sistemas de filtragem adaptativa [1].

O uso de filtros adaptativos não-lineares fez emergir certos problemas que não existiam em aplicações envolvendo filtros adaptativos lineares [1]. O principal deles é a ausência de uma teoria unificada descrevendo todos os tipos de filtros

não-lineares. Como consequência, tais filtros são classificados a partir das funções não-lineares envolvidas, cada classe apresentando características e aplicações distintas.

Uma importante classe de filtros não-lineares é a do filtro de Hammerstein, o qual se constitui de uma estrutura em cascata composta por uma não-linearidade sem memória em série com um filtro linear. Conforme descrito em [2], tal estrutura é apropriada para a modelagem de diversos tipos de sistemas. Assim, os filtros de Hammerstein encontram muitas aplicações práticas [2], sendo sua versão adaptativa utilizada, por exemplo, em cancelamento de eco acústico [3]-[5].

Por envolver a adaptação de uma estrutura em cascata, a implementação de um filtro de Hammerstein adaptativo apresenta alguns problemas numéricos que podem ser contornados fixando (não adaptando) um de seus coeficientes [2]. Essa estratégia, apesar de resultar em uma solução única e contribuir para estabilidade do algoritmo adaptativo [6], pode produzir uma degradação significativa na velocidade de convergência do algoritmo. Nesse contexto, este trabalho de pesquisa apresenta uma nova estratégia para implementação de filtros de Hammerstein adaptativos utilizando um procedimento de normalização dos valores dos coeficientes para eliminar os problemas emergentes da fixação de um dos coeficientes. A estratégia proposta pode ser utilizada em conjunto com diferentes algoritmos adaptativos, sendo o algoritmo *normalized least-mean-square* (NLMS) [7] o escolhido neste trabalho em função do seu bom compromisso entre complexidade e desempenho.

Este artigo está organizado como segue. Na Seção II, a implementação de filtros de Hammerstein adaptativos é discutida. Na Seção III, os principais aspectos da implementação com a fixação de um dos coeficientes são descritos. Ainda na Seção III, a estratégia proposta para implementação do filtro de Hammerstein adaptativo é apresentada e suas principais características são discutidas. A Seção IV mostra e discute os resultados de simulação visando avaliar o desempenho da estratégia proposta. Finalmente, a Seção V apresenta as conclusões deste trabalho de pesquisa.

## II. FILTROS DE HAMMERSTEIN ADAPTATIVOS

Um filtro de Hammerstein pode ser obtido utilizando diferentes tipos de não-linearidades sem memória e de filtros lineares. A implementação aqui considerada, ilustrada na Fig. 1, é composta por uma não-linearidade polinomial sem memória  $g$  em série com um filtro FIR linear  $h$  [3]. Ainda na Fig. 1,  $x(n)$  é o sinal de entrada,  $y(n)$ , o sinal de saída e  $\hat{x}(n)$ , o sinal de entrada do filtro linear  $h$ . Os resultados apresentados neste trabalho, apesar de desenvolvidos para a estrutura da Fig. 1, podem ser posteriormente estendidos para as implementações que utilizam outros tipos de não-linearidades e/ou filtros IIR, como as descritas em [4] e [5].

Eduardo Luiz Ortiz Batista, Departamento de Informática e Estatística, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mail: ebatista@ieee.org.

Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mail: seara@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

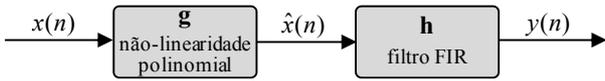


Fig. 1. Diagrama de blocos de um filtro de Hammerstein.

A relação de entrada e saída da não-linearidade polinomial sem memória  $\mathbf{g}$  é dada por

$$\hat{x}(n) = \sum_{m=1}^M g(m)x^m(n) \quad (1)$$

com  $M$  representando a ordem da não-linearidade e  $g(m)$  o coeficiente de ordem  $m$ . Definindo um vetor de entrada  $\mathbf{x}_g(n) = [x(n) \ x^2(n) \ \dots \ x^m(n)]^T$  e um correspondente vetor de coeficientes

$$\mathbf{g} = [g(1) \ g(2) \ g(3) \ \dots \ g(M)]^T \quad (2)$$

(1) pode ser reescrita como  $\hat{x}(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{x}_g(n)$ . Por outro lado, a relação de entrada e saída do filtro FIR  $\mathbf{h}$  é dada por

$$y(n) = \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}(n) \quad (3)$$

com

$$\mathbf{h} = [h(0) \ h(1) \ h(2) \ \dots \ h(N-1)]^T \quad (4)$$

denotando o vetor de coeficientes,

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = [\hat{x}(n) \ \hat{x}(n-1) \ \hat{x}(n-2) \ \dots \ \hat{x}(n-N+1)]^T, \quad (5)$$

o correspondente vetor de entrada e  $N$ , o tamanho de memória. Visando estabelecer uma relação de entrada e saída para o filtro de Hammerstein, a seguinte matriz de entrada é definida:

$$\mathbf{X}(n) = \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) & \dots & x(n-N+1) \\ x^2(n) & x^2(n-1) & \dots & x^2(n-N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^m(n) & x^m(n-1) & \dots & x^m(n-N+1) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Considerando tal matriz, (5) pode ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{X}^T(n) \mathbf{g}. \quad (7)$$

Assim, a partir de (3) e (7), a seguinte representação da relação de entrada e saída do filtro de Hammerstein é obtida:

$$y(n) = \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T(n) \mathbf{g} = \mathbf{g}^T \mathbf{X}(n) \mathbf{h}. \quad (8)$$

#### A. Implementação Convencional do Filtro de Hammerstein Adaptativo usando o Algoritmo NLMS

A equação para a adaptação dos coeficientes da não-linearidade sem memória do filtro de Hammerstein, usando o algoritmo NLMS, é obtida minimizando o valor da norma quadrática de

$$\delta \mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n) \quad (9)$$

elevado ao quadrado e sujeito à seguinte restrição:

$$\mathbf{g}^T(n+1) \mathbf{X}(n) \mathbf{h}(n) = d(n) \quad (10)$$

com  $\mathbf{g}(n)$  e  $\mathbf{h}(n)$  representando, respectivamente, as versões adaptativas de (2) e (4),  $\mathbf{g}(n+1)$ , a versão *a posteriori* de  $\mathbf{g}(n)$  [7] e  $d(n)$ , o sinal desejado [7]. Então, resolvendo o problema de minimização (de forma análoga à apresentada em [8]), a seguinte expressão para adaptação do vetor de coeficientes é obtida:

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \frac{\alpha_g}{\|\mathbf{X}(n) \mathbf{h}(n)\|^2 + \psi_g} e(n) \mathbf{X}(n) \mathbf{h}(n) \quad (11)$$

com  $\alpha_g$  representando o parâmetro de controle e  $\psi_g$ , uma constante utilizada para evitar divisões por valores muito próximos de zero. Ainda em (11),

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (12)$$

é o sinal de erro. De forma similar a (9)-(11), é possível obter a seguinte expressão para adaptação dos coeficientes do filtro FIR que compõe a estrutura da Fig. 1:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \frac{\alpha_h}{\|\mathbf{X}^T(n) \mathbf{g}(n)\|^2 + \psi_h} e(n) \mathbf{X}^T(n) \mathbf{g}(n) \quad (13)$$

com  $\alpha_h$  e  $\psi_h$  funcionalmente similares a  $\alpha_g$  e  $\psi_g$  em (11).

#### B. Características do Processo Adaptativo

Em aplicações práticas, a implementação do filtro de Hammerstein adaptativo é obtida fazendo algumas modificações em (11) e (13). A mais comum dentre elas é a não adaptação ou fixação de algum dos coeficientes do filtro de Hammerstein com valor igual a 1, visando garantir a unicidade da solução e a estabilidade numérica do algoritmo [2]. Outra modificação comumente adotada está relacionada ao cálculo do produto matricial  $\mathbf{X}^T(n) \mathbf{g}(n)$  presente em (13). Note que, como  $\mathbf{g}(n)$  não está disponível antes da iteração  $n$ , o cálculo de  $\mathbf{X}^T(n) \mathbf{g}(n)$  só poderia ser realizado nessa iteração. No entanto, para reduzir o custo computacional, assume-se que  $\mathbf{g}(n)$  varia lentamente e com isso é possível calcular apenas o primeiro elemento de  $\mathbf{X}^T(n) \mathbf{g}(n)$  a cada iteração e reutilizar os demais elementos de iterações anteriores. Uma terceira estratégia adotada para a implementação de filtros de Hammerstein adaptativos é a utilização do procedimento de ortogonalização de sinais de entrada descrito em [2], o qual tem por objetivo melhorar a taxa de convergência do algoritmo adaptativo. Tal procedimento não é considerado aqui por se tratar de uma estratégia complementar à que é proposta neste trabalho, podendo ambas serem adotadas em conjunto em aplicações práticas.

### III. IMPLEMENTAÇÃO EFICIENTE DE FILTROS DE HAMMERSTEIN ADAPTATIVOS

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo central deste trabalho de pesquisa é melhorar a taxa de convergência do filtro de Hammerstein adaptativo, evitando os problemas advindos da fixação de um dos seus coeficientes. Nesse contexto, esta seção inicialmente discute a implementação de tal filtro com um dos coeficientes mantido fixo em 1 para, a seguir, apresentar a estratégia proposta e discutir suas características e complexidade computacional.

#### A. Implementação com Coeficiente Fixo

Por envolver a adaptação de uma estrutura em cascata, a implementação adaptativa do filtro de Hammerstein apresenta uma importante desvantagem: a solução ótima não é única, i.e., o valor mínimo do erro quadrático médio (EQM) pode ser obtido a partir de infinitas combinações de valores diferentes de coeficientes. Essa característica pode ser verificada considerando inicialmente a identidade matricial [9]

$$\text{vec}[\mathbf{ADB}] = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{D}) \quad (14)$$

para reescrever (8) como

$$y(n) = \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T(n) \mathbf{g} = (\mathbf{g}^T \otimes \mathbf{h}^T) \text{vec}[\mathbf{X}^T(n)]. \quad (15)$$

Em (14),  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes genéricas,  $\otimes$  representa o produto de Kronecker e  $\text{vec}[\cdot]$  é um operador que converte uma matriz em vetor empilhando as colunas da matriz [9]. Então, (15) pode ser reescrita como

$$y(n) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) \quad (16)$$

com  $\mathbf{w} = (\mathbf{g} \otimes \mathbf{h})$  representando um vetor de coeficientes equivalente e  $\mathbf{x}(n) = \text{vec}[\mathbf{X}^T(n)]$ , um vetor de entrada. A partir de (16) e considerando as propriedades do produto de Kronecker, verifica-se que um dado vetor de coeficientes equivalente pode ser obtido tanto por valores determinados de  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{h}$  quanto por  $c\mathbf{g}$  e  $\mathbf{h}/c$ , onde  $c$  é um escalar arbitrário, dado que

$$\mathbf{w} = (\mathbf{g} \otimes \mathbf{h}) = [(c\mathbf{g}) \otimes (\mathbf{h}/c)] = (c/c)(\mathbf{g} \otimes \mathbf{h}). \quad (17)$$

A partir de (16) e (17), é possível concluir que, como  $c$  pode assumir infinitos valores diferentes, um mesmo sinal de saída e consequentemente de valor mínimo de EQM podem ser obtidos a partir de infinitas combinações de valores de coeficientes.

A ausência de uma solução única leva a problemas numéricos que são geralmente evitados fixando o valor de um dos coeficientes do filtro de Hammerstein adaptativo em 1 [2], sendo usualmente o primeiro coeficiente do filtro linear o escolhido [2], [6]. No entanto, do ponto de vista de complexidade computacional, a escolha do primeiro coeficiente de  $\mathbf{g}$  como fixo é mais interessante, uma vez que o cálculo do primeiro elemento do vetor resultante de  $\mathbf{X}(n)\mathbf{h}(n)$  em (11) é evitado, resultando em uma economia de  $N$  multiplicações e  $N-1$  somas por iteração. Redução de custo computacional similar não é observada ao se fixar o valor do primeiro coeficiente de  $\mathbf{h}$ , uma vez que  $\mathbf{X}^T(n)\mathbf{g}(n)$  de (13) é em geral obtido reutilizando dados de iterações anteriores (veja Seção II-B).

A expressão para adaptação de  $\mathbf{g}$  usando o algoritmo NLMS e mantendo seu primeiro coeficiente fixo em 1 é obtida incluindo a seguinte restrição no problema de minimização descrito por (9) e (10):

$$\mathbf{c}^T \mathbf{g}(n+1) = 1 \quad (18)$$

onde  $\mathbf{c}$  representa o vetor de restrições (nesse caso, o primeiro elemento de  $\mathbf{c}$  é igual a 1 e os demais são iguais a 0). Então, resolvendo o problema de minimização com restrições resultante (de forma análoga à apresentada em [10]), obtém-se

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{P}\mathbf{g}(n) + \frac{\alpha_g}{\|\mathbf{P}\mathbf{X}(n)\mathbf{h}(n)\|^2 + \psi_g} e(n) \mathbf{P}\mathbf{X}(n)\mathbf{h}(n) + \mathbf{c}. \quad (19)$$

com  $\mathbf{P} = \mathbf{I}_M - \mathbf{c}\mathbf{c}^T$  e  $\mathbf{I}_M$  representando uma matriz identidade de dimensão  $M \times M$ .

Apesar de melhorar consideravelmente as propriedades numéricas do algoritmo, a implementação do filtro de Hammerstein adaptativo com um dos coeficientes fixo em 1 tende a apresentar uma menor velocidade de convergência do que a implementação convencional. Um dos fatores que

contribui significativamente para tal degradação de desempenho é a restrição descrita por (18), a qual implica projetar o vetor de coeficientes equivalente do filtro de Hammerstein em um subespaço vetorial após a sua atualização em cada iteração. Dessa forma, um desvio é produzido na direção ótima de convergência estimada pelo algoritmo adaptativo. O acúmulo do efeito de tal desvio ao longo de muitas iterações (centenas ou milhares) tende a produzir um impacto significativo no desempenho do algoritmo. Outro problema que pode surgir ao se fixar o valor de algum dos elementos de  $\mathbf{g}$  ou  $\mathbf{h}$  em 1 está associado à relação do valor desse elemento com os dos demais elementos. Considere, por exemplo, a fixação em 1 do primeiro elemento de  $\mathbf{h}$  no contexto em que tal elemento é, após a convergência, o de menor magnitude dentre os elementos de  $\mathbf{h}$ . Nesse caso, considerando ainda a inicialização de  $\mathbf{h}$  com zeros (situação comum na prática), um número muito grande de iterações será necessário para que os demais elementos de  $\mathbf{h}$  atinjam seus valores de regime permanente, uma vez que esses valores serão maiores ou muito maiores do que 1. Por outro lado, se o elemento fixado em 1 é o que apresenta a maior magnitude (valores dos demais elementos menores ou muito menores do que 1), um número pequeno de iterações poderá ser necessário para atingir o regime permanente. Assim, observa-se que a escolha do coeficiente fixo em 1 pode ter um impacto decisivo na velocidade de convergência do algoritmo adaptativo.

### B. Nova Estratégia para Implementação de Filtros de Hammerstein Adaptativos

Com o objetivo de evitar a perda de desempenho decorrente da fixação do valor de um dos coeficientes do filtro de Hammerstein adaptativo, uma nova estratégia para implementação de tal filtro é apresentada nesta seção. Essa estratégia baseia-se em manter a norma quadrática de um dos vetores de coeficientes fixada em 1, ao longo do processo adaptativo, sem modificar o vetor de coeficientes equivalente obtido ao final de cada iteração. Buscando um menor custo computacional,  $\mathbf{g}$  é o vetor cuja norma é mantida fixa em 1, visto que, em aplicações práticas, tal vetor apresenta geralmente um menor número de coeficientes do que  $\mathbf{h}$ . A estratégia proposta é então implementada multiplicando, a cada iteração,  $\mathbf{g}(n+1)$  por  $k = 1/\|\mathbf{g}(n+1)\|$  e  $\mathbf{h}(n+1)$  por  $1/k$  [com  $\|\mathbf{g}(n+1)\|$  denotando a norma quadrática de  $\mathbf{g}(n+1)$ ]. Esse procedimento resulta em um vetor  $\mathbf{g}(n+1)$  com norma unitária e mantém o vetor de coeficientes equivalente inalterado, o que pode ser verificado fazendo

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) &= [k \cdot \mathbf{g}(n+1)] \otimes [(1/k) \cdot \mathbf{h}(n+1)] \\ &= (k/k) \cdot [\mathbf{g}(n+1) \otimes \mathbf{h}(n+1)] = [\mathbf{g}(n+1) \otimes \mathbf{h}(n+1)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Caso a estratégia proposta leve a uma solução única (de forma similar à estratégia de fixação do valor de um dos coeficientes em 1), a igualdade

$$\mathbf{w} = \mathbf{g}_{an} \otimes \mathbf{h}_a = \mathbf{g}_{bn} \otimes \mathbf{h}_b \quad (21)$$

deverá ser satisfeita somente se  $\mathbf{h}_a = \mathbf{h}_b$  e  $\mathbf{g}_{an} = \mathbf{g}_{bn}$ , sendo  $\mathbf{h}_a$  e  $\mathbf{h}_b$  vetores de coeficientes com valores arbitrários de elementos e, ainda,  $\mathbf{g}_{an}$  e  $\mathbf{g}_{bn}$  vetores de coeficientes com valores arbitrários de elementos e norma quadrática igual a 1, i.e.,

$$\|\mathbf{g}_{an}\| = \|\mathbf{g}_{bn}\| = 1. \quad (22)$$

A partir de (21), é possível escrever

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{g}_{an}^T \otimes \mathbf{h}_a^T)(\mathbf{g}_{an} \otimes \mathbf{h}_a) = (\mathbf{g}_{bn}^T \otimes \mathbf{h}_b^T)(\mathbf{g}_{bn} \otimes \mathbf{h}_b) \\ &= (\mathbf{g}_{an}^T \otimes \mathbf{h}_a^T)(\mathbf{g}_{bn} \otimes \mathbf{h}_b) \end{aligned} \quad (23)$$

o que, considerando a regra do produto combinado de Kronecker (*mixed-product rule*) [9], resulta em

$$\mathbf{g}_{an}^T \mathbf{g}_{an} \otimes \mathbf{h}_a^T \mathbf{h}_a = \mathbf{g}_{bn}^T \mathbf{g}_{bn} \otimes \mathbf{h}_b^T \mathbf{h}_b = \mathbf{g}_{an}^T \mathbf{g}_{bn} \otimes \mathbf{h}_a^T \mathbf{h}_b. \quad (24)$$

Levando em conta que o produto de Kronecker entre escalares é igual a uma multiplicação, elevando (24) ao quadrado e tirando a raiz quadrada da expressão resultante, obtém-se

$$\|\mathbf{g}_{an}\|^2 \cdot \|\mathbf{h}_a\|^2 = \|\mathbf{g}_{bn}\|^2 \cdot \|\mathbf{h}_b\|^2 = |\mathbf{g}_{an}^T \mathbf{g}_{bn}| \cdot |\mathbf{h}_a^T \mathbf{h}_b|. \quad (25)$$

A partir de (22) e (25), tem-se

$$\|\mathbf{h}_a\|^2 = \|\mathbf{h}_b\|^2 = |\mathbf{g}_{an}^T \mathbf{g}_{bn}| \cdot |\mathbf{h}_a^T \mathbf{h}_b|. \quad (26)$$

Considerando agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz [11] e ainda (22) e (26), é possível escrever

$$|\mathbf{g}_{an}^T \mathbf{g}_{bn}| \leq \|\mathbf{g}_{an}\| \cdot \|\mathbf{g}_{bn}\| = 1 \quad (27)$$

e

$$|\mathbf{h}_a^T \mathbf{h}_b| \leq \|\mathbf{h}_a\| \cdot \|\mathbf{h}_b\| = \|\mathbf{h}_a\|^2. \quad (28)$$

Note que, se  $|\mathbf{g}_{an}^T \mathbf{g}_{bn}| \neq 1$  em (27),  $|\mathbf{g}_{an}^T \mathbf{g}_{bn}| < 1$  e, nesse caso, (26) só pode ser satisfeita se

$$|\mathbf{h}_a^T \mathbf{h}_b| > \|\mathbf{h}_a\|^2. \quad (29)$$

No entanto, a partir de (28), verifica-se que (29) é um resultado absurdo e, portanto, conclui-se que a inequação (27) resulta forçosamente em

$$|\mathbf{g}_{an}^T \mathbf{g}_{bn}| = 1. \quad (30)$$

De forma similar, a partir de (26) e (30), conclui-se que (28) resulta em

$$|\mathbf{h}_a^T \mathbf{h}_b| = \|\mathbf{h}_a\|^2. \quad (31)$$

Conforme descrito em [11], desigualdades de Cauchy-Schwarz, como (27) e (28), só resultam em igualdade caso os vetores envolvidos sejam linearmente dependentes. Assim, é possível concluir, considerando (27), que

$$\mathbf{g}_{an} = \beta \mathbf{g}_{bn} \quad (32)$$

e, portanto,

$$\|\mathbf{g}_{an}\| = |\beta| \cdot \|\mathbf{g}_{bn}\| \quad (33)$$

com  $\beta$  representando um escalar arbitrário. Considerando agora (22), nota-se que (33) só pode ser satisfeita se  $\beta = \pm 1$ , o que implica

$$\mathbf{g}_{an} = \pm \mathbf{g}_{bn}. \quad (34)$$

De forma similar, é possível concluir que

$$\mathbf{h}_a = \pm \mathbf{h}_b. \quad (35)$$

A partir de (21), (34) e (35), constata-se que a estratégia proposta, apesar de não produzir uma solução única para os vetores de coeficientes  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{h}$ , produz apenas duas soluções possíveis para cada um desses vetores. Além disso, tais soluções possuem coeficientes com módulos iguais, diferindo apenas em seus sinais (i.e., as normas quadráticas são sempre iguais). Essa característica garante propriedades numéricas praticamente similares às das implementações obtidas fixando um dos coeficientes do filtro de Hammerstein adaptativo.

### C. Custo Computacional

A implementação da estratégia proposta resulta em um incremento de complexidade computacional de  $2M + N$  multiplicações,  $M - 1$  somas, 1 divisão e 1 operação raiz quadrada por iteração em comparação com a implementação convencional do filtro de Hammerstein. Tal aumento é proporcionalmente pouco significativo, como pode ser observado na Fig. 2. Nessa figura, são apresentadas curvas do número de operações por amostra, em função da ordem da não-linearidade, para as seguintes implementações do filtro de Hammerstein adaptativo com tamanho de memória  $N = 100$ , usando o algoritmo NLMS (considerando o custo de uma divisão ou de uma raiz quadrada igual ao de 10 multiplicações ou adições): (I) convencional; (II) com o primeiro coeficiente da não-linearidade fixado em 1; (III) com a normalização dos vetores de coeficientes (estratégia proposta); e (IV) com a normalização dos vetores de coeficientes realizada a cada 10 iterações [versão de (III) com complexidade reduzida]. A implementação (IV) é obtida adaptando o filtro em 9 iterações e realizando a normalização na décima iteração. Dessa forma, a curva apresentada na Fig. 2 relativa a (IV) representa o número médio de operações por amostra. Além das quatro implementações do filtro de Hammerstein previamente descritas, a Fig. 2 também apresenta a curva do número de operações por amostra para uma implementação do *power filter* [indicada por (V)] utilizando uma versão não adaptativa do procedimento de ortogonalização do sinal de entrada descrito em [12]. Essa implementação é aqui considerada para fins de comparação, uma vez que o filtro de Hammerstein pode ser visto como um caso particular do *power filter* [12].

## IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, resultados de simulação são mostrados com o objetivo de comparar o desempenho das implementações do filtro de Hammerstein que utilizam a estratégia proposta [(III) e (IV)] com o das demais implementações mencionadas na Seção III-C. Tal comparação é realizada em termos de curvas de EQM obtidas a partir de simulações de Monte Carlo (média de 100 realizações). A parte linear das plantas utilizadas nos exemplos considerados possui a resposta ao impulso mostrada na Fig. 3, a qual é uma versão escalada da resposta  $m_2$  apresentada na recomendação G.168 da ITU [13]. Essa resposta possui tamanho de memória igual a 100 e, assim, os filtros adaptativos apresentam o mesmo tamanho de memória. Adicionalmente, os sinais de entrada são brancos e gaussianos com variância unitária e o ruído, adicionado ao sinal de saída da planta, tem variância  $\sigma_z^2 = 10^{-6}$ .

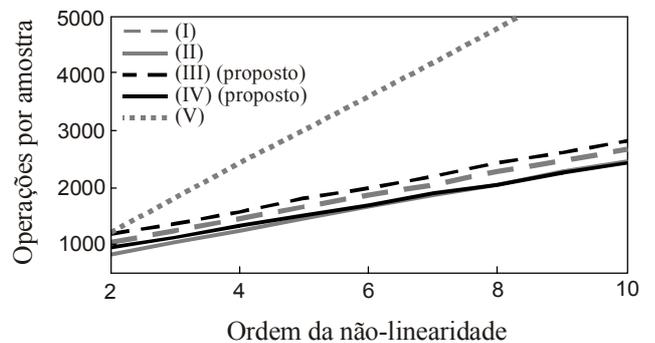


Fig. 2. Complexidade computacional requerida por diferentes implementações do filtro de Hammerstein e do *power filter* [12] usando o algoritmo NLMS.

A. Exemplo 1

A não-linearidade da planta considerada neste exemplo é descrita pela seguinte equação de terceira ordem:  $\hat{x}(n) = 0,5x(n) - 0,15x^2(n) + 0,05x^3(n)$ . Os parâmetros do algoritmo NLMS utilizados nos filtros de Hammerstein são:  $\alpha_g = \alpha_h = 0,25$ ,  $\psi_h = 1$  e  $\psi_g = 10$ . Para o *power filter*, os parâmetros do NLMS são  $\alpha = 0,5$  e  $\psi = 10^{-3}$ . As curvas de EQM obtidas são mostradas na Fig. 4, de onde se observa o desempenho muito bom das implementações baseadas na estratégia proposta [(III) e (IV)]. Tais implementações atingiram uma velocidade de convergência praticamente igual à de (I) (convencional) e muito superior às de (II) (com coeficiente fixado em 1) e (V) (*power filter*). É importante observar ainda a pequena diferença de desempenho entre (III) e sua versão de complexidade reduzida (IV).

B. Exemplo 2

A planta usada neste exemplo possui uma não-linearidade descrita por  $\hat{x}(n) = 0,1x(n) + 0,2x^2(n)$ . Os parâmetros do algoritmo NLMS utilizados pelos filtros de Hammerstein são:  $\alpha_h = 0,3$ ,  $\alpha_g = 0,1$ ,  $\psi_h = 1$  e  $\psi_g = 10$ . Para o *power filter*, os parâmetros do NLMS são os mesmos do exemplo anterior. As curvas de EQM obtidas são mostradas na Fig. 5. Constata-se novamente o desempenho muito bom das implementações baseadas na estratégia proposta [(III) e (IV)], sendo esse desempenho praticamente similar ao de (I) (implementação convencional possuindo indesejáveis propriedades numéricas). Ainda da Fig. 5, observa-se o desempenho pobre de (II) (implementação com o primeiro coeficiente da não-linearidade fixado em 1), decorrente da característica da não-linearidade da planta que apresenta o segundo coeficiente (de segunda ordem) maior do que o primeiro. Esses resultados ilustram a eficácia das implementações baseadas na estratégia proposta e, em especial, de (IV) em função da sua complexidade reduzida em comparação com (III).

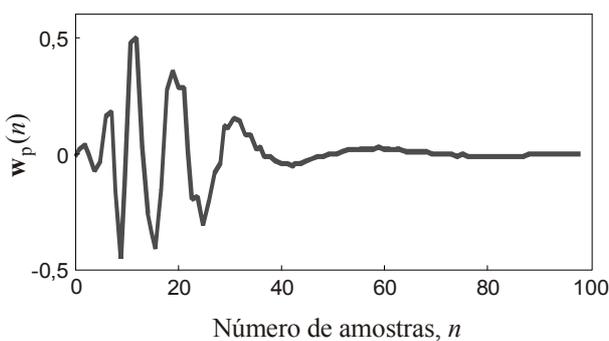


Fig. 3. Resposta ao impulso da parte linear da planta utilizada nos Exemplos 1 e 2.

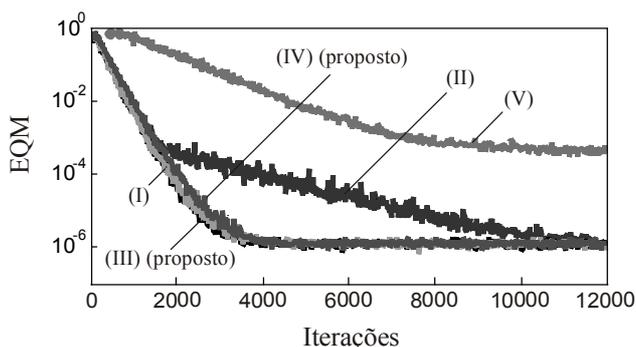


Fig. 4. Curvas de EQM para o Exemplo 1.

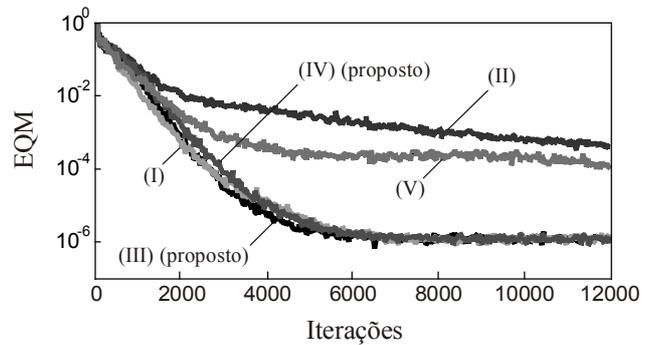


Fig. 5. Curvas de EQM para o Exemplo 2.

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, uma nova estratégia para implementação de filtros de Hammerstein adaptativos foi apresentada. Essa estratégia é baseada na utilização de um procedimento de normalização dos valores dos coeficientes para evitar problemas numéricos decorrentes do processo adaptativo em cascata envolvido na implementação de filtros de Hammerstein. A estratégia proposta exibe um desempenho bastante superior ao da implementação do filtro de Hammerstein adaptativo com um dos coeficientes fixo. Os resultados de simulação apresentados confirmam a eficácia da estratégia proposta neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] V. J. Mathews and G. L. Sicuranza, *Polynomial Signal Processing*, John Wiley & Sons Inc., 2000.
- [2] J. Jeraj and V. J. Mathews, "A stable adaptive Hammerstein filter employing partial orthogonalization of the input signals," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 4, pp. 1412-1420, 2006.
- [3] J.-P. Costa, A. Lagrange, and A. Arliaud, "Acoustic echo cancellation using nonlinear cascade filters," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP)*, Hong Kong, China, vol. 5, Apr. 2003, no. 1, pp. V-389-92.
- [4] J. Fu and W.-P. Zhu, "A nonlinear acoustic echo canceller using sigmoid transform in conjunction with RLS algorithm," *IEEE Trans. Circ. Syst. II: Express Briefs*, vol. 55, no. 10, pp. 1056-1060, Oct. 2008.
- [5] K. Shi, X. Ma, and G. Tongzhou, "An efficient acoustic echo cancellation design for systems with long room impulses and nonlinear loudspeakers," *Signal Processing*, vol. 89, no. 2, pp. 121-132, Feb. 2009.
- [6] J. Jeraj and V. J. Mathews, "Stochastic mean-square performance analysis of an adaptive Hammerstein filter," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 6, pp. 2168-2177, Jun. 2006.
- [7] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters Theory and Applications*. Wiley, 1999.
- [8] E. L. O. Batista, O. J. Tobias, and R. Seara, "New insights in adaptive cascaded FIR structure: application to fully adaptive interpolated FIR structures," in *Proc. European Signal Processing Conf. (EUSIPCO)*, Poznan, Poland, Sept. 2007, pp. 370-374.
- [9] J. W. Brewer, "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-25, no. 9, pp. 772-781, Sept. 1978.
- [10] E. L. O. Batista and Rui Seara, "Implementação Eficiente de Filtros IFIR Completamente Adaptativos," in *Anais do XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Curitiba-PR, Brazil, CD-ROM, Oct. 2011.
- [11] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005.
- [12] F. Kuech, A. Mitnacht, and W. Kellermann, "Nonlinear acoustic echo cancellation using adaptive orthogonalized power filters," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Philadelphia, PA, Mar. 2005, vol. 3, pp. 105-108.
- [13] ITU-T Recommendation G.168, *Digital Network Echo Cancellers*, June 2002.