

Um estudo numérico da dinâmica do mapa de Hénon com filtros só-polos de segunda ordem

Vinícius S. Borges, Magno T. M. Silva e Marcio Eisencraft

Resumo— Quando sinais caóticos são usados em sistemas de comunicação práticos, é essencial controlar e eventualmente limitar a largura de banda espectral desses sinais. Uma maneira de alcançar esse objetivo é inserir um filtro de tempo discreto em um mapa não linear que gera sinais caóticos. No entanto, isso pode alterar completamente as propriedades dinâmicas do mapa original. Anteriormente na literatura, foi considerado o caso em que os sinais caóticos são gerados pelo mapa de Hénon e o filtro inserido tem resposta ao impulso finita. No presente artigo, trata-se numericamente o caso em que o filtro tem resposta ao impulso infinita. Em particular, o filtro considerado aqui é de segunda ordem, tendo apenas dois zeros nulos e dois polos complexos conjugados. Nossos resultados mostram que o ganho do filtro e a localização dos polos têm um impacto significativo no comportamento dos sinais gerados, podendo aparecer pontos fixos estáveis, órbitas periódicas e divergência, além das órbitas caóticas do sistema original sem filtro.

Palavras-Chave— Sistemas não lineares, Processamento de Sinais em tempo discreto, Sinais caóticos.

Abstract— When chaotic signals are used in practical communication systems, it is essential to control and possibly limit the spectral bandwidth of these signals. One way to achieve this is to insert a discrete-time filter into a non-linear map that generates chaotic signals. However, this can completely change the dynamic properties of the original map. Previous works have considered the case where the chaotic signals are generated by the Hénon map and the inserted filter has a finite impulse response. In this paper, the case in which the filter has an infinite impulse response is numerically addressed. In particular, the filter considered here is a second-order filter with only two null zeros and two complex conjugated nonzero poles. Our results show that the gain of the filter and the location of the poles have a significant impact on the behavior of the generated signals, with stable fixed points, periodic orbits and divergence appearing in addition to the chaotic orbits of the original system without filter.

Keywords— Non-linear systems, Discrete-time signal processing, Chaotic signals.

I. INTRODUÇÃO

Um sinal caótico possui três características principais: é limitado em amplitude, apresenta aperiodicidade e dependência sensível às condições iniciais (DSCI) [1]. Essas propriedades estimularam propostas de aplicação de sinais caóticos em Telecomunicações e Processamento de Sinais, desde o trabalho seminal de Pecora e Carroll [2]. Nesse trabalho, mostrou-se que dois sistemas idênticos gerando sinais caóticos podem ser sincronizados, apesar da DSCI. Desde então, muitas

ideias envolvendo o uso de sinais caóticos surgiram como, por exemplo, sistemas de comunicação baseados em caos (SCBC) [3, 4], encriptação de imagem [5, 6], comunicações de banda larga [7], modelos de memristor [8] entre outras. Em Telecomunicações, uma vez que os canais de transmissão são sempre limitados em frequência [9], é necessário conhecer e controlar a largura de banda dos sinais caóticos transmitidos.

Eisencraft et al. [10] propuseram o uso de um filtro de tempo discreto com resposta ao impulso finita (FIR, do inglês *Finite Impulse Response*) [11] em um gerador de sinais caóticos como uma forma de controlar o conteúdo espectral dos sinais gerados. Em trabalhos subsequentes, mostrou-se que a inserção desse filtro não afeta a sincronização caótica [12], o que é essencial para comunicação baseada em caos. Porém, mostrou-se também que a dinâmica é significativamente alterada, com o surgimento de estruturas complicadas no espaço de fase, de pontos fixos e órbitas periódicas [13–15].

Neste trabalho, investiga-se a dinâmica do gerador caótico com a inclusão de um filtro de resposta ao impulso infinita (IIR, do inglês *Infinite Impulse Response*). A análise utilizando filtros IIR é motivada pelas vantagens que eles podem proporcionar. Em termos de eficiência computacional, eles geralmente necessitam de um número menor de coeficientes em comparação com os filtros FIR para alcançar uma resposta em frequência similar [11, 16]. Isso resulta em uma redução na carga computacional, o que é benéfico para sistemas que exigem processamento rápido e eficiente.

Como uma investigação inicial, consideram-se aqui filtros de 2ª ordem só-polos estáveis, ou seja, filtros IIR que possuem apenas dois polos complexos conjugados não nulos dentro do círculo unitário e dois zeros nulos. Assim, esses filtros ficam caracterizados por 3 parâmetros: seu ganho, o módulo e a fase do par de polos complexos conjugados.

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção II, revisita-se o gerador caótico considerado, o mapa de Hénon. Na Seção III, apresenta-se o sistema analisado, envolvendo o uso de um filtro IIR só-polos na realimentação do mapa de Hénon. Na Seção IV, apresentam-se as simulações numéricas junto com os principais resultados do artigo. Por fim, na Seção V apresentam-se as conclusões e propostas de trabalhos futuros.

II. MAPA DE HÉNON

Considere o mapa de Hénon [17]

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \alpha - x_1^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \end{cases}, \quad (1)$$

em que α e β são parâmetros reais.

A órbita de um mapa pode apresentar basicamente quatro comportamentos: convergência para um ponto fixo estável, para uma órbita periódica, para uma órbita caótica ou divergir. A Figura 1 mostra trechos do sinal $x_1(n)$ gerado a partir das iterações de (1) para $x_1(0) = x_2(0) = 0$ (linha azul) e $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0,001$ (linha vermelha). Para exemplificar o comportamento de convergência para um ponto fixo estável, a Figura 1(a) representa o sinal $x_1(n)$ gerado a partir dos valores de parâmetros $\alpha = 0,2$ e $\beta = 0,3$. Nessa situação, o sinal $x_1(n)$ converge para o valor 0,2179. A Figura 1(b) é um exemplo de convergência para uma órbita periódica de período 2 obtida de (1) com $\alpha = 0,9$ e $\beta = 0,3$. Na Figura 1(c), ilustra-se um trecho do sinal $x_1(n)$ com parâmetros $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$. Pode-se notar a característica aperiódica e a DSCI desses sinais produzidos pelo mapa com estes parâmetros.

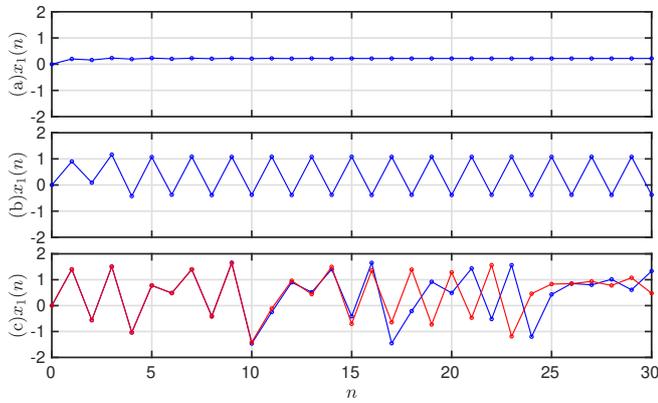


Fig. 1. Trechos de $x_1(n)$ obtidos de (1) com $x_1(0) = x_2(0) = 0$ (linha azul) e $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0,001$ (linha vermelha) e parâmetros (a) $\alpha = 0,2$ e $\beta = 0,3$, (b) $\alpha = 0,9$ e $\beta = 0,3$ e (c) $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$.

Neste artigo, estuda-se o comportamento do sistema quando o sinal $x_1(n)$ é filtrado utilizando-se um filtro IIR [11, 16], cuja saída $x_3(n)$ é realimentada. A seguir, considera-se especificamente um filtro IIR com apenas dois zeros nulos e dois polos não nulos.

III. O SISTEMA CONSIDERADO: MAPA DE HÉNON COM FILTRO IIR SÓ-POLOS

Neste trabalho, consideram-se filtros com apenas dois polos complexos conjugados, cujas posições no plano z são dadas por

$$z = re^{j\omega_0} \quad \text{e} \quad z = re^{-j\omega_0}, \quad (2)$$

em que r é o raio (a distância dos polos à origem) e ω_0 é o ângulo, correspondendo à frequência de ressonância do filtro. O polinômio característico de um sistema com esses dois polos é obtido multiplicando os fatores $(z - re^{j\omega_0})$ e $(z - re^{-j\omega_0})$,

$$(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0}) = z^2 - (re^{j\omega_0} + re^{-j\omega_0})z + r^2. \quad (3)$$

Utilizando a identidade de Euler, $e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0} = 2\cos(\omega_0)$, (3) torna-se

$$z^2 - 2r\cos(\omega_0)z + r^2. \quad (4)$$

A função de transferência $H(z)$ de um filtro digital é a razão entre o polinômio do numerador $B(z)$ e o polinômio do

denominador $A(z)$ [11, 16]. Para um filtro IIR com dois zeros nulos e dois polos não nulos, $B(z)$ é b_0z^2 , em que b_0 é uma constante e $A(z)$ é o polinômio característico definido em (4). Dessa forma, $H(z)$ é dado por

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0z^2}{z^2 - 2r\cos(\omega_0)z + r^2}. \quad (5)$$

A função de transferência pode ser reescrita dividindo todos os termos do numerador e do denominador por z^2 . Assim,

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}. \quad (6)$$

Para implementar esse filtro, define-se a equação de diferença correspondente, que pode ser obtida a partir da função de transferência (6). Além disso, como o filtro será inserido em (1), sua saída, $x_3(n)$, será mais uma dimensão do mapa. Dessa forma,

$$x_3(n+1) = 2r\cos(\omega_0)x_3(n) - r^2x_3(n-1) + b_0x_1(n+1). \quad (7)$$

Reescrevendo (1) para o filtro definido em (7), obtém-se

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \alpha - x_3^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \\ x_3(n+1) = b_0x_1(n+1) + 2r\cos(\omega_0)x_3(n) - r^2x_3(n-1), \end{cases} \quad (8)$$

Para a realização do estudo da dinâmica de (8) é necessário calcular os seus pontos fixos e o maior expoente de Lyapunov de suas órbitas. Nesse caso, precisa-se transformar (8) em um sistema de equações de diferenças de 1º ordem com todas as variáveis de estados no instante de tempo n . Para isso, define-se uma variável auxiliar,

$$x_4(n) \triangleq x_3(n-1). \quad (9)$$

Substituindo essa variável em (8), chega-se a

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \beta x_2(n) - x_3^2(n) + \alpha \\ x_2(n+1) = x_1(n) \\ x_3(n+1) = b_0\beta x_2(n) - b_0x_3^2(n) + 2r\cos(\omega_0)x_3(n) - r^2x_4(n) + b_0\alpha \\ x_4(n+1) = x_3(n) \end{cases} \quad (10)$$

A matriz Jacobiana [1] deste sistema é

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}(n)) = \begin{bmatrix} 0 & \beta & -2x_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0\beta & -2b_0x_3 + 2r\cos(\omega_0) & -r^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

em que $\mathbf{x}(n) \triangleq [x_1(n), x_2(n), x_3(n), x_4(n)]^T$ e $(\cdot)^T$ indica transposição.

Neste trabalho, é importante compreender o conceito de ponto fixo em sistemas dinâmicos. Um ponto fixo, ou ponto estacionário, de um sistema dinâmico é um estado no qual as variáveis de estado não mudam ao longo do tempo. Nesse caso os pontos fixos para (10), $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, p_4]^T$, são obtidos resolvendo

$$\begin{cases} p_1 = \alpha - p_3^2 + \beta p_2 \\ p_2 = p_1 \\ p_3 = b_0p_1 + [2r\cos(\omega_0) - r^2]p_3 \\ p_4 = p_3 \end{cases}, \quad (12)$$

considerando $L = 2r \cos(\omega_0) - r^2$ e reescrevendo p_3 como

$$p_3 = \frac{b_0 p_1}{(1-L)}. \quad (13)$$

Assim, substituindo p_2 e p_3 em p_1 é possível encontrar os valores para p_1

$$p_1^{+,-} = \frac{-(1-\beta) \pm \sqrt{(1-\beta)^2 + 4\alpha \left[\frac{b_0}{(1-L)} \right]^2}}{2 \left[\frac{b_0}{(1-L)} \right]^2} \quad (14)$$

e os pontos fixos do sistema

$$\mathbf{p}^{+,-} = \left[p_1^{+,-}, p_1^{+,-}, \frac{b_0 p_1^{+,-}}{(1-L)}, \frac{b_0 p_1^{+,-}}{(1-L)} \right]^T. \quad (15)$$

A estabilidade dos pontos fixos é analisada calculando os autovalores da matriz Jacobiana para $\mathbf{p}^{+,-}$. Se todos os autovalores dessa matriz tiverem módulo menor que 1 o ponto fixo é estável [1].

Quando o sistema (10) não representa ponto fixo estável e nem divergência, calcula-se o maior expoente de Lyapunov, possibilitando identificar a dinâmica caótica ou periódica das órbitas. O k -ésimo expoente de Lyapunov para uma órbita com condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é definido como

$$h_k(\mathbf{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(|\mathbf{J}^n(\mathbf{x}(0)) \mathbf{u}_k|), \quad (16)$$

onde \mathbf{J}^n é a matriz Jacobiana do mapa iterado n vezes avaliada no ponto $\mathbf{x}(0)$ e \mathbf{u}_k é o autovetor correspondente ao k -ésimo maior autovalor da matriz Jacobiana [13]. O maior expoente de Lyapunov é $h_{\max} = \max_k \{h_k\}$.

Para verificar a presença de órbitas caóticas geradas por (10), analisamos numericamente o maior expoente de Lyapunov h_{\max} de suas órbitas. O comportamento caótico pode ser identificado em uma órbita limitada e aperiódica quando $h_{\max} > 0$ e periódico para $h_{\max} < 0$ [1]. Estimadores numéricos de (16) podem ser obtidos por meio de várias técnicas. Aqui, consideramos o método do mapa tangente [1].

IV. RESULTADOS

Em [14], verificou-se que o ganho para os coeficientes do filtro FIR é relevante no comportamento dinâmico. Nesse sentido, foram considerados quatro valores de ganho. Como neste trabalho consideram-se filtros IIR com apenas dois polos não nulos e dois zeros nulos, os valores de ganho foram incorporados ao coeficiente b_0 do numerador de (6). Foram considerados os seguintes valores de b_0 : 0,8, 0,85, 0,9 e 0,95.

Para as avaliações numéricas de h_{\max} , consideraram-se condições iniciais aleatórias distribuídas uniformemente em um hipercubo de lado 1 em torno de \mathbf{p}^+ e 3000 iterações, excluindo-se as primeiras 1000 iterações. Para cada estimativa, utilizaram-se 10 condições iniciais diferentes e h_{\max} é calculado como o valor médio. A dinâmica é representada por ponto fixo estável em preto, convergência para uma órbita periódica em azul, órbitas caóticas em vermelho e divergência para o infinito em cinza.

Para $b_0 = 0,8$ e variando-se o raio e a fase dos polos nos intervalos $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \omega_0 < 360^\circ$, respectivamente,

obteve-se a classificação da dinâmica do sistema (10) mostrada na Figura 2. Nesse caso, para $0 \leq r \leq 0,45$, a dinâmica é dominada por órbitas periódicas para qualquer valor de ω_0 com uma região estreita de órbitas caóticas próximo de $r = 0,25$ e $\omega_0 = 180^\circ$. Os pontos fixos estáveis são observados para valores altos de r , exceto para valores de fase próximos de $115^\circ < \omega_0 < 245^\circ$. A divergência é encontrada no semiplano esquerdo para valores próximos de $\omega_0 = 180^\circ$ e $0,4 < r \leq 1$ e também uma faixa estreita no semiplano direito próximo da borda do círculo.

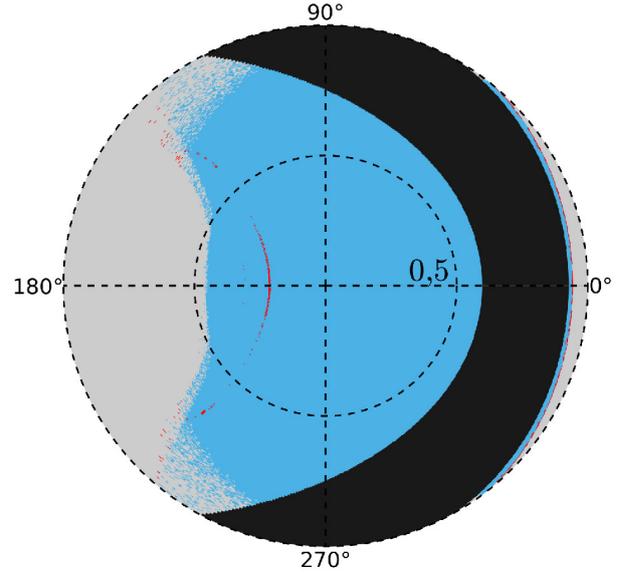


Fig. 2. Classificação da dinâmica do sistema (10) para $b_0 = 0,8$ em função dos polos no plano complexo. A dinâmica está representada por ponto fixo estável em preto, convergência para uma órbita periódica em azul, órbitas caóticas em vermelho e divergência para o infinito em cinza.

A Figura 3 representa o comportamento dinâmico para $b_0 = 0,85$. Observa-se um comportamento semelhante ao do caso $b_0 = 0,8$. O comportamento periódico aparece aproximadamente na área central do círculo unitário. Os pontos fixos estáveis se concentram para valores altos de r , exceto para valores de fase próximos de $115^\circ < \omega_0 < 245^\circ$. No caso da divergência, o seu comportamento ocupa em totalidade a área próxima de $\omega_0 = 180^\circ$ para $0,4 < r \leq 1$, e ainda encontra-se uma região estreita para $0,97 \leq r \leq 1$ em $\omega_0 = 0^\circ$.

A Figura 4 representa o comportamento dinâmico para $b_0 = 0,9$. A região de pontos fixos é semelhante às dos casos anteriores. A região de divergência concentra-se em sua maioria em $115^\circ < \omega_0 < 245^\circ$ e $r > 0,5$. Na parte central do círculo unitário, órbitas periódicas aparecem para valores próximos de $0,25 < r < 0,75$ e $130^\circ < \omega_0 < 230^\circ$. Também aparece o comportamento caótico com pequenas linhas periódicas em azul. Para melhor visualização da região caótica, a Figura 5 representa um zoom da Figura 4 com o raio indo de 0 até 0,5.

A Figura 6 representa o comportamento dinâmico para $b_0 = 0,95$. Nesse caso, a região de ponto fixo é similar às dos casos anteriores, sendo mais estreita. A região de divergência aparece novamente para $115^\circ < \omega_0 < 245^\circ$. O centro do círculo unitário é dominado pelo comportamento caótico, em

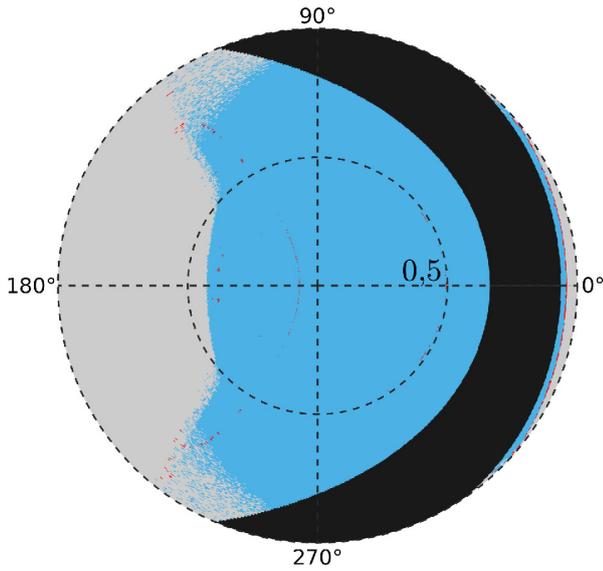


Fig. 3. Classificação da dinâmica do sistema (10) para $b_0 = 0,85$ em função dos polos no plano complexo.

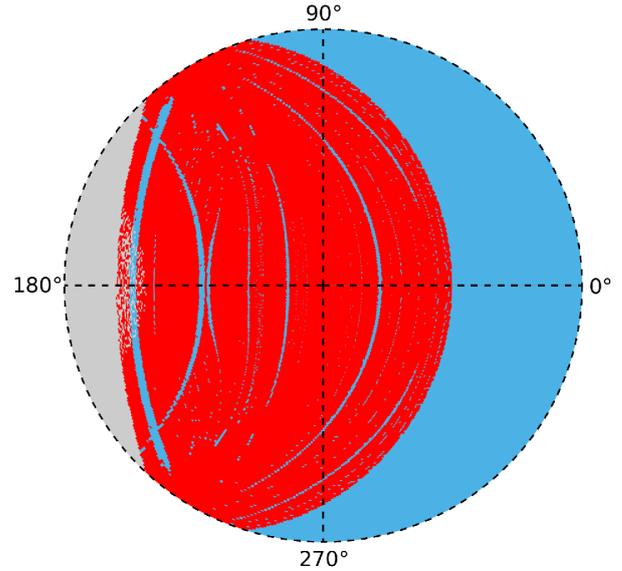


Fig. 5. *Zoom* da Figura 4 para $0 \leq r \leq 0,5$.

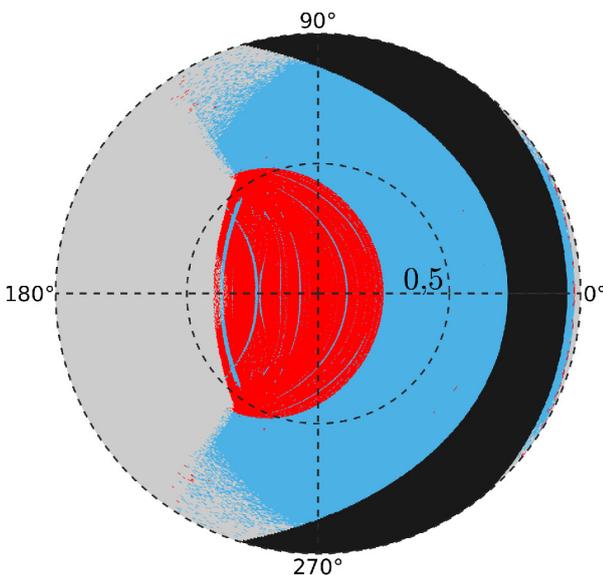


Fig. 4. Classificação da dinâmica do sistema (10) para $b_0 = 0,9$ em função dos polos no plano complexo.

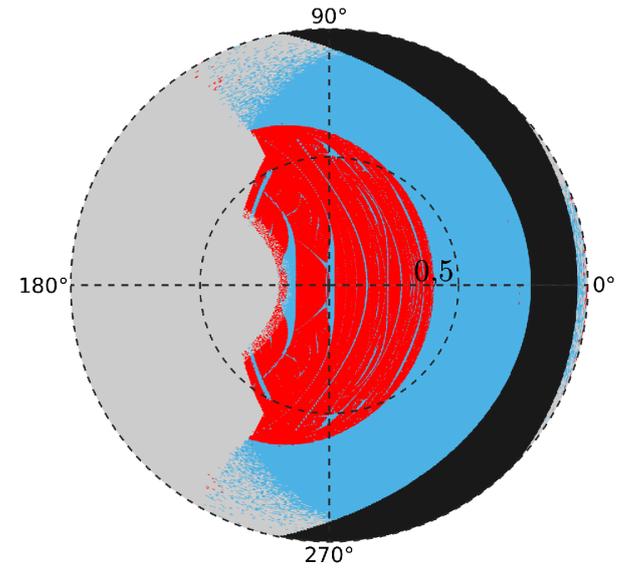


Fig. 6. Classificação da dinâmica do sistema (10) para $b_0 = 0,95$ em função dos polos no plano complexo.

vermelho, com pequenas regiões periódicas em azul.

A Figura 7 representa um *zoom* da Figura 6 com o raio indo de 0 até 0,2. Nesta situação, percebe-se que a região periódica está envolvida por órbitas caóticas. Um comportamento semelhante também foi verificado no trabalho [13] para filtros FIR com dois coeficientes.

A Figura 8 mostra alguns exemplos da dinâmica encontrada na Figura 7. Por meio de trechos do sinal $x_1(n)$, gerado a partir das iterações de (10) para $x_1(0) = x_2(0) = 0$ (linha azul) e $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0,001$ (linha vermelha), é possível observar órbitas periódicas e caóticas. A Figura 8(a) é um exemplo de sinal periódico obtido com a Equação (10) com valores de $r = 0,1$ e $\omega_0 = 90^\circ$ e $b_0 = 0,95$. Esse ponto está representado em preto na Figura 7, e condições iniciais nulas.

Nesse caso, o sinal $x_1(n)$ é de período sete. Na Figura 8(b), ilustra-se um trecho do sinal $x_1(n)$ com parâmetros $r = 0,3$ e $\omega_0 = 90^\circ$, ponto em preto na Figura 7. Pode-se notar a característica aperiódica e a DSCI desses sinais produzidos pelo mapa. A partir de aproximadamente $n = 25$ as órbitas visualmente se separam.

Os resultados apresentados mostram a importância do valor de b_0 para a dinâmica do sistema (10). Com o incremento de b_0 as regiões de pontos fixos se deslocam e as periódicas diminuem, já a região divergente aumenta e pode aparecer comportamento caótico.

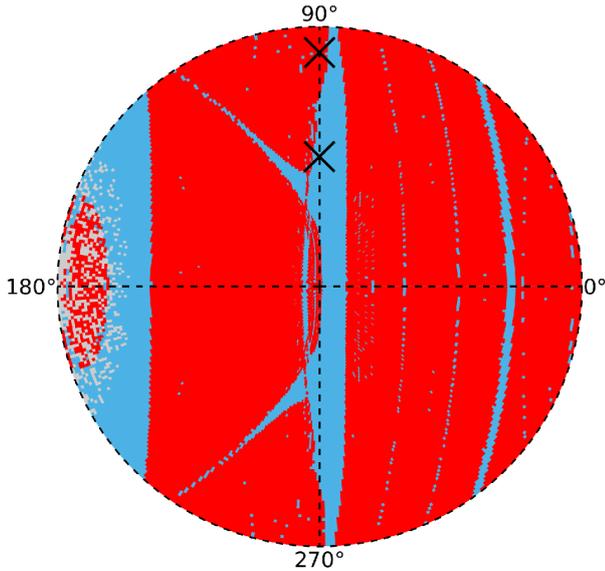


Fig. 7. Zoom da Figura 6 para $0 \leq r \leq 0,4$.

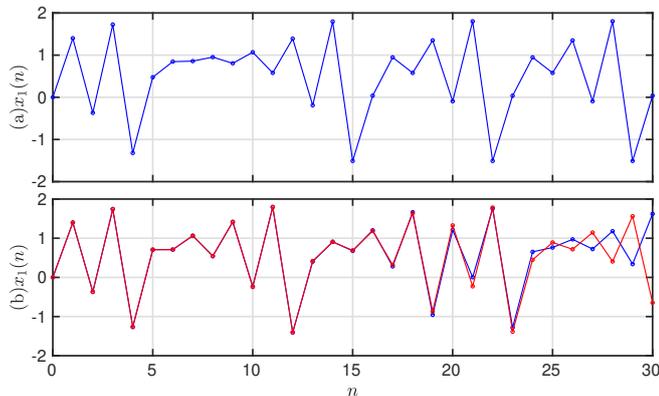


Fig. 8. Trechos de $x_1(n)$ obtidos de (10) com $x_1(0) = x_2(0) = 0$ (linha azul) e $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0,001$ (linha vermelha) e parâmetros $\alpha = 1,4, \beta = 0,3$ e $b_0 = 0,95$, (a) $r = 0,3$ e $\omega_0 = 90^\circ$ e (b) $r = 0,1$ e $\omega_0 = 90^\circ$.

V. CONCLUSÕES

Nos últimos anos, diversas aplicações de sistemas dinâmicos que geram sinais caóticos surgiram na Engenharia e na Física aplicada. Em algumas dessas aplicações, é fundamental limitar o conteúdo espectral dos sinais caóticos, o que pode ser conseguido inserindo filtros lineares em sua descrição. Contudo, a influência desses filtros no comportamento assintótico das trajetórias não é totalmente compreendida. Nesse sentido, este trabalho apresenta experimentos numéricos usando o mapa de Hénon com a inserção de filtros IIR só polos com o intuito de estudar a sua dinâmica.

A partir dos resultados numéricos apresentados, conclui-se que a inserção de filtros lineares só polos em um sistema dinâmico pode alterar significativamente a natureza dos sinais gerados. Além disso, o coeficiente b_0 é determinante para aparecer o comportamento caótico na dinâmica do sistema (10). Em trabalhos futuros, pretende-se estender a análise para outros tipos de filtros IIR, como, por exemplo, filtros IIR notch, filtros de Butterworth e Chebyshev.

REFERÊNCIAS

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos*. Textbooks in Mathematical Sciences, Springer New York, 2000.
- [2] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, no. 8, 1990.
- [3] C. E. C. Souza, D. P. B. Chaves, and C. Pimentel, “Digital communication systems based on three-dimensional chaotic attractors,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 10523–10532, 2019.
- [4] M. S. Baptista, “Chaos for communication,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 105, no. 2, pp. 1821–1841, 2021.
- [5] X. Li, C. Li, and I.-K. Lee, “Chaotic image encryption using pseudo-random masks and pixel mapping,” *Signal Processing*, vol. 125, pp. 48–63, aug 2016.
- [6] N. Zhou, S. Pan, S. Cheng, and Z. Zhou, “Image compression-encryption scheme based on hyper-chaotic system and 2D compressive sensing,” *Optics & Laser Technology*, vol. 82, pp. 121 – 133, 2016.
- [7] A. Dmitriev, A. Kletsov, A. Laktyushkin, A. Panas, and S. Starkov, “Ultrawideband wireless communications based on dynamic chaos,” *Journal of Communications Technology and Electronics*, vol. 51, no. 10, pp. 1126–1140, 2006.
- [8] Y. Peng, K. Sun, and S. He, “A discrete memristor model and its application in Hénon map,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 137, 2020.
- [9] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*. Oxford University Press, 2009.
- [10] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. A. Baccala, “Synchronization of discrete-time chaotic systems in bandlimited channels,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, pp. 1–12, 2009.
- [11] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall Press, 3rd ed., 2009.
- [12] R. T. Fontes and M. Eisencraft, “A digital bandlimited chaos-based communication system,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 37, pp. 374–385, 2016.
- [13] V. S. Borges and M. Eisencraft, “A filtered Hénon map,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 165, 2022.
- [14] V. S. Borges, M. T. Silva, and M. Eisencraft, “Chaotic properties of an FIR filtered Hénon map,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 131, p. 107845, 2024.
- [15] V. S. Borges and M. Eisencraft, “Um estudo numérico do expoente de Lyapunov do mapa Hénon com filtro FIR,” in *Anais do XL Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, SBt2022*, 2022.
- [16] J. G. Proakis and D. K. Manolakis, *Digital Signal Processing (4th Edition)*. Pearson, 2006.
- [17] M. Hénon, “A two-dimensional mapping with a strange attractor,” in *The Theory of Chaotic Attractors*, pp. 94–102, Springer, 1976.