

Modelagem Estocástica do Algoritmo NSVR-IAF-PNLMS para Dados Gaussianos

Fábio Luis Perez, Eduardo Vinícius Kuhn, Francisco das Chagas de Souza e Rui Seara

Resumo—Este artigo apresenta um modelo estocástico do algoritmo NSVR-IAF-PNLMS (*normalized smoothed variation rate individual-activation-factor proportionate normalized least-mean-square*) para sinais de entrada gaussianos reais. Considerando uma matriz de distribuição de ganho variante no tempo, são derivadas aqui expressões de modelo caracterizando o comportamento médio do vetor de coeficientes, da matriz de distribuição de ganhos e da métrica NSVR, bem como a curva de aprendizagem e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes. Através de simulações numéricas, a precisão do modelo estocástico é verificada para diferentes cenários de operação.

Palavras-Chave—Algoritmo IAF-PNLMS, algoritmo NSVR-IAF-PNLMS, filtragem adaptativa, modelagem estocástica.

Abstract—This paper presents a stochastic model of the normalized smoothed variation rate individual-activation-factor proportionate normalized least-mean-square (NSVR-IAF-PNLMS) algorithm for real Gaussian input data. Considering a time-varying gain distribution matrix, model expressions characterizing the mean weight behavior, gain distribution matrix and NSVR metric, as well as the algorithm learning curve and weight-error correlation matrix are derived here. Through numerical simulations, the accuracy of the stochastic model is verified for different operation scenarios.

Keywords—IAF-PNLMS algorithm, NSVR-IAF-PNLMS algorithm, adaptive filtering, stochastic modeling.

I. INTRODUÇÃO

Embora os algoritmos LMS (*least-mean-square*) e NLMS (*normalized LMS*) sejam bastante populares [1], esses algoritmos exibem baixa velocidade de convergência em muitas aplicações práticas nas quais a resposta ao impulso da planta é esparsa. Dentre tais aplicações, destacam-se cancelamento de eco, equalização de canais em sistemas de comunicação e processos sísmicos [2]-[4]. Assim, visando explorar a natureza esparsa da resposta ao impulso das plantas encontradas em algumas aplicações, Duttweiler propôs em [5] o algoritmo PNLMS (*proportionate NLMS*). Tal algoritmo atualiza cada coeficiente do filtro proporcionalmente à sua magnitude, resultando em maior velocidade de convergência para plantas esparsas. Entretanto, para plantas com média e baixa esparsidade, o PNLMS apresenta baixa velocidade de convergência [6]. Além disso, a característica de convergência melhorada do PNLMS não é mantida durante todo o processo

Fábio Luis Perez, ASL—Laboratório de Sistemas de Controle e Filtragem Adaptativa, Departamento de Engenharia Elétrica e de Telecomunicações, Universidade Regional de Blumenau (FURB), Blumenau, SC (e-mail: fabiotek@furb.br).

Eduardo Vinícius Kuhn, Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, PR, Brasil (e-mail: kuhn@utfpr.edu.br).

Rui Seara, LINSE—Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil (e-mail: seara@linse.ufsc.br).

Francisco das Chagas de Souza, LSAPS—Laboratório de Sistemas Adaptativos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia de Eletricidade, Universidade Federal do Maranhão (UFMA), São Luís, MA, Brasil (e-mail: francisco.souza@ufma.br).

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

de adaptação [7], [8]. Então, visando contornar os problemas mencionados, diversos algoritmos que utilizam ganho proporcional vêm sendo propostos na literatura [6]-[13], dentre os quais se destacam o IPNLMS (*improved PNLMS*) [6], o MPNLMS (μ -*law PNLMS*) [8], o SC-PNLMS (*sparseness controlled PNLMS*) [9] e o IAF-PNLMS (*individual-activation-factor PNLMS*) [11].

Considerando fatores de ativação individuais, o algoritmo IAF-PNLMS [11] apresenta maior velocidade de convergência quando comparado a outros algoritmos da literatura (especialmente, para plantas com elevada esparsidade). Tal melhoria é resultante da aplicação de ganho proporcional para todos os coeficientes do filtro adaptativo (tanto ativos quanto inativos¹), o que leva a um aumento do ganho atribuído a coeficientes ativos; como consequência, tem-se um aumento na velocidade de convergência do algoritmo. Entretanto, o ganho atribuído pelo algoritmo IAF-PNLMS a coeficientes ativos é mantido elevado durante todo o processo de adaptação (mesmo após o coeficiente atingir as proximidades de seu valor ótimo), implicando que coeficientes inativos recebam sempre um ganho pequeno; como resultado, compromete-se a velocidade de convergência do algoritmo. Dessa forma, visto que atribuir ganho elevado a coeficientes que já atingiram a vizinhança de seu valor ótimo não tem qualquer efeito sobre a convergência do filtro adaptativo [13], um novo algoritmo (denominado NSVR-IAF-PNLMS) é proposto em [14]. Nesse algoritmo, o ganho de coeficientes que já atingiram a proximidade de seu valor ótimo é transferido para outros que ainda não convergiram, aumentando assim a velocidade de convergência global bem como reduzindo o desalinhamento em regime permanente. Em tal algoritmo, uma métrica de avaliação denominada NSVR (*normalized smoothed variation rate*) é utilizada para estimar a convergência individual do coeficiente, a qual mede a taxa de variação suavizada e normalizada da magnitude do coeficiente.

No sentido de prover um entendimento mais profundo do comportamento do algoritmo NSVR-IAF-PNLMS, um caminho conveniente se dá através de seu modelo estocástico. Particularmente, a modelagem estocástica de algoritmos adaptativos visa determinar expressões matemáticas que permitam descrever (com certa precisão) o comportamento de um dado algoritmo em diferentes cenários de operação. Assim, o modelo de um algoritmo possibilita uma análise teórica detalhada do seu comportamento, como também pode auxiliar o projetista no ajuste de seus parâmetros; com isso, a análise de desempenho através de extensivas simulações de Monte Carlo (MC) pode ser evitada. Além disso, comportamentos indesejados do algoritmo podem ser observados através do modelo, permitindo então a proposição de modificações e/ou a customização do algoritmo para condições específicas de operação [15]. Nesse contexto, o presente trabalho de pesquisa visa derivar um modelo estocástico para o algoritmo NSVR-IAF-PNLMS, considerando dados de entrada gaussianos reais. Especificamente, são aqui obtidas expressões de modelo

¹ Coeficientes cuja magnitude é muito inferior à magnitude do coeficiente mais significativo.

caracterizando o comportamento médio do vetor de coeficientes, da matriz de distribuição de ganhos e da métrica NSVR, bem como a curva de aprendizagem do algoritmo e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes.

Este artigo está organizado como segue. A Seção II revisita os algoritmos IAF-PNLMS e NSVR-IAF-PNLMS, discutindo brevemente sobre as suas políticas de distribuição de ganho. A Seção III apresenta as expressões caracterizando o modelo estocástico proposto. Na Seção IV, resultados de simulação são mostrados, confirmando a precisão das expressões de modelo obtidas. Finalmente, a Seção V apresenta as conclusões do presente trabalho de pesquisa.

II. REVISITANDO O ALGORITMO NSVR-IAF-PNLMS

Nesta seção, as expressões gerais dos algoritmos IAF-PNLMS e NSVR-IAF-PNLMS são revisitadas, considerando um problema de identificação de sistema. Adicionalmente, é apresentada uma breve discussão sobre as políticas de distribuição de ganho.

A. Algoritmo IAF-PNLMS

O algoritmo IAF-PNLMS é formulado pelo seguinte conjunto de equações [11]:

- Atualização dos coeficientes:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \frac{\beta \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) e(k)}{\mathbf{x}^T(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) + \xi} \quad (1)$$

- Sinal de erro:

$$e(k) = [\mathbf{w}^0 - \mathbf{w}(k)]^T \mathbf{x}(k) + v(k) \quad (2)$$

- Matriz de distribuição de ganho:

$$\mathbf{G}(k) = \text{diag}[g_1(k) \ g_2(k) \ \dots \ g_N(k)] \quad (3)$$

- Ganho individual:

$$g_i(k) = \frac{\lambda_i(k)}{\sum_{j=1}^N \lambda_j(k)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4)$$

- Função de proporcionalidade:

$$\lambda_i(k) = \max[f_i(k), |w_i(k)|] \quad (5)$$

- Fator de ativação individual:

$$f_i(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} |w_i(k)| + \frac{1}{2} \lambda_i(k-1), & k = mN, m = 1, 2, 3, \dots \\ f_i(k-1), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

onde β é o parâmetro de controle de passo, $\xi > 0$, um parâmetro de regularização que previne divisão por zero em (1) e $v(k)$, um ruído de medição. Os vetores $\mathbf{x}(k) = [x(k) \ x(k-1) \ \dots \ x(k-N+1)]^T$, $\mathbf{w}(k) = [w_1(k) \ w_2(k) \ \dots \ w_N(k)]^T$ e $\mathbf{w}^0 = [w_1^0 \ w_2^0 \ \dots \ w_N^0]^T$ denotam, respectivamente, o vetor de entrada contendo as amostras mais recentes do sinal de entrada, o vetor de coeficientes do filtro adaptativo e a planta a ser identificada.

Note de (5) e (6) que, conforme o algoritmo IAF-PNLMS evolui, $f_i(k)$ e $\lambda_i(k)$ tendem ao valor de $w_i(k)$, implicando que o ganho individual $g_i(k)$ seja proporcional à magnitude do coeficiente adaptativo. Dessa forma, o IAF-PNLMS aumenta o ganho atribuído a coeficientes ativos quando comparado a outros algoritmos proporcionais; consequentemente, uma maior velocidade de convergência é observada para plantas com elevada esparsidade. Contudo, após a convergência dos coeficientes ativos, o algoritmo exibe uma degradação significativa em sua velocidade de convergência, visto que os coeficientes inativos possuem ganhos pequenos e, por isso, convergem mais lentamente [13].

B. Algoritmo NSVR-IAF-PNLMS

Visando aumentar a velocidade de convergência dos coeficientes inativos, o NSVR-IAF-PNLMS reduz o ganho atribuído a coeficientes que já tenham atingido a vizinhança de seus valores ótimos e o redistribui dentre aqueles que ainda não convergiram (isto é, não alcançaram a vizinhança de seu valor ótimo). Assim, com o aumento do ganho alocado a esses coeficientes, uma maior velocidade de convergência do algoritmo é obtida [14]. Para estimar a convergência individual do coeficiente, a métrica NSVR é usada, a qual é definida como

$$V_i(k) = \begin{cases} \frac{|Q_i(k) - P_i(k)|}{\min[Q_i(k), P_i(k)]}, & k = m\Delta, \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ V_i(k-1), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

com

$$Q_i(k) = \sum_{j=0}^{(\Delta-2)/2} |w_i(k-j)| \quad (8)$$

e

$$P_i(k) = \sum_{j=\Delta/2}^{\Delta-1} |w_i(k-j)| \quad (9)$$

onde Δ define o número de amostras de $w_i(k)$ usadas para estimar a taxa de variação da magnitude do i -ésimo coeficiente, enquanto $P_i(k)$ e $Q_i(k)$ denotam a somatória das magnitudes dos coeficientes $w_i(k)$ na primeira e segunda metade do intervalo Δ , respectivamente. As estimativas da taxa de variação são computadas por (7)-(9) somente a cada Δ iterações e após um período de aprendizagem de N amostras.

A partir da estimativa de proximidade do coeficiente em relação ao seu valor ótimo [dada por (7)-(9)], o ganho individual do i -ésimo coeficiente dado por (4) é revisado para

$$g_i(k) = \frac{\gamma_i(k)}{\sum_{j=1}^N \gamma_j(k)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (10)$$

com

$$\gamma_i(k) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & V_i(k) \leq \varepsilon \\ \lambda_i(k), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (11)$$

onde ε denota um parâmetro de limiar. Note que, quando todos os coeficientes atingirem a vizinhança de seus valores ótimos, a distribuição de ganho se torna uniforme, isto é, todos os coeficientes recebem o mesmo ganho $1/N$ e o algoritmo NSVR-IAF-PNLMS se comporta como o algoritmo NLMS.

III. MODELO ESTOCÁSTICO PROPOSTO

Esta seção apresenta o modelo estocástico proposto para o algoritmo NSVR-IAF-PNLMS. Para derivar as expressões de modelo, algumas hipóteses simplificativas são inicialmente estabelecidas.

- H1) O sinal de entrada é obtido a partir de um processo gaussiano estacionário de média zero, variância σ_x^2 e matriz de autocorrelação $\mathbf{R} = [\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)]$ [1].
- H2) O parâmetro $\xi > 0$ é uma constante de valor muito pequeno quando comparada com $E[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k)]$, não afetando o comportamento médio do algoritmo [16].
- H3) O ruído de medição $v(k)$ é não correlacionado e independente de qualquer outro sinal presente no sistema, tendo média zero e variância σ_v^2 [1].

- H4) O vetor de entrada $\mathbf{x}(k)$ e o vetor de coeficientes $\mathbf{w}(k)$ são assumidos estatisticamente independentes [1].
 H5) A matriz $\mathbf{G}(k)$ e o vetor $\mathbf{x}(k)$ são também assumidos estatisticamente independentes [17], [18].
 H6) Para N grande, $g_i(k)$ é considerado fracamente correlacionado com $[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k)]^{-1}$ [17]-[19].

A. Comportamento Médio do Vetor de Coeficientes

Uma expressão de modelo caracterizando o comportamento médio dos coeficientes do algoritmo NSVR-IAF-PNLMS pode ser obtida substituindo (2) em (1), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e considerando as Hipóteses H2)-H6) [17]. Assim,

$$E[\mathbf{w}(k+1)] \cong [\mathbf{I} - \beta \mathbf{R}_1(k)]E[\mathbf{w}(k)] + \beta \mathbf{R}_1(k)\mathbf{w}^0 \quad (12)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade, $\bar{\mathbf{G}}(k)$, o valor esperado da matriz de distribuição de ganho e

$$\mathbf{R}_1(k) \cong E\left[\frac{\bar{\mathbf{G}}(k)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)}{\mathbf{x}^T(k)\bar{\mathbf{G}}(k)\mathbf{x}(k)}\right]. \quad (13)$$

Portanto, levando em conta a solução analítica apresentada em [18] para computar $\mathbf{R}_1(k)$, o comportamento médio do vetor de coeficientes do algoritmo NSVR-IAF-PNLMS pode ser predito através de (12) se o comportamento médio da matriz de distribuição de ganho $\bar{\mathbf{G}}(k)$ for conhecido.

B. Comportamento Médio da Matriz de Ganho

O comportamento médio da matriz de distribuição de ganho $\bar{\mathbf{G}}(k)$ é obtido tomando o valor esperado de ambos os lados de (4). Então, considerando a Hipótese H6) e assumindo que $E[|w(k)|] \cong |E[w(k)]|$, $\bar{\mathbf{G}}(k)$ pode ser computada como

$$\bar{\mathbf{G}}(k) = \text{diag}[\bar{g}_1(k) \ \bar{g}_2(k) \ \bar{g}_3(k) \ \dots \ \bar{g}_N(k)] \quad (14)$$

sendo o ganho individual médio dado por

$$\bar{g}_i(k) \cong \frac{E[\gamma_i(k)]}{\sum_{j=1}^N E[\gamma_j(k)]} \quad (15)$$

com

$$E[\gamma_i(k)] \cong \begin{cases} \frac{1}{N}, & E[V_i(k)] \leq \varepsilon \\ E[\lambda_i(k)], & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (16)$$

onde

$$E[\lambda_i(k)] \cong \max\{E[f_i(k)], |E[w_i(k)]|\} \quad (17)$$

e

$$E[f_i(k)] \cong \begin{cases} \frac{1}{2}|E[w_i(k)]| + \frac{1}{2}E[\lambda_i(k-1)], & k = mN, \ m = 1, 2, 3, \dots \\ E[f_i(k-1)], & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (18)$$

Portanto, a evolução da matriz de distribuição de ganho médio é completamente caracterizada se o comportamento médio da métrica NSVR $E[V_i(k)]$ for conhecido.

C. Comportamento Médio da Métrica NSVR

Visto que a NSVR tem um papel fundamental na política de ganho [veja (16)], uma expressão para caracterizar a evolução de $E[V_i(k)]$ para coeficientes ativos é aqui obtida. Então, tomando o valor esperado de ambos os lados de (7), tem-se

$$E[V_i(k)] = \begin{cases} E\left[\frac{|Q_i(k) - P_i(k)|}{\min[Q_i(k), P_i(k)]}\right], & k = m\Delta, \ m = 1, 2, 3, \dots \\ E[V_i(k-1)], & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (19)$$

Agora, assumindo que o numerador varia lentamente com respeito ao denominador [19], (19) pode ser aproximada por

$$E\left[\frac{|Q_i(k) - P_i(k)|}{\min[Q_i(k), P_i(k)]}\right] \cong \frac{E[|Q_i(k) - P_i(k)|]}{E\{\min[Q_i(k), P_i(k)]\}}. \quad (20)$$

Adicionalmente, considerando que os coeficientes mantêm o mesmo sinal durante sua evolução, implicando também que $Q_i(k)$ e $P_i(k)$ sejam de mesmo sinal, aproxima-se (20) como

$$E\left[\frac{|Q_i(k) - P_i(k)|}{\min[Q_i(k), P_i(k)]}\right] \cong \frac{|E[Q_i(k)] - E[P_i(k)]|}{\min\{E[Q_i(k)], E[P_i(k)]\}}. \quad (21)$$

Por fim, o comportamento médio da NSVR do i -ésimo coeficiente pode ser descrito como

$$E[V_i(k)] \cong \begin{cases} \frac{|E[Q_i(k)] - E[P_i(k)]|}{\min\{E[Q_i(k)], E[P_i(k)]\}}, & k = m\Delta, \ m = 1, 2, 3, \dots \\ E[V_i(k-1)], & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (22)$$

com

$$E[Q_i(k)] \cong \sum_{j=0}^{(\Delta-2)/2} |E[w_i(k-j)]| \quad (23)$$

e

$$E[P_i(k)] \cong \sum_{j=\Delta/2}^{\Delta-1} |E[w_i(k-j)]|. \quad (24)$$

Note que (23) e (24) são obtidas tomando o valor esperado de ambos os lados de (8) e (9), respectivamente.

D. Curva de Aprendizagem

Definindo o vetor de erro nos coeficientes

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{w}(k) - \mathbf{w}^0 \quad (25)$$

o sinal de erro (2) pode ser reescrito como

$$e(k) = -\mathbf{z}(k)^T \mathbf{x}(k) + v(k). \quad (26)$$

Então, determinando $e^2(k)$, tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e considerando as Hipóteses H3) e H4), obtém-se [1]

$$J(k) = E[e^2(k)] = J_{\min} + J_{\text{ex}}(k) \quad (27)$$

onde

$$J_{\min} = \sigma_v^2 \quad (28)$$

denota o EQM mínimo atingível em regime permanente e

$$J_{\text{ex}}(k) = \text{tr}[\mathbf{R}\mathbf{K}(k)] \quad (29)$$

o EQM em excesso. Note em (29) que a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes é dada por

$$\mathbf{K}(k) = E[\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^T(k)]. \quad (30)$$

Portanto, a curva de aprendizagem do algoritmo pode ser predita através de (27)-(29) se a evolução da matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes $\mathbf{K}(k)$ for conhecida.

E. Matriz de Correlação do Vetor de Erro nos Coeficientes

Uma expressão recursiva para $\mathbf{K}(k)$ pode ser obtida reescrevendo (1) em função do vetor de erro nos coeficientes $\mathbf{z}(k)$ [definido em (25)], substituindo (26) na expressão resultante, determinando o produto $\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^T(k)$, tomando o valor esperado de ambos os lados e considerando (13), (14), (28), bem como as Hipóteses H2)-H6) [18]. Dessa forma,

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}(k+1) \\ &= \mathbf{K}(k) - \beta \mathbf{K}(k) \mathbf{R}_1^T(k) - \beta \mathbf{R}_1(k) \mathbf{K}(k) + \beta^2 J_{\min} \mathbf{R}_2(k) + \beta^2 \mathbf{R}_3(k) \end{aligned} \quad (31)$$

com

$$\mathbf{R}_2(k) \cong \mathbb{E} \left[\frac{\bar{\mathbf{G}}(k) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \bar{\mathbf{G}}(k)}{[\mathbf{x}^T(k) \bar{\mathbf{G}}(k) \mathbf{x}(k)]^2} \right] \quad (32)$$

e

$$\mathbf{R}_3(k) \cong \mathbb{E} \left[\frac{\bar{\mathbf{G}}(k) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{K}(k) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \bar{\mathbf{G}}(k)}{[\mathbf{x}^T(k) \bar{\mathbf{G}}(k) \mathbf{x}(k)]^2} \right]. \quad (33)$$

Portanto, levando em conta as soluções apresentadas em [18] para computar $\mathbf{R}_2(k)$ e $\mathbf{R}_3(k)$, a evolução da matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes pode agora ser predita recursivamente [a partir de (31)]; como consequência, torna-se possível prever também a curva de aprendizagem do algoritmo [através de (27)].

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, visando verificar a precisão do modelo proposto, dois exemplos são apresentados considerando um problema de identificação de sistema. Em tais exemplos, o comportamento médio predito a partir do modelo é comparado com os resultados obtidos via simulações de MC (200 realizações independentes). O sinal de entrada [veja a Hipótese H1)] é obtido através de um processo autorregressivo de segunda ordem AR(2) [1], dado por

$$x(k) = 0,75x(k-1) - 0,75x(k-2) + \eta(k) \quad (34)$$

onde $\eta(n)$ caracteriza um ruído branco cuja variância é ajustada de tal modo que $\sigma_x^2 = 1$; logo, a dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é $\chi = 120,25$.

Nas simulações, as plantas consideradas são obtidas a partir dos modelos de caminho de eco da Recomendação G.168 do ITU-T [20], tendo ambas $N = 128$ coeficientes; particularmente, a planta \mathbf{w}_A^0 é obtida a partir de [20, Modelo 1], enquanto a planta \mathbf{w}_B^0 de [20, Modelo 4]. Aqui, o grau de esparsidade da planta é medido através de [12]

$$S(\mathbf{w}^0) = \frac{N}{N - \sqrt{N}} \left(1 - \frac{\|\mathbf{w}^0\|_1}{\sqrt{N} \|\mathbf{w}^0\|_2} \right) \quad (35)$$

onde $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ representam a norma 1 e 2 de um vetor, respectivamente. Dessa forma, verifica-se [a partir de (35)] que as plantas \mathbf{w}_A^0 e \mathbf{w}_B^0 apresentam graus de esparsidade de $S(\mathbf{w}_A^0) = 0,78$ e $S(\mathbf{w}_B^0) = 0,42$, respectivamente.

Em todos os exemplos apresentados, os valores dos parâmetros do algoritmo NSVR-IAF-PNLMS são $\beta = 0,01$, $f_i(0) = \lambda_i(0) = 10^{-4}$ e $\xi = 10^{-6}$ [veja (1) e (5)]; em relação à métrica NSVR, considera-se valores típicos como $\Delta = N$ e $\varepsilon = 10^{-2}$ para os parâmetros requeridos em (7)-(10). Ainda, para estabilizar a solução das matrizes de autocorrelação $\mathbf{R}_1(k)$, $\mathbf{R}_2(k)$ e $\mathbf{R}_3(k)$ [definidas em (13), (32) e (33)], assume-se que o limiar de descarte de autovalores não significativos é igual a 5×10^{-4} (para detalhes, veja [18]).

A. Exemplo 1

Aqui, busca-se avaliar a precisão das expressões de modelo caracterizando o comportamento médio do vetor de coeficientes (12), a métrica NSVR (22) para coeficientes ativos e a curva de aprendizagem (27), como também (indiretamente) as demais expressões envolvidas. Para tal, considera-se a planta \mathbf{w}_A^0 [$S(\mathbf{w}_A^0) = 0,78$] e uma razão sinal-ruído $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$ ².

Para o cenário de operação considerado, as Figs. 1 e 2 apresentam os resultados obtidos por simulações de MC juntamente com aqueles preditos através do modelo proposto. Especificamente, a Fig. 1(a) ilustra o comportamento médio de quatro coeficientes do filtro adaptativo, enquanto a Fig. 1(b) apresenta a curva de aprendizagem do algoritmo. Por sua vez, a Fig. 2 mostra a evolução da métrica NSVR para dois coeficientes ativos. Em tais figuras, verifica-se um casamento satisfatório entre os resultados de simulação de MC e aqueles preditos através do modelo proposto (especialmente em regime permanente). Vale salientar que o descasamento observado na fase transitória é decorrente das hipóteses simplificativas usadas durante o desenvolvimento do modelo.

B. Exemplo 2

Agora, este exemplo visa verificar a precisão do modelo proposto (via curva de aprendizagem) para plantas com diferentes esparsidades e dois valores de SNR distintos. Para tal, as plantas \mathbf{w}_A^0 [$S(\mathbf{w}_A^0) = 0,78$] e \mathbf{w}_B^0 [$S(\mathbf{w}_B^0) = 0,42$] são utilizadas. Também, considera-se aqui dois valores de variância para o ruído de medição, isto é, $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$ e 30 dB .

A Fig. 3 apresenta os resultados obtidos por simulações de MC e através das expressões de modelo para o cenário de operação considerado. A partir dessa figura, observa-se que o modelo é capaz de prever satisfatoriamente o comportamento do algoritmo tanto na fase transitória quanto em regime permanente, independentemente do grau de esparsidade da planta e do valor de SNR considerado.

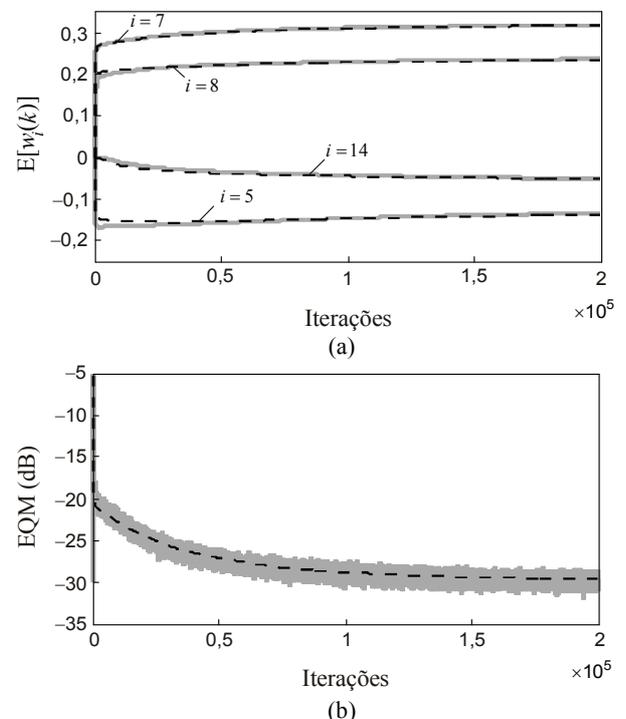


Fig. 1. Exemplo 1. Comportamento do algoritmo obtido por simulações de MC (linhas irregulares cinza) e predito através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Evolução dos coeficientes. (b) Curva de aprendizagem.

² Vale ressaltar que a razão sinal-ruído (SNR) é definida aqui como $\text{SNR} = 10 \log_{10}(\sigma_x^2 / \sigma_v^2)$, onde σ_x^2 e σ_v^2 denotam a variância do sinal de entrada e do ruído de medição, respectivamente.

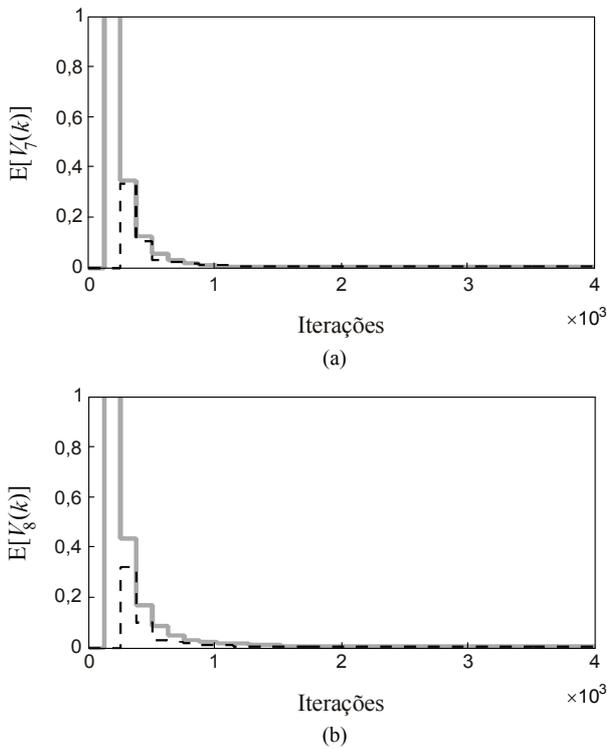


Fig. 2. Exemplo 1. Evolução da métrica NSVR para coeficientes ativos obtida por simulações de MC (linhas irregulares cinza) e predita através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Coeficiente $w_7(k)$. (b) Coeficiente $w_8(k)$.

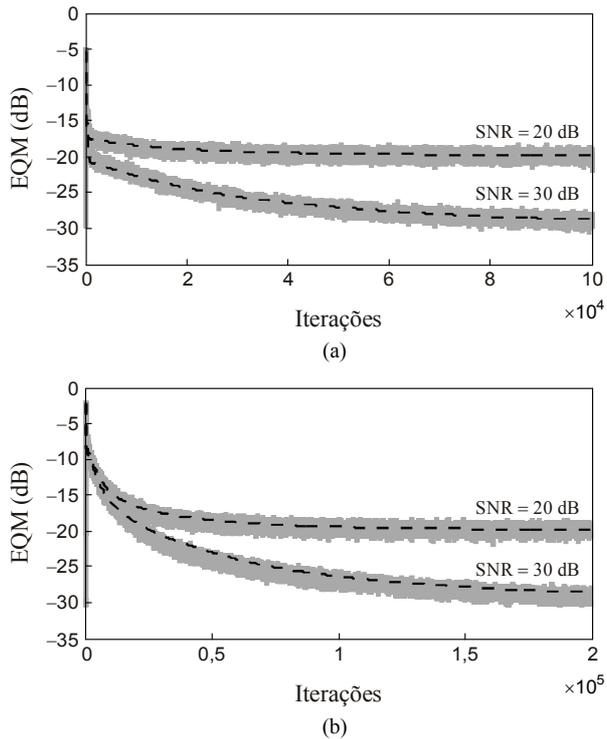


Fig. 3. Exemplo 2. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas por simulações de MC (linhas irregulares cinza) e preditas através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Planta w_A^o [$S(w_A^o) = 0,78$]. (b) Planta w_B^o [$S(w_B^o) = 0,42$].

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, um modelo estocástico para o algoritmo NSVR-IAF-PNLMS foi derivado, considerando sinais de entrada gaussianos reais. Especificamente, foram obtidas expressões de modelo caracterizando o comportamento médio do vetor de coeficientes, da matriz de distribuição de ganho e

da métrica NSVR, bem como a curva de aprendizagem do algoritmo e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes. Na derivação do modelo, foi assumido que a matriz de distribuição de ganhos é variante no tempo, resultando assim em uma precisão muito boa do modelo proposto. Resultados de simulação ratificaram a eficácia do modelo para diferentes cenários de operação.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [2] R. K. Martin, W. A. Sethares, R. C. Williamson, and C. R. Johnson, Jr., "Exploiting sparsity in adaptive filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 8, pp. 1883-1894, Aug. 2002.
- [3] Y. Huang, J. Benesty, and J. Chen, *Acoustic MIMO Signal Processing*. Secaucus, NJ: Springer-Verlag, 2006.
- [4] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochina, *Sparse Adaptive Filters for Echo Cancellation*. San Rafael, CA: Morgan and Claypool, 2010.
- [5] D. L. Duttweiler, "Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers," *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 8, no. 5, pp. 508-518, Sept. 2000.
- [6] J. Benesty and S. L. Gay, "An improved PNLMS algorithm," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Orlando, FL, May 2002, vol. 2, pp. 1881-1884.
- [7] P. A. Naylor, J. Cui, and M. Brookes, "Adaptive algorithms for sparse echo cancellation," *Signal Process.*, vol. 86, no. 6, pp. 1182-1192, Jun. 2006.
- [8] H. Deng and M. Doroslovacki, "Proportionate adaptive algorithms for network echo cancellation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 5, pp. 1794-1803, May 2006.
- [9] P. Loganathan, A. W. H. Khong, and P. A. Naylor, "A sparseness-controlled proportionate algorithm for acoustic echo cancellation," in *Proc. Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Lausanne, Switzerland, Aug. 2008, pp. 1-5.
- [10] K. T. Wagner and M. I. Doroslovacki, "Gain allocation in proportionate-type NLMS algorithms for fast decay of output error at all times," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Taipei, Taiwan, April 2009, pp. 3117-3120.
- [11] F. das C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "A PNLMS algorithm with individual activation factors," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 4, pp. 2036-2047, Apr. 2010.
- [12] K. T. Wagner and M. Doroslovacki, "Proportionate-type normalized least mean square algorithms with gain allocation motivated by mean-square-error minimization for white input," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 59, no. 5, pp. 2410-2415, May 2011.
- [13] F. das C. de Souza, R. Seara, and D. R. Morgan, "An enhanced IAF-PNLMS adaptive algorithm for sparse impulse response identification," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 6, pp. 3301-3307, Jun. 2012.
- [14] F. L. Perez, E. V. Kuhn, F. C. Souza, and R. Seara, "A novel gain distribution policy based on individual-coefficient convergence for PNLMS-type algorithms," *Signal Process.*, vol. 138, pp. 294-306, Sep. 2017.
- [15] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "On the constrained stochastic gradient algorithm: model, performance, and improved version," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 4, pp. 1304-1315, Apr. 2009.
- [16] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, "Stochastic modeling of the transform-domain ϵ LMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1840-1852, May 2008.
- [17] F. das C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "Stochastic model for the mean weight evolution of the IAF-PNLMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 11, pp. 5895-5901, Nov. 2010.
- [18] E. V. Kuhn, F. das C. de Souza, R. Seara, and D. R. Morgan, "On the stochastic modeling of the IAF-PNLMS algorithm for complex and real correlated Gaussian input data," *Signal Process.*, vol. 99, pp. 103-115, Jun. 2014.
- [19] C. Samson and V. Reddy, "Fixed point error analysis of the normalized ladder algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 31, no. 5, pp. 1177-1191, Oct. 1983.
- [20] ITU-T Recommendation G.168, *Digital Network Echo Cancellers*, Geneva, Switzerland: *Int. Telecomm. Union*, 2007.