

# Método de Mínimos Quadrados Subamostrado para Estimação de Qualidade de Energia

Felipe V. D. Prado e Phillip M. S. Burt

**Resumo**—Propomos um método baseado em Mínimos Quadrados subamostrados para a estimação de parâmetros de espectros discretos compostos por harmônicas de uma frequência fundamental, mais particularmente para o uso em medidores de qualidade de energia elétrica. A evolução das *smart grids* trouxe a necessidade do uso simultâneo de um maior número de tais medidores, gerando interesse na sua simplificação e barateamento. Para tanto, uma arquitetura empregada tem sido a de realizar a extração dos indicadores de qualidade de energia de forma centralizada, a partir dos dados enviados por sensores que apenas realizam a amostragem da rede elétrica. Visando reduzir o volume de dados enviados por estes sensores, obtemos uma condição para a ortogonalidade (e conseqüente optimalidade) do modelo de sinal sem a exigência usual de atendimento do critério de Nyquist de amostragem. Com isso, uma frequência de amostragem de apenas 16 % da frequência de Nyquist é viabilizada. Em seguida, obtemos para aquela condição um limite superior da probabilidade de não atendimento das normas que regem a medição de qualidade de energia. O desempenho do método proposto é também verificado por meio de simulações, considerando diferentes frequências de amostragem e relações sinal/ruído, relacionando-as com números de bits padrão de ADCs. Por fim analisamos o efeito do desvio da frequência fundamental sobre o desempenho deste método.

**Palavras-Chave**—Estimação Espectral, Qualidade de Energia

**Abstract**—A method based on undersampled Least Squares is proposed for the estimation of discrete spectra composed by harmonics of a single fundamental frequency, particularly applied to energy quality meters. The evolution of smart grids brought with it the need for a greater quantity of these meters, leading to an interest in their simplification and cheapening. For such, an architecture based on the extraction of energy quality indicators in a centralized manner is being applied, using sensors that only sample the raw data from the power line. Aiming towards reducing the data transactioned by these sensors, we obtain a condition for the orthogonality (and consequent optimality) of the signal model without the usual requirement of satisfying the Nyquist sampling criterion. With this, employing a sampling frequency of only 16% of the Nyquist sampling frequency is made possible. Next, we obtain for that condition an upper limit for the probability of not satisfying the norms that govern energy quality metering. The performance of the proposed method is also verified through simulations, using different sampling rates and signal to noise ratios, relating them to bit depths of standard ADCs. Finally, the impact of frequency deviation of the fundamental frequency is evaluated.

**Keywords**—Spectral Estimation, Power Quality

Felipe V. D. Prado, Mestrando em Engenharia Elétrica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), São Paulo - SP, e-mail: felipedelloso@gmail.com; Phillip M. S. Burt, Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, EPUSP, São Paulo - SP, e-mail: pms-burt@usp.br. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

## I. INTRODUÇÃO

A estimação de espectros discretos (ou seja, espectros de sinais compostos de um número finito de senoides) é central para a estimação de qualidade de energia [1]–[3], sendo a base para estimar diversas variáveis de interesse nesta área, como elevações e afundamentos de tensão, sincronia entre fases e distorção harmônica. O procedimento convencional de estimação espectral para fins de qualidade de energia baseia-se em aplicar a transformada de Fourier discreta (TFD) em uma janela de sinal contendo um número inteiro de períodos da frequência fundamental da rede (para o que é necessária alguma etapa anterior de sincronização) e com amostras obtidas respeitando o critério de Nyquist [2]. É bem sabido que nestas condições e com ruído de medida gaussiano e branco, atinge-se o limite inferior de Cramer-Rao para a variância da estimativa dos coeficientes espectrais na forma retangular, assim como o menor condicionamento possível (unitário, portanto) da matriz de covariância da estimação [4, p.90].

Com a transformação em curso no *grid* de fornecimento de energia elétrica, um número crescente de pequenos fornecedores de energia está operando, exigindo a medição de qualidade em um número também crescente de pontos. Isso tem motivado o desenvolvimento de sensores de qualidade de energia simples e baratos e que, possivelmente, apenas recolham dados e os transmitam para um local de processamento centralizado [5]–[8]. Isto permite, por exemplo, que quando a medição é feita sob demanda, a capacidade de processamento seja escalada horizontalmente na nuvem, reduzindo assim o custo associado à fabricação dos sensores. Em particular, visando reduzir a frequência de amostragem média do sinal da rede elétrica (e com isso reduzir a taxa de transmissão de dados necessária), foi proposto neste contexto o uso de *Compressive Sensing* [5], [9], [10], técnica que tipicamente leva a um espaçamento não-uniforme entre amostras.

Neste trabalho, visando o mesmo objetivo de reduzir a frequência de amostragem em sensores usados para medição de qualidade de energia, propomos o uso do recurso conceitualmente mais simples de subamostragem com período constante. Especificamente, determinamos uma condição a ser satisfeita pela frequência de amostragem para que a estimação dos coeficientes espectrais por mínimos quadrados tenha, dado o número de amostras, as mesmas características de optimalidade da TFD apontadas acima. Mostramos em seguida que mesmo com frequências de amostragem bem inferiores à frequência de Nyquist é viável atender os requisitos de desempenho normalizados em [2].

## II. ESTIMAÇÃO DE HARMÔNICAS DA REDE POR TFD

Reveremos aqui conceitos de interesse para a estimação das harmônicas da rede elétrica.

### A. Modelo linear de sinal, mínimos quadrados

Seja  $\alpha$  um vetor de  $P$  parâmetros a ser estimado a partir de um vetor  $\mathbf{x}$  de  $N \geq P$  elementos produzido por

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\alpha + \mathbf{w}, \quad (1)$$

onde  $\mathbf{H}$  tem posto completo de colunas e  $\mathbf{w}$  é um vetor de ruído de medida de média nula. O erro de uma estimativa  $\hat{\alpha}$  é  $\epsilon = \alpha - \hat{\alpha}$  e a estimativa que minimiza o erro quadrático  $\|\epsilon\|^2 = \epsilon^T \epsilon$  é dada por

$$\hat{\alpha} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{x}, \quad (2)$$

onde  $\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$  é a pseudo-inversa de  $\mathbf{H}$ . Segue diretamente que

$$\hat{\alpha} = \alpha + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{w}$$

e, portanto,  $\hat{\alpha}$  não tem viés, isto é,  $E[\hat{\alpha}] = \alpha$ . Além disso, se  $\mathbf{w}$  tem matriz de covariância

$$\mathbf{C}_w = E[\mathbf{w}\mathbf{w}^T] = \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (3)$$

segue também diretamente que a matriz de covariância do erro

$$\epsilon = \alpha - \hat{\alpha} = -(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{w} \quad (4)$$

é

$$\mathbf{C}_\epsilon = \sigma^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}. \quad (5)$$

Neste caso, se  $\epsilon$  é gaussiano então a estimativa  $\hat{\alpha}$  atinge o limite inferior de estimação de Cramer-Rao [4, p. 86], sendo ótima para um dado  $N$ .

### B. Estimação por TFD

Seja  $f_0$  a frequência fundamental da rede elétrica e consideremos que em uma janela de  $L$  períodos desta fundamental são tomadas  $N$  amostras  $x(n)$  do sinal da rede, correspondendo portanto a uma frequência de amostragem

$$f_a = \frac{N}{L} f_0. \quad (6)$$

Se há  $M$  harmônicas presentes e  $ML < N/2$ , o critério de Nyquist é respeitado pois  $Mf_0 < Nf_0/2L = f_a/2$ . Temos então

$$x(n) = \sum_{k=1}^M a_k \cos\left(\frac{2\pi L}{N} kn\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi L}{N} kn\right) + w(n), \quad (7)$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$ , onde consideramos  $w(n)$  gaussiano branco de média nula e variância  $\sigma^2$ . Os termos de (1) são dados então por

$\mathbf{H} = [\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_M \ \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_M]$  e  $\alpha = [a_1 \dots a_M \ b_1 \dots b_M]^T$ , com

$$\mathbf{c}_k = \left[ \cos\left(\frac{2\pi L}{N} k0\right) \dots \cos\left(\frac{2\pi L}{N} k(N-1)\right) \right]^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{s}_k = \left[ \sin\left(\frac{2\pi L}{N} k0\right) \dots \sin\left(\frac{2\pi L}{N} k(N-1)\right) \right]^T. \quad (9)$$

Da ortogonalidade dos termos harmônicos acima, segue neste caso em que o critério de Nyquist é respeitado [4, p. 89] que

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \frac{N}{2} \mathbf{I}, \quad (10)$$

o que substituído em (2) leva a  $\hat{\alpha} = \frac{2}{N} \mathbf{H}^T \mathbf{x}$ . Ou seja, os elementos de  $\hat{\alpha}$  são

$$\hat{a}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi L}{N} kn\right),$$

$$\hat{b}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left(\frac{2\pi L}{N} kn\right),$$

correspondendo aos coeficientes da forma retangular da TFD de  $x(n)$  escalonados, relacionados com os coeficientes da forma polar  $X(k)$  segundo

$$\hat{a}_k = \frac{2}{N} \text{Re}[X(kL)], \quad \hat{b}_k = -\frac{2}{N} \text{Im}[X(kL)].$$

Inserindo (10) em (5) resulta ainda que  $\mathbf{C}_\epsilon = \frac{2}{N} \sigma^2 \mathbf{I}$ , ou seja, a matriz de covariância tem condicionamento mínimo, isto é, unitário. Isto tem importância prática em situações em que há alguma liberdade na escolha de  $\mathbf{H}$ , como o caso tratado na seção seguinte: fixado o maior valor singular de  $\mathbf{H}$ , tal condicionamento mínimo está associado à menor amplificação do ruído  $\mathbf{w}$ .

## III. MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS SUBAMOSTRADO COM MÍNIMO CONDICIONAMENTO

Consideremos agora que, no contexto da seção anterior, o critério de Nyquist  $ML < N/2$  não é necessariamente respeitado, apenas valendo

$$M < \frac{N}{2}. \quad (11)$$

### A. Condição de ortogonalidade

Com (8) e a identidade  $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2} \cos(x+y) + \frac{1}{2} \cos(x-y)$ , o produto interno de colunas  $\mathbf{c}_i$  e  $\mathbf{c}_k$  de  $\mathbf{H}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_k = \frac{1}{2} S[(i+k)L] + \frac{1}{2} S[(i-k)L], \quad (12)$$

onde, com  $m \in \mathbb{Z}$ , temos<sup>1</sup>

$$S(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi m}{N} n\right) = \begin{cases} N, & \frac{m}{N} \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \frac{m}{N} \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (13)$$

Agora, como  $i, k \leq M < N/2$  resulta que os termos  $i+k$  e  $i-k$  não podem conter todos os fatores primos de  $N$ , pois  $(i+k) < N$  e  $-M < (i-k) < M < N$ . Portanto, se forem escolhidos

$$N \text{ e } L \text{ mutuamente primos} \quad (14)$$

<sup>1</sup>Obtido aplicando a fórmula da soma de PG:  $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi m}{N} n} = (1 - e^{j \frac{2\pi m}{N} N}) / (1 - e^{j \frac{2\pi m}{N}}) = 0 / (1 - e^{j \frac{2\pi m}{N}})$ ,  $m/N \notin \mathbb{Z}$

$(i+k)L$  e  $(i-k)L$  também não podem conter todos os fatores primos de  $N$ , ou seja,

$$\frac{(i+k)L}{N} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{(i-k)L}{N} \notin \mathbb{Z} \quad (i \neq k). \quad (15)$$

Usando isso em (12) e (13), resulta que  $\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_k = N/2$  se  $i = k$  e  $\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_k = 0$  caso contrário. Procedendo de forma similar, obtém-se o mesmo resultado para  $\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_k$  e  $\mathbf{c}_i^T \mathbf{s}_k = 0$ . Ou seja, mesmo neste caso subamostrado a matriz  $\mathbf{H}$  satisfaz (10). Portanto, o resultado visto na seção anterior para a matriz de covariância do erro de estimação dos coeficientes espectrais retangulares  $a_k$  e  $b_k$  continua válido:

$$\mathbf{C}_\epsilon = \frac{2}{N} \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (16)$$

Finalmente, vale notar que o atendimento do critério de Nyquist é um caso particular da análise acima, em que  $ML < N/2$  já garante (15), sem exigir  $N$  e  $L$  mutuamente primos.

### B. Probabilidade de erro

Como indicado por (16), com  $M < N/2$  e com  $N$  e  $L$  mutuamente primos, o desempenho da estimação dos coeficientes dependerá apenas da relação  $\sigma^2/N$ , lembrando que  $N$  é o número de amostras tomadas em uma janela de  $L$  períodos da frequência da rede. É necessário porém relacionar a estimação dos coeficientes espectrais retangulares  $a_k$  e  $b_k$  a que se refere (16) com a estimação dos valores eficazes dos componentes espectrais, a que se refere a norma [2].

Com  $\boldsymbol{\theta}_k \triangleq [a_k \ b_k]^T$ , tais valores eficazes são dados por  $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}/\sqrt{2} = \|\boldsymbol{\theta}_k\|/\sqrt{2}$  e estamos interessados na probabilidade  $P_k$  de que o erro na sua estimação ultrapasse uma certa fração  $p$  da tensão eficaz nominal  $U_{\text{nom}}$ , como estipulado em [2], isto é,

$$P_k = P\left(\left|\|\boldsymbol{\theta}_k\| - \|\hat{\boldsymbol{\theta}}_k\|\right|/\sqrt{2} > pU_{\text{nom}}\right).$$

Empregando a desigualdade triangular reversa

$$\left|\|\boldsymbol{\theta}_k\| - \|\hat{\boldsymbol{\theta}}_k\|\right| \leq \|\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k\|$$

e com  $\|\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k\| = \sqrt{u_k^2 + v_k^2}$ , onde

$$u_k = a_k - \hat{a}_k, \quad v_k = b_k - \hat{b}_k, \quad (17)$$

obtemos um limite superior para  $P_k$ ,

$$P_k \leq P(u_k^2 + v_k^2 > 2p^2 U_{\text{nom}}^2),$$

que será atingido quando  $\boldsymbol{\theta}_k$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  forem anti-colineares.

Agora, segue diretamente de (16) que

$$E[u_k^2] = E[v_k^2] = \frac{2}{N} \sigma^2 \quad (18)$$

e  $E[u_k v_k] = 0$ . Portanto, se  $u_k$  e  $v_k$  são gaussianos ( $u_k^2 + v_k^2$ )  $N/2\sigma^2$  é uma variável aleatória chi-quadrado com dois graus de liberdade, valendo então

$$P_k \leq P\left(\frac{(u_k^2 + v_k^2) \frac{N}{2\sigma^2}}{2p^2 U_{\text{nom}}^2 \frac{N}{\sigma^2}} > p^2 U_{\text{nom}}^2 \frac{N}{\sigma^2}\right) = e^{-\frac{p^2 U_{\text{nom}}^2 N}{2\sigma^2}}. \quad (19)$$

A probabilidade de que o erro de estimação seja maior do que o estipulado em alguma das  $M$  harmônicas satisfaz então

$$P_e = 1 - (1 - P_k)^M \leq 1 - \left(1 - e^{-\frac{p^2 N}{2} \text{SNR}}\right)^M, \quad (20)$$

onde definimos a relação sinal/ruído como  $\text{SNR} = U_{\text{nom}}^2/\sigma^2$ .

Classe	Grandeza	Condições	Erro Máximo
I	Tensão	$U_m \geq 1\% U_{\text{nom}}$	$\pm 5\% U_m$
		$U_m < 1\% U_{\text{nom}}$	$\pm 0,05\% U_{\text{nom}}$
I	Corrente	$I_m \geq 3\% I_{\text{nom}}$	$\pm 5\% I_m$
		$I_m < 3\% I_{\text{nom}}$	$\pm 0,15\% I_{\text{nom}}$
II	Tensão	$U_m \geq 3\% U_{\text{nom}}$	$\pm 5\% U_m$
		$U_m < 3\% U_{\text{nom}}$	$\pm 0,15\% U_{\text{nom}}$
II	Corrente	$I_m \geq 10\% I_{\text{nom}}$	$\pm 5\% I_m$
		$I_m < 10\% I_{\text{nom}}$	$\pm 0,5\% I_{\text{nom}}$

TABELA I

TOLERÂNCIAS DADAS PELA NORMA [2]

## IV. RESULTADOS

### A. Condições de teste

1) *Escolha dos parâmetros de amostragem:* Conforme especificado em [2], as medidas de qualidade devem ser fornecidas a cada 200 ms pelo equipamento de medida. Admitindo que as medidas são realizadas a cada  $L$  ciclos da fundamental de 60 Hz, resulta que devemos ter  $L \leq 12$ . Por sua vez, o número  $N$  de amostras utilizadas determina o desempenho da estimação para uma dada SNR, como dado por (20). Para exemplificar o compromisso entre a frequência de amostragem  $f_a$  dada por (6) e o desempenho, adotamos  $L = 11$  e  $N = 87$  ou  $N = 174$ , correspondendo a  $f_a = 474,54$  Hz ou  $f_a = 949,09$  Hz. Notamos que os valores adotados satisfazem a condição (14).

2) *Especificação testada:* A Tabela I traz as tolerâncias especificadas na norma [2] para medidas dos valores eficazes de tensão e corrente. Como pode ser visto, desde que acima de um certo limiar (1% de  $U_{\text{nom}}$ , adotando daqui por diante o caso de medidas de tensão na Classe I), quanto menor o valor medido  $U_m$ , menor o erro de medida absoluto admitido, dado por 5% de  $U_m$ . Abaixo daquele limiar, o erro admitido é fixo em 0,05% de  $U_{\text{nom}}$ . Portanto, este pior caso é o valor de erro admissível a utilizar para que a estimação satisfaça algum objetivo de desempenho para qualquer valor de  $U_m$ . Em (20) adotamos então  $p = 5 \times 10^{-4}$ .

3) *Modelo de ruído de quantização:* Admitimos, como usualmente feito, que o ruído de quantização é branco e tem distribuição uniforme entre  $-a/2$  e  $a/2$  para um passo de quantização  $a = V_{\text{max}}/2^{n-1}$ , onde  $V_{\text{max}}$  é o fundo de escala do A/D e  $n$  é o número de bits de quantização. Disto segue que a matriz de covariância do ruído de quantização é como dada por (3) com  $\sigma^2 = a^2/12$ . Portanto, a SNR em dB é

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{U_{\text{nom}}^2}{\sigma^2} = 4,77 - 20 \log(c) + 6,02n, \quad (21)$$

onde  $c = V_{\text{max}}/U_{\text{nom}}$ . A norma [2] especifica que o equipamento de medida deve funcionar normalmente para uma tensão 20 % maior que a nominal e para um fator de pico de 1,5. Tomamos então  $c = 1,2 \times 1,5 = 1,8$ .

Podemos admitir também que para os valores de  $N$  adotados (da ordem de  $10^2$ , como visto) a combinação das  $N$  variáveis aleatórias uniformes independentes de  $\mathbf{w}$  segundo (4) resulta, para fins práticos, em um vetor  $\boldsymbol{\epsilon}$  gaussiano. Portanto,  $u_k = \boldsymbol{\epsilon}_k$  e  $v_k = \boldsymbol{\epsilon}_{k+M}$  em (17) também podem ser considerados gaussianos, como necessário para obter (19).

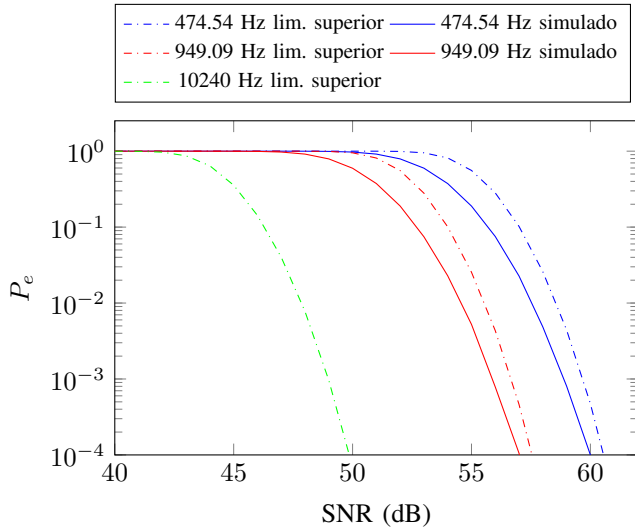


Fig. 1. Valores simulados e limites superiores da probabilidade de erro  $P_e$  para diferentes frequências de amostragem.

### B. Valores simulados e limites da probabilidade de erro

Blocos de  $N$  amostras foram gerados segundo (7), com número de harmônicas  $M = 25$ , potência de ruído  $\sigma^2 = U_{\text{nom}}^2/\text{SNR}$ ,  $a_k = A \cos \phi_k$  e  $b_k = A \sin \phi_k$ , sendo  $A = 0,01\sqrt{2}U_{\text{nom}}$ . Portanto, as harmônicas têm valores eficazes  $A/\sqrt{2} = 0,01U_{\text{nom}}$ , conforme discutido na Seção IV-A.2, e fase  $\phi_k$ , que fazemos uniformemente distribuída entre 0 e  $2\pi$ . Para cada valor de SNR são geradas  $2 \times 10^5$  realizações do ruído e das fases  $\phi_k$ . Com o número de realizações em que o erro de estimação do valor eficaz de alguma harmônica ultrapassa  $5 \times 10^{-4}U_{\text{nom}}$  (ver Seção IV-A.2) obtém-se então uma estimativa da probabilidade  $P_e$  de que a medida não tenha a precisão estipulada pela norma [2].

Na Fig. 1 temos os valores estimados de  $P_e$  para  $N = 87$  e  $N = 174$  (ver Seção IV-A.1), que satisfazem (11) e, segundo (6), correspondem a frequências de amostragem de 474,54 Hz e 949,09 Hz, respectivamente. O gráfico também traz os respectivos limites superiores para  $P_e$  dados por (20) e, para comparação, o limite superior para uma frequência de amostragem de 10240 Hz, utilizada em [5].

Admitindo que o ruído de medida é apenas ruído de quantização, com um número relativamente pequeno de apenas  $n = 10$  bits de resulta  $\text{SNR} = 59,9$  dB, conforme (21). Podemos ver que para a frequência de amostragem  $f_a = 474,54$ , que corresponde a apenas 16% da frequência de amostragem de Nyquist dada por  $2Mf_0 = 2 \times 25 \times 60 = 3000$  Hz, já obtém-se uma probabilidade de erro de apenas  $10^{-4}$ .

### C. Robustez a flutuações da frequência da rede

Dada a natureza distribuída da rede, a flutuação ao longo do tempo admitida para a frequência da rede é bastante reduzida, não devendo ultrapassar  $\pm 0,1$  Hz [11]. Conforme discutido na Introdução, consideramos que o processamento das amostras recolhidas por sensores simples é feito de forma centralizada. A flutuação da frequência da rede pode então ser rastreada na central de processamento através da iteração da estimativa de

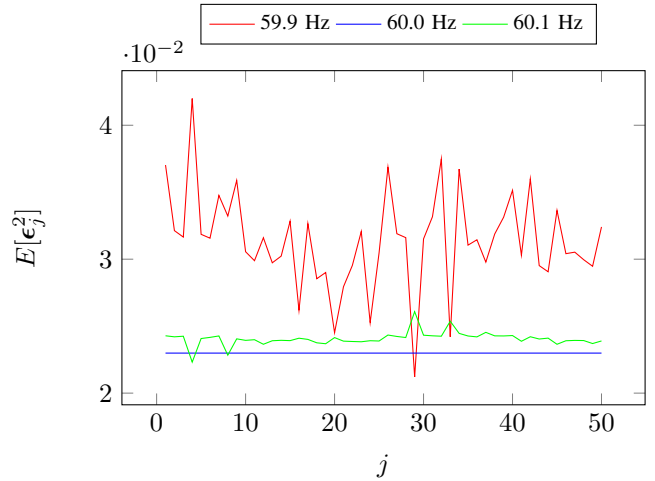


Fig. 2. Variância dos elementos do vetor de erro de estimação para diferentes valores da frequência da rede usada para gerar os vetores de amostras.

mínimos quadrados para um mesmo vetor  $\mathbf{x}$  recebido, visando  $\min_{f_0} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|$ , onde  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}(f_0)\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{H}(f_0)\mathbf{H}^\dagger(f_0)\mathbf{x}$ . Com isso, a central pode comandar a atualização da frequência de amostragem segundo (6), a ser usada no sensor remoto para obter vetores de amostras seguintes. Este procedimento será objeto de trabalho futuro.

De antemão, porém, avaliamos aqui a robustez do método de estimação proposto em relação a possíveis descompassos, em um ambiente não-estacionário, entre a frequência de amostragem utilizada para gerar um vetor  $\mathbf{x}$  e a frequência da rede inferida pela central de processamento a partir do mesmo vetor. No caso de tal descompasso, (10) e (16) não são mais válidos e as variâncias dos elementos  $\epsilon_k = u_k$  e  $\epsilon_{k+M} = v_k$  do vetor de erro de estimação não são dadas mais por (18).

Na Fig. 2 estão os valores de  $E[\epsilon_j^2]$  quando a frequência da rede é de 60 Hz mas o vetor de amostras foi gerado com uma frequência de amostragem calculada quando a frequência da rede estava em um dos extremos da faixa de  $\pm 0,1$  Hz admitida. Nesses casos a condição (14) não é atendida e os incrementos em  $E[\epsilon_j^2]$  resultantes levam a aumentos em  $P_e$ , como mostrado na Fig. 3. Porém, estes aumentos são ainda aceitáveis, com  $P_e$  passando de  $10^{-4}$  para  $10^{-3}$  no pior caso. Salientamos que se a atualização das frequências de amostragem for suficientemente rápida os extremos de  $\pm 0,1$  Hz não serão atingidos e a degradação de  $P_e$  será menor.

### D. Comparação com outros trabalhos

Comparamos aqui o desempenho do método proposto com o de trabalhos anteriores, em particular os que visam reduzir a frequência de amostragem média com o uso de *compressive sensing*. Como cada artigo utiliza métricas e condições de teste diferentes, normalizamos a frequência de amostragem obtida em relação à frequência de Nyquist necessária para as harmônicas que cada trabalho se habilitou a medir. Como visto na Seção IV-B, o método proposto aqui permite que com apenas 10 bits de quantização e na ausência de outras fontes de erro uma probabilidade de erro de  $10^{-4}$  seja alcançada com apenas 16% da frequência de Nyquist. Como visto a seguir,

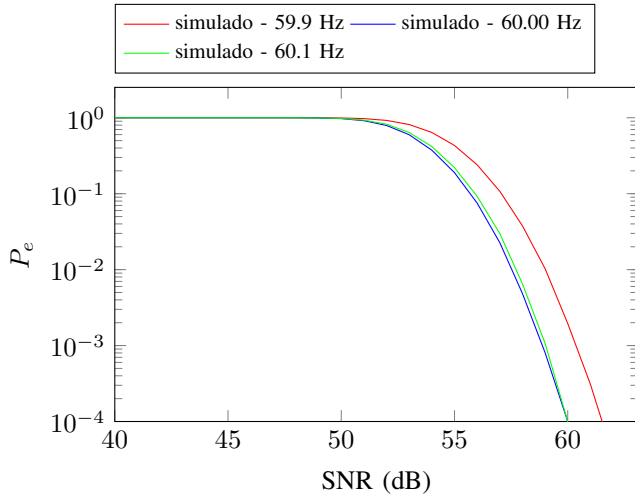


Fig. 3. Probabilidade de erro  $P_e$  para diferentes valores da frequência da rede usada para gerar os vetores de amostras,  $N = 87$  e  $L = 11$ .

este valor é menor do que o obtido nos outros trabalhos. Vale apontar também que mesmo se toda a estimação das harmônicas fosse feita em sensores mais complexos que os necessários no método aqui proposto, o envio dos valores eficazes de  $M$  harmônicas a cada 200 ms como estipulado em [2] ainda corresponderia a uma frequência de envio de 4,2% da frequência de Nyquist,  $2M \times 60$  Hz.

O trabalho mais similar ao feito aqui de que temos conhecimento é [5]. Como aqui, o número de harmônicas consideradas foi  $M = 25$  e foram admitidos 10 bits de quantização. Uma frequência de amostragem média de 35% da frequência de Nyquist foi usada para a precisão resultante atender os requisitos de [2]. Porém, diferentemente do que fizemos, não foi avaliada a probabilidade de erro e foi usado um sinal de teste que não corresponde ao pior caso para estimação, discutido na Seção IV-A.1.

Em [12], apesar do uso de *compressive sensing*, o objetivo que serve de motivação para esta técnica não foi alcançado. Para  $M = 7$  e harmônicas de 50 Hz com amplitude em torno de 10% da amplitude fundamental, foram necessárias 800 amostras em uma janela de 0,1 s, ou seja, uma frequência de amostragem média de 8 kHz, muito acima da frequência de Nyquist, que neste caso é  $2 \times 7 \times 50 = 700$  Hz.

Em [13], considerou-se a medida das harmônicas da corrente de uma carga não linear. Deve-se apontar que o caso em questão é mais favorável que o da medida de harmônicas da tensão, pois estas são tipicamente bem menores. Ainda assim, para  $M = 21$  foi necessária uma frequência de amostragem média de 1920 Hz (32 amostras por ciclo da fundamental de 60 Hz), o que corresponde a 76% da frequência de Nyquist, de  $2 \times 21 \times 60 = 2520$  Hz.

Por fim, em [10] usa-se uma taxa de amostragem média de 1500 Hz (150 amostras em 6 ciclos de 60 Hz) mas não se considera o erro de estimação de cada harmônica, apenas o erro de reconstrução do sinal total, que ficou em 0,75%. Dado que a fundamental na rede elétrica é tipicamente bem maior que as harmônicas, não é possível dizer nem mesmo se tal valor de erro de reconstrução aponta ou não para o

atendimento das especificações em [2].

## V. CONCLUSÃO

Apresentamos um método que fornece uma alternativa simples e eficiente para a redução do volume de amostras necessário para a medição de qualidade de energia. O método atende aos requisitos normativos de [2] e também permite relaxar os requisitos de *hardware*, dada a carga computacional reduzida dos sensores. De forma mais ampla, a ideia central apresentada de subamostragem de sinais harmônicos para estimação usando mínimos quadrados pode potencialmente ser expandida para outras aplicações com requisitos similares.

## REFERÊNCIAS

- [1] IEC61000-4-30 - *Electromagnetic compatibility (EMC) Part 4-30: Testing and measurements techniques – Power quality measurement methods*, 2011.
- [2] IEC61000-4-7 - *Electromagnetic compatibility (EMC) Part 4-7: Testing and measurements techniques – General guide on harmonics and interharmonics measurements and instrumentation, for power supply systems and equipment connected thereto*, 2009.
- [3] ABNT NBR IEC61000-4-30 - *Compatibilidade Eletromagnética Parte 4-30: Técnicas de medição e ensaio – Métodos de medição de qualidade da energia*.
- [4] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Theory: Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993.
- [5] F. Bonavolontà, M. D'Apuzzo, A. Liccardo, and G. Miele, "Harmonic and interharmonic measurements through a compressed sampling approach," *Measurement*, vol. 77, 08 2015.
- [6] G. Artale, A. Cataliotti, V. Cosentino, S. Guaiana, D. Di Cara, N. Panzavecchia, G. Tiné, N. Dipaola, and M. G. Sambataro, "Pq metrics implementation on low cost smart metering platforms. a case study analysis," in *2018 IEEE 9th International Workshop on Applied Measurements for Power Systems (AMPS)*, 2018, pp. 1–6.
- [7] E. Viciano, A. Alcayde, F. G. Montoya, R. Baños, F. Arrabal-Campos, and F. Manzano-Aguilero, "An open hardware design for internet of things power quality and energy saving solutions," *Sensors (Basel, Switzerland)*, vol. 19, 2019.
- [8] N. M. Rodrigues, F. M. Janeiro, and P. M. Ramos, "Low-cost embedded measurement system for power quality frequency monitoring," in *2020 IEEE 14th International Conference on Compatibility, Power Electronics and Power Engineering (CPE-POWERENG)*, vol. 1, 2020, pp. 236–239.
- [9] I. D. Irawati, S. Hadiyoso, and B. Gelar, "A novel approach: Effective compressive sensing in power network problem," *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2020.
- [10] H. Yu and H. Yu, "Power quality data processing method based on a distributed compressed sensing and learning dictionary," *The Journal of Engineering*, vol. 2020, 04 2020.
- [11] Anexo VIII da Resolução Normativa N° 956, de 7 de dezembro 2021 Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional – PRODIST Módulo 8 – Qualidade do Fornecimento de Energia Elétrica.
- [12] B. Palczynska, R. Masnicki, and J. Mindykowski, "Compressive sensing approach to harmonics detection in the ship electrical network," *MDPI Sensors*, 2020.
- [13] L. Amaya and E. Inga, "Compressive sensing technique for the localization of harmonic distortions in electrical power systems," *MDPI Sensors*, 2022.