

Sobre a Perturbação do Parâmetro κ de Rice

Alexander Bento Melo, Carlos Rafael Nogueira da Silva e Michel Daoud Yacoub

Resumo— Os parâmetros do canal de desvanecimento variam de acordo com o ambiente de propagação, fato conhecido e reportado na literatura. É evidente que essa variação impacta diretamente o desempenho do sistema. Em trabalho anterior, investigamos o efeito da variação estocástica do parâmetro de desbalanceamento η do modelo η - μ complexo Formato 2 para $\mu = 1/2$, i.e., Hoyt. Neste artigo, investigaremos o efeito da variação do parâmetro κ da distribuição de Rice, utilizando para tal a distribuição exponencial. Com essa hipótese, são deduzidas de forma exata as estatísticas de primeira ordem resultantes, quais sejam: (i) a função densidade de probabilidade (FDP) e a função distribuição acumulada (FDA) para a envoltória e a fase; (ii) os momentos generalizados da envoltória; e (iii) a figura de desvanecimento. Mostra-se que a variabilidade desse parâmetro, embora aparentemente pouco afetando as estatísticas de primeira ordem, tende, em média, a piorar as condições do canal, o que fica evidente com a figura de desvanecimento.

Palavras-Chave— Distribuição de Rice, quantidade de desvanecimento, distribuição de fase e envoltória.

Abstract— The fading channel parameters vary according to the propagation environment, a fact known and reported in the literature. It is evident that this variation directly impacts the performance of the system. Previously, we investigated the effect of the stochastic variation of the imbalance parameter η of the complex model η - μ Format 2 for $\mu = 1/2$, i.e., Hoyt. In this article, we will investigate the effect of varying the parameter κ of the Rice distribution, using the exponential distribution for that purpose. With this assumption, the resulting first-order statistics are accurately deduced, namely: (i) the probability density function (PDF) and the cumulative distribution function (CDF) for the envelope and phase; (ii) the generalized envelope moments. It is shown that the variability of this parameter, on average, tends to soften its effects on the resulting statistics.

Keywords— Rice distribution, amount of fading, envelope and phase distribution.

I. INTRODUÇÃO

Os sistemas de comunicações sem fio caminham a passos largos para gerações avançadas, (e.g., 6G e superior) e, com isso, recursos e tecnologias são propostos e investigados para acomodar os novos serviços. Assim, um número massivo de dispositivos utilizando aplicações que requerem altas taxas de transmissão e baixa latência de comunicação surgem. Os requisitos de taxa, latência, e capacidade para as novas gerações exigem soluções inovadoras para contornar as limitações físicas impostas pelo canal de comunicação. E para obter soluções apropriadas, o conhecimento do comportamento do canal é essencial.

Tipicamente, os fenômenos físicos que degradam o sinal são o sombreamento (causado por obstáculos no caminho do rádio,

que levam a uma variação lenta da potência média local do sinal), e o multipercurso (gerado por espalhamentos do sinal no ambiente de propagação, e que leva a rápidas variações instantâneas da potência). A característica inerentemente estocástica dos ambientes sem fio levaram a análises estatísticas nos mais diversos cenários tanto relativos ao fenômeno de sombreamento como também ao de multipercurso. O sombreamento é bem caracterizado pela distribuição lognormal [1]. Contudo, a lognormal, embora com formulação elegante, leva a complicações extras em análises avançadas, e obter novas teorias de comunicação se torna uma tarefa hercúlea. Neste sentido, outros modelos aproximados vêm sendo utilizados para representar o sombreamento. Exemplos desses modelos incluem a distribuição gama [2], Nakagami- m [3], [4], inversa gama [5], inversa Nakagami- m [6], e α - μ [7]. Se, por um lado o sombreamento é fisicamente caracterizado por um modelo único (lognormal), por outro, o multipercurso possui vários modelos de canal, que por sua vez geram distribuições de probabilidade diferentes em cada possível cenário de comunicação.

O modelo mais simples de desvanecimento multipercurso é o Rayleigh, que considera o sinal recebido como duas componentes, uma em fase e outra em quadratura, com média zero e variâncias idênticas. Este modelo foi generalizado considerando-se uma de duas hipóteses: 1) médias não nulas; e 2) variâncias diferentes. O primeiro cenário dá origem ao modelo de desvanecimento de Rice em que há a presença de uma componente dominante no sinal, enquanto que o segundo cenário dá origem a um ambiente de desvanecimento Hoyt. A combinação de ambos levam ao modelo de Beckmann. O modelo de Rice é caracterizado pelo parâmetro de κ que representa a razão entre a potência dominante pela potência total da parte espalhada, e Hoyt tem o parâmetro η , que é definido como a razão entre as potências do sinal em quadratura pelo sinal em fase. Posteriormente esses modelos foram generalizados com a inclusão de outros possíveis fenômenos físicos tais como clusters de multipercurso (Modelo Nakagami- m , κ - μ , η - μ) e não linearidade (Weibull e α - μ). Uma generalização mais ampla ainda, representado pelo modelo α - η - κ - μ , considera todos esses fenômenos.

Todos esses cenários de desvanecimento consideram que o canal de comunicação é estacionário e, portanto, para fins de análise de desempenho, os respectivos parâmetros são fixos tanto no tempo como no espaço. Essa é uma hipótese conservadora, já que o ambiente caótico do meio de comunicação sem fio provoca perturbações locais dos parâmetros. Por exemplo, os autores em [8] observaram que o parâmetro κ de Rice possui uma característica lognormal cuja média depende de fatores como altura das antenas e largura de feixe. Em [9], foi apresentada uma análise referente à variabilidade do parâmetro m de Nakagami, e em [10] a variabilidade dos

Alexander Bento, Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, Universidade Federal de Uberlândia, Patos de Minas-MG, e-mail: alexbentomelo@ufu.br; Carlos Rafael Nogueira da Silva, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba-MG, e-mail: carlos.nogueira@uftm.edu.br; Michel Daoud Yacoub, Departamento de Comunicações, Unicamp, Campinas-SP, e-mail: mdyacoub@unicamp.br.

parâmetros do modelo α - μ é analisada em testes de campo. Com isto, é importante entendermos o comportamento do sinal de desvanecimento em um cenário não estacionário. Uma primeira análise do efeito da flutuação dos parâmetros de distribuição foi feita em [11], a qual considera que o parâmetro η de Hoyt varia uniformemente, o que resultava em um envoltória quasi-Rayleigh. Contudo, a distribuição da fase não era uniforme, o que destoa do comportamento de fase de Rayleigh. De fato, este cenário é muitas vezes observado em testes de campo.

Neste trabalho, será feita uma análise preliminar da variabilidade do parâmetro κ de Rice sujeito a flutuação com distribuição exponencial. Formulações exatas para a função densidade de probabilidade (FDP) da distribuição conjunta fase-envoltória, da fase, e da envoltória são obtidas sendo que a FDP da fase é fornecida em fórmula fechada. As FDP para distribuição conjunta fase-envoltória e para a envoltória são dadas em termos de séries infinitas que convergem com poucos termos (em torno 50). Também são obtidos os momentos de ordem superior, a figura de desvanecimento, e a função distribuição acumulada (FDA) para a envoltória. Todas as formulações são inéditas na literatura.

O restante deste artigo segue a estrutura seguinte: A Seção II revisita a distribuição Rice apresentando sua FDP, FDA, e os momentos de ordem superior; a Seção III estabelece o cenário de perturbação do parâmetro e apresenta os principais resultados para a FDP das distribuições conjunta fase-envoltória, fase, e envoltória, a FDA da envoltória, os momentos de ordem superior e a figura de desvanecimento; a Seção IV apresenta as formas que as FDP e FDA da fase e da envoltória podem gerar e como elas divergem da distribuição Rice. Também é apresentada uma comparação entre as figuras de desvanecimento da distribuição Rice e do modelo com perturbação do parâmetro. A Seção V apresenta as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros. Convencionaremos chamar "flutuação" e "perturbação" como "modulação".

II. A DISTRIBUIÇÃO RICE

Seja $R > 0$ um sinal de desvanecimento propagando em um ambiente caracterizado pela distribuição de Rice com valor rms $\hat{r}^2 = \mathbb{E}[R^2]$. Sua FDP conjunta fase-envoltória é dada por

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{r(1+\kappa)}{\pi \hat{r}^2 \exp(\kappa)} \exp\left(- (1+\kappa) \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right) \times \exp\left(\frac{2r\sqrt{\kappa(1+\kappa)} \cos(\theta - \phi)}{\hat{r}}\right), \quad (1)$$

onde $\kappa > 0$ é a razão entre a potência da componente dominante pela potência da componente espalhada e ϕ é um parâmetro de fase. A FDP da fase pode ser obtida diretamente da FDP conjunta e é dada por

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{e^{-\kappa}}{2\pi} + \frac{\cos(\theta - \phi)}{2e^{\kappa} \sin^2(\theta - \phi)} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \operatorname{erfc}\left(-\sqrt{\kappa} \cos(\theta - \phi)\right) \quad (2)$$

A FDP da envoltória também é obtida de forma direta como

$$f_R(r) = \frac{2(1+\kappa)r}{\hat{r}^2 e^{\kappa}} e^{-\frac{r^2(1+\kappa)}{\hat{r}^2}} I_0\left(\frac{2r\sqrt{\kappa(1+\kappa)}}{\hat{r}}\right), \quad (3)$$

na qual $I_{\nu}(z)$ é função modificada de Bessel do primeiro tipo e ordem ν [12, Eq. (9.6.10)]. A FDA da envoltória Rice foi obtida em fórmula fechada como

$$F_R(r) = 1 - Q_1\left(\sqrt{2\kappa}, \sqrt{2(1+\kappa)} \frac{r}{\hat{r}}\right), \quad (4)$$

em que $Q_a(b, c)$ é a função generalizada Marcum-Q [13]. A função Marcum-Q possui algumas representações diferentes em termos de séries infinitas envolvendo hipergeométrica confluyente ${}_1F_1$ ou a função gamma incompleta [14]. Uma possível representação para FDA utilizando a função gama incompleta resulta em

$$F_R(r) = 1 - \exp(-\kappa) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\kappa^j}{(j!)^2} \Gamma\left(1+j, \frac{r^2(1+\kappa)}{\hat{r}^2}\right), \quad (5)$$

em que $\Gamma(a, b)$ é a função gama incompleta superior [12, Eq. (6.5.3)].

Os momentos de ordem superior da envoltória são derivados diretamente da definição como

$$\mathbb{E}[R^n] = \frac{\hat{r}^n}{(1+\kappa)^{n/2}} \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) L_{\frac{n}{2}}(-\kappa), \quad (6)$$

em que $\Gamma(x)$ é a função gama [12, Eq. (6.1.1)] e $L_{\nu}(x)$ é o polinômio de Laguerre [12, Eq. (22.3.9)]. A partir dos momentos podemos obter a figura de desvanecimento (AF - *amount of fading*) como a razão entre a variância da potência e o quadrado da potência. Assim o AF para a distribuição Rice é dado como

$$AF = \frac{1+2\kappa}{(1+\kappa)^2} \quad (7)$$

III. MODULAÇÃO DO PARÂMETRO DE RICE

Foi observado em estudos que o parâmetro κ de Rice pode sofrer flutuações locais à medida que o sinal se propaga pelo ambiente e que o logaritmo do parâmetro segue aproximadamente uma distribuição normal [8]. Isto é consistente com a definição do modelo físico para o parâmetro, já que este parâmetro é uma razão entre duas potências e flutuações no valor médio da potência são bem caracterizados pela distribuição lognormal. No entanto, sabe-se que a obtenção de estatísticas de desempenho envolvendo a lognormal é intrincada e nem sempre viável. Com isso em mente, outras distribuições como a exponencial, gamma ou α - μ vêm sendo utilizadas para caracterizar este tipo de cenário, pelo menos de forma aproximada.

O modelo para a modulação do parâmetro κ aqui proposto será feito através da introdução de uma variável dummy δ multiplicativa de modo que κ será substituído por $\delta\kappa$ nas equações de (1) a (7). O modelo que será adotado para analisar as perturbações no parâmetro κ será a distribuição exponencial cuja FDP é

$$f_{\delta}(\delta) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{\delta}{\lambda}\right), \quad (8)$$

em que λ é a média da variável aleatória δ . Através de propriedades da teoria de probabilidade podemos obter as distribuições médias, descondicionadas do parâmetro de modulação δ através da integral de descondicionamento como em

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(x|\delta) \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{\delta}{\lambda}\right) d\delta \quad (9)$$

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\kappa\lambda} \cos(\theta-\phi) \left(\frac{\kappa\lambda \cos^2(\theta-\phi) \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+1\right) \sec^2(\theta-\phi)-1}}{\kappa\lambda+1} - \tan^{-1} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+1\right) \sec^2(\theta-\phi)-1} \right) + \pi \right)}{2\pi(\kappa\lambda \sin^2(\theta-\phi)+1)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi(\kappa\lambda+1)} & \cos(\theta-\phi) > 0 \\ \frac{\sqrt{\kappa\lambda} \cos(\theta-\phi) \left(\tan^{-1} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+1\right) \sec^2(\theta-\phi)-1} \right) - \frac{\kappa\lambda \sin^2(\theta-\phi)+1}{(\kappa\lambda+1) \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa\lambda}+1\right) \sec^2(\theta-\phi)-1}} \right)}{2\pi(\kappa\lambda \sin^2(\theta-\phi)+1)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi(\kappa\lambda+1)} & \cos(\theta-\phi) < 0 \\ \frac{1}{2\pi(\kappa\lambda+1)} & \cos(\theta-\phi) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

na qual $f(x|\delta)$ é alguma estatística de Rice, tal como (1) ou (2), condicionada ao parâmetro de flutuação δ .

A. Distribuição Conjunta Fase-Envoltória Rice com Parâmetro κ Modulado

É possível obter uma representação em série para a distribuição conjunta fase-envoltória substituindo-se (1) em (9) e depois escrevendo a última função exponencial em (1) em termos de sua expansão de Taylor. Invertendo-se a ordem de integração e soma obtém-se uma integral na forma

$$I = \int_0^{\infty} \delta^k (1 + \delta\kappa)^{1+s/2} \exp(-C\delta) d\delta, \quad (10)$$

que pode ser resolvida em formulação fechada com ajuda de [15, Eq. (2.3.6.9)] e, depois de manipulações algébricas, a FDP conjunta é obtida como

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{r}{\pi\kappa\lambda\hat{r}^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}{i!} \times \left(\frac{2r \cos(\theta-\phi)}{\hat{r}}\right)^i U\left(\frac{i}{2}+1, 3+i, 1 + \frac{1}{\kappa\lambda} + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right), \quad (11)$$

em que $U(a, b, z)$ é a função confluyente de Tricomi [12, Eq. (13.1.3)].

B. Distribuição da Fase Rice com Parâmetro κ Modulado

A FDP da fase no cenário sob análise pode ser obtido em formulação fechada substituindo (1) em (9) obtendo-se (12) no topo da desta página. A FDA para a fase com parâmetro κ modulado pode ser calculada numericamente por

$$F_{\Theta}(\theta) = \int_{-\pi}^{\infty} f_{\Theta}(\theta) d\theta \quad (13)$$

C. Distribuição da Envoltória Rice com Parâmetro κ Modulado

A FDP da envoltória é obtida substituindo-se (3) em (9). Infelizmente não há uma formulação fechada para a integral resultante, mas uma série pode ser obtida escrevendo a função Bessel como uma série de Taylor e, após inverter a ordem de integração e soma, a integral interna resultante terá a forma como em (10). Após alguma manipulações algébricas, a FDP é obtida como

$$f_R(r) = \frac{2r}{\kappa\lambda\hat{r}^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{2i} \times U\left(1+i, 3+2i, 1 + \frac{1}{\kappa\lambda} + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) \quad (14)$$

Não é trivial obter uma representação em formato de série para FDA da envoltória a partir da FDP. Alternativamente, podemos escrever (5) condicionada ao parâmetro de modulação δ fazendo $\kappa = \delta\kappa$ e por fim descondicionando a FDA. A expressão resultante é obtida como

$$F_R(r) = 1 - \frac{e^{-\frac{r^2}{\hat{r}^2}}}{\lambda\kappa} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j \frac{1}{i!} \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^i \times U\left(1+j, 2+i+j, 1 + \frac{1}{\kappa\lambda} + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) \quad (15)$$

A prova deste resultado pode ser encontrada no Apêndice A.

D. Momentos de Ordem Superior da Envoltória Rice com Parâmetro κ Modulado

Os momentos de ordem superior são obtidos substituindo (6) em (9). Uma representação em série é obtida reescrevendo o polinômio de Laguerre como uma série de Taylor, e, ao inverter a ordem de soma e integração, uma integral na forma (10) aparece. Após alguma manipulações algébricas os momentos de ordem superior da envoltória são dados como

$$\mathbb{E}[R^n] = \hat{r}^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\kappa\lambda)^{i-\frac{n}{2}}}{i! \left(1 + \frac{n}{2}\right)_{-i}} \times U\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - i, \frac{1}{\kappa\lambda}\right), \quad (16)$$

em que $(a)_b$ é o símbolo de Pochhammer [12, Eq. (6.1.22)]. É interessante notar que se n for um número par, a série infinita é interrompida em $i = n/2$.

E. Figura de Desvanecimento Rice com Parâmetro κ Modulado

A figura de desvanecimento é obtida da definição como

$$AF = \frac{(1 + 2\kappa\lambda)e^{\frac{1}{\kappa\lambda}} \Gamma\left(0, \frac{1}{\kappa\lambda}\right) - \kappa\lambda}{\kappa^2 \lambda^2} \quad (17)$$

IV. RESULTADOS

A Figura 1 espelha o comportamento da FDP da fase com parâmetro κ modulado (linhas cheias) e não modulado (linhas pontilhadas) para $\kappa = \{1/2, 1, 8/3\}$ e $\lambda = 1$, as curvas foram geradas para $\phi = \{\pi/8, \pi/4, \pi/2\}$ para melhorar visualização dos resultados. É possível observar que os picos se tornam mais proeminentes com o aumento de κ e no cenário com parâmetro κ modulado, o pico é menos acentuado.

A Figura 2 esboça o comportamento da FDP da envoltória com parâmetro κ modulado (linhas cheias) comparadas com

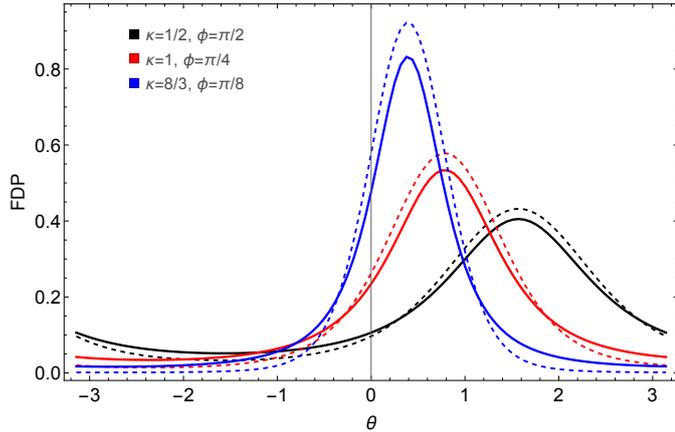


Fig. 1. FDPs da fase com parâmetro κ modulado e não modulado com $\kappa = \{1/2, 1, 8/3\}$

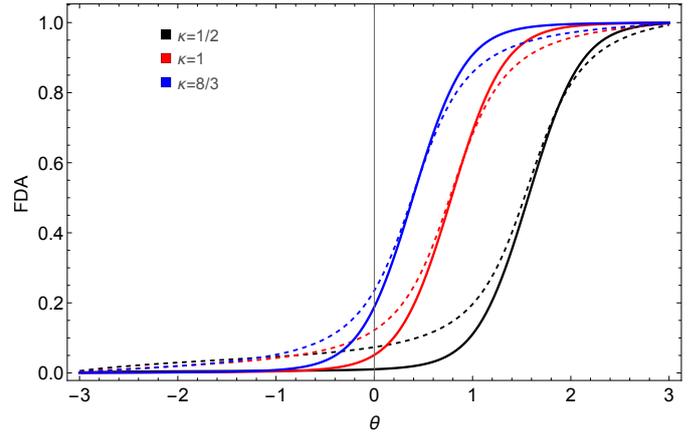


Fig. 3. FDAs da fase com Parâmetro κ Modulado não Modulado com $\kappa = \{1/2, 1, 8/3\}$

a FDP da envoltória de Rice com parâmetro κ não modulado para $\kappa = \{1/2, 1, 8/3\}$ e $\lambda = 1$. Nota-se que a modulação do parâmetro provoca poucas alterações na forma da FDP.

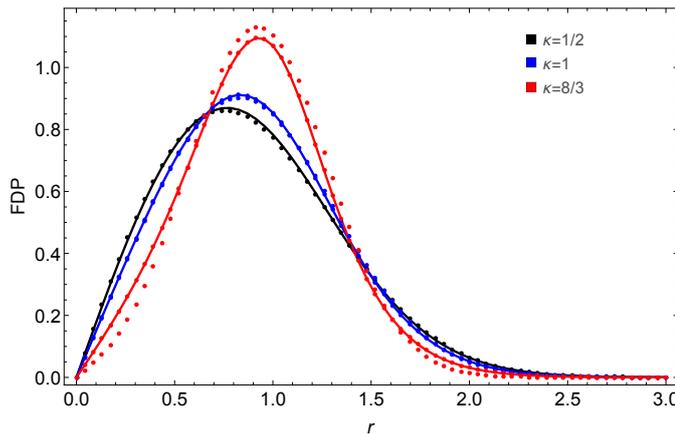


Fig. 2. FDPs da envoltória com Parâmetro κ Modulado e não modulado com $\kappa = \{1/2, 1, 8/3\}$

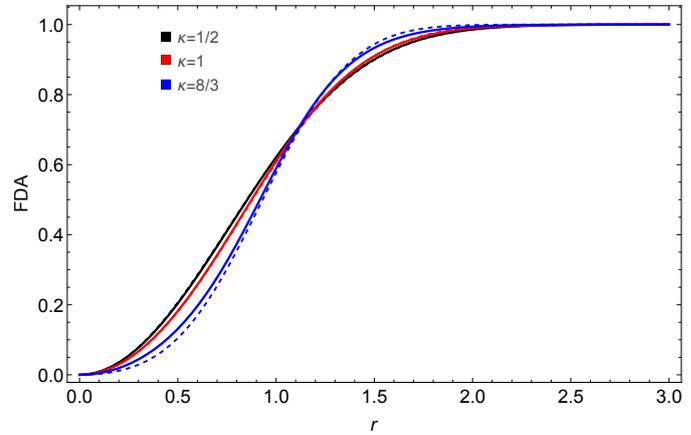


Fig. 4. FDAs para envoltória com parâmetro κ modulado e não modulado com $\kappa = \{1/2, 1, 8/3\}$

A Figura 3 esboça o comportamento da FDA da fase Rice com Parâmetro κ modulado (linhas cheias) comparadas com a FDA da fase de Rice não modulado para $\kappa = \{1/2, 1, 8/3\}$ e $\lambda = 1$.

A Figura 4 esboça o comportamento da FDA da envoltória com parâmetro κ modulado (linhas cheias) comparadas com a FDA da envoltória de Rice com parâmetro κ não modulado com $\kappa = \{1/2, 1, 8/3\}$ e $\lambda = 1$. Note-se aqui que o efeito da modulação do parâmetro κ tende a ser grandemente amenizado, quase que anulado.

A Figura 5 apresenta a AF em função de κ , para a condição de κ modulado e não modulado. Pode-se observar que a condição do canal, expressa pelo parâmetro de desvanecimento, é largamente afetada pela modulação do parâmetro κ . Mais especificamente, a condição do canal piora com a tal modulação do parâmetro, o que não é evidente só se observando as figuras das envoltórias. Conjectura-se que isso possa ficar mais evidente ao se obterem as estatísticas de

ordem superior, e.g., taxa de cruzamento de nível e duração média do desvanecimento.

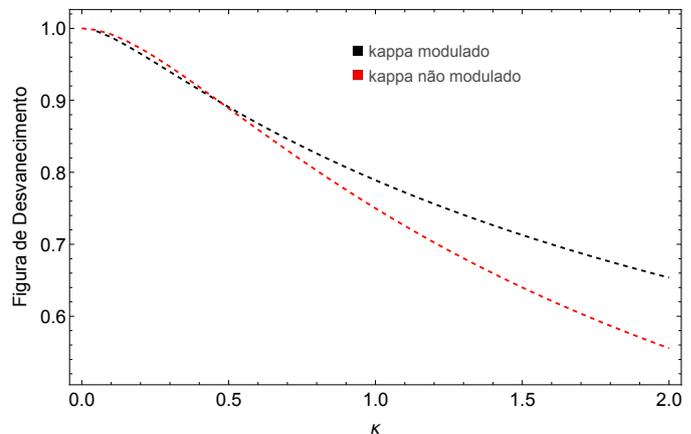


Fig. 5. AF em função de κ para com parâmetro κ modulado e não modulado

V. CONCLUSÕES

A perturbação do parâmetro κ de Rice foi investigada em termos das estatísticas FDP e FDA resultantes para a fase, envelope, e conjunta fase-envelope. Neste primeiro momento, consideramos que o parâmetro de Rice é modulado por uma distribuição exponencial negativa, consideração baseada no modelo físico comumente adotado para identificar a intensidade da componente dominante do sinal. Foi obtida, em formulação fechada, uma nova FDP para a fase do sinal e verificou-se que a modulação do parâmetro, para esse cenário, provoca modificações na forma da FDP da fase quando o valor médio do parâmetro é mantido constante ($\lambda = 1$). Por outro lado a envoltória obtida é bastante similar àquela para o parâmetro não modulado. Este pode ser um cenário encontrado em testes de campo em que o desvanecimento possa ser caracterizado com uma envoltória quasi-Rice mas apresenta uma fase diferente daquela de Rice. Também foram desenvolvidas formulações para a figura de desvanecimento que mostrou que o canal com modulação do parâmetro torna-se mais severo à medida que a componente dominante é mais intensa. Como sugestão para trabalhos futuros, pretende-se investigar outros modelos de modulação de, mais realistas, para o parâmetro κ . A distribuição exponencial é pouco flexível o que engessa o modelo adotado. Distribuições como a gama poderiam fornecer uma análise mais abrangente do ambiente de comunicação não estacionário.

APÊNDICE

A. Prova para FDA da Envoltória Rice com Parâmetro κ Modulado

A FDA da distribuição Rice com parâmetro κ modulado por δ é dada por

$$F_{R|\delta}(r|\delta) = 1 - e^{-\delta\kappa} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\delta\kappa)^j}{(j!)^2} \Gamma\left(1 + j, \frac{r^2(1 + \delta\kappa)}{\hat{r}^2}\right). \quad (18)$$

Podemos obter a FDA descondicionada utilizando a integral de descondicionamento (9). A obtenção de uma série para esta FDA passaria em substituir (18) em (9) e posteriormente inverte-se a ordem de integração e soma. Contudo esta técnica não pode ser utilizada neste caso pois os termos na soma infinita não são todos positivos, e a expressão resultante seria uma série divergente. Portanto devemos modificar a expressão (18) de modo que os termos da série sejam apenas positivos. Primeiro vamos notar que o parâmetro da função gama incompleta é um número inteiro $j + 1$, isto implica que podemos escrever a gama incompleta como uma soma finita no seguinte formato

$$\Gamma(j + 1, x) = j! e^{-x} \sum_{i=0}^j \frac{1}{i!} x^i \quad (19)$$

Reescrevendo a FDA com esta representação para a função gama incompleta é possível perceber que todos os termos da soma infinita, para qualquer índice j , será positivo, o que permite que a troca da ordem de integração e soma seja realizada. Assim a integral resultante após algumas simplificações

algébricas será

$$I = \int_0^{\infty} \delta^j (1 + \delta\kappa)^j \exp\left(-\delta\left(\kappa + \frac{1}{\lambda} + \frac{r^2\kappa}{\hat{r}^2}\right)\right) d\delta, \quad (20)$$

que por sua vez possui a mesma estrutura de (10). Depois de algumas simplificações (15) é obtida completando a prova.

REFERÊNCIAS

- [1] M. S. Alouini and M. K. Simon, "Dual diversity over correlated log-normal fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, no. 12, pp. 1946–1959, Dec. 2002.
- [2] A. Abdi and M. Kaveh, "On the utility of gamma PDF in modeling shadow fading (slow fading)," in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf.*, Houston, TX, USA, 1999, pp. 2308–2312.
- [3] J. F. Paris, "Statistical characterization of κ - μ shadowed fading," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 63, no. 2, pp. 518–526, Feb. 2014.
- [4] S. L. Cotton, "Human body shadowing in cellular device-to-device communications: Channel modeling using the shadowed κ - μ fading model," *IEEE JSAC*, vol. 33, no. 1, pp. 111–119, Jan. 2015.
- [5] S. K. Yoo, N. Bhargav, S. L. Cotton, P. C. Sofotasios, M. Matthaiou, M. Valkama, and G. K. Karagiannidis, "The κ - μ / inverse gamma and η - μ / inverse gamma composite fading models: Fundamental statistics and empirical validation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, Dec. 2017.
- [6] S. K. Yoo, S. Cotton, P. Sofotasios, M. Matthaiou, M. Valkama, and G. Karagiannidis, "The Fisher-Snedecor F distribution: A simple and accurate composite fading model," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 21, no. 7, pp. 1661–1664, July 2017.
- [7] O. S. Badarneh, "The α - μ / α - μ composite multipath-shadowing distribution and its connection with the extended generalized-k distribution," *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, vol. 70, no. 9, pp. 1211–1218, 2016. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1434841116302254>
- [8] L. J. Greenstein, S. S. Ghassemzadeh, V. Erceg, and D. G. Michelson, "Ricean k -factors in narrow-band fixed wireless channels: Theory, experiments, and statistical models," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 58, no. 8, pp. 4000–4012, 2009.
- [9] L. Rubio, J. Reig, and N. Cardona, "Evaluation of nakagami fading behaviour based on measurements in urban scenarios," *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, vol. 61, no. 2, pp. 135–138, 2007. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1434841106000537>
- [10] A. Krishnan, C. L. Selvati, U. S. Dias, and M. D. Yacoub, "On the statistics of the fading parameters of the α - μ distribution: Field trials and validation," in *2012 National Conference on Communications (NCC)*, 2012, pp. 1–5.
- [11] A. Melo, M. D. Yacoub, and C. R. N. da Silva, "Efeito do sombreamento no modelo η - μ complexo para $\mu = 1/2$ (hojt)," *XL Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, vol. 1, no. 1, pp. 1–5, 2022.
- [12] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications, Incorporated, 1972.
- [13] J. Marcum, "A statistical theory of target detection by pulsed radar," *IRE Transactions on Information Theory*, vol. 6, no. 2, pp. 59–267, 1960.
- [14] A. Annamalai, C. Tellambura, and J. Matyjas, "A New Twist on the Generalized Marcum Q-Function $Q_M(a, b)$ with Fractional-Order M and Its Applications," in *2009 6th IEEE Consumer Communications and Networking Conference*, 2009, pp. 1–5.
- [15] A. Prudnikov, *Integrals and Series: Volume 1: Elementary Functions*. Gordon & Breach Science Publishers, 1986.