

# Comparação de Modelos Baseados em Filtro de Kalman Aplicados em *Bearing-Only Tracking*

Danilo Olivieri e Mariane Petraglia

**Resumo**—Este trabalho analisa o uso de Filtros de Kalman para a solução do problema de *Bearing-Only Tracking*, com o intuito de subsidiar a implementação em um sistema de combate real. São avaliados 8 modelos, dos quais 6 desenvolvidos especificamente para o problema, que foram aplicados a 15 cenários, combinando 5 formas de inicialização com 3 movimentações de navios distintas. A análise dos resultados considera o erro e a credibilidade da predição e as taxas de estabilidade e convergência. Três soluções se destacaram, assim como uma forma de inicialização que garantiu maior robustez aos algoritmos.

**Palavras-Chave**—Filtro de Kalman, *Bearing-Only Tracking*, Guerra Eletrônica.

**Abstract**—This work analyzes the use of Kalman Filters to solve the *Bearing-Only Tracking* problem, aiming to support the implementation in a real combat management system. Eight models are evaluated, 6 of which were developed specifically for the problem, and they were applied to 15 scenarios, combining 5 initialization forms with 3 distinct ship movements. The analysis of results considers error and credibility of the prediction, and the rates of stability and convergence. Three solutions stood out, as well as one initialization method that ensured greater robustness to the models.

**Keywords**—Kalman Filter, *Bearing-Only Tracking*, Electronic Warfare.

## I. INTRODUÇÃO

Em operações navais, o uso de sensores passivos para detectar presença de sinais de radares ou sonares emitidos por outros navios evita revelar sua posição, mas restringe as informações coletadas à potência do sinal observado e à sua marcação (pelo cálculo do seu ângulo de chegada). Assim, o navio-observador precisa realizar manobras para estimar distância e velocidade do potencial alvo por meio da análise de movimento relativo, o que é conhecido por *Bearing-Only Tracking* (BOT).

Para isso, os Filtros de Kalman têm sido amplamente estudados e aplicados para o rastreamento de alvo devido à baixa demanda de processamento. Além das versões clássicas, variações específicas para o problema foram desenvolvidas buscando corrigir vieses ou melhorar a estabilidade e a performance do filtro. Sendo assim, com o intuito de subsidiar uma implementação prática em um sistema de combate, este trabalho compara a performance dos modelos *Extended Kalman Filter* (EKF) ([1] e [2]), *Ensemble Kalman Filter* (EnKF)

[3], *Pseudo-Linear Kalman Filter* (PLKF) ([4] e [5]), *Bias Compensated Pseudo-Linear Kalman Filter* (BC-PLKF) [6], *Selective Angle Measurements Instrumental Variables-based Kalman Filter* (SAM-IVKF) [6], *Augmented Ensemble Kalman Filter* (AEnKF) [7], *Modified Polar Coordinate Extended Kalman Filter* (MP-EKF) ([8]-[10]) e *Log-Polar Coordinate Extended Kalman Filter* (LP-EKF) ([11] e [12]). Além desses, o *Range Parametrized Extended Kalman Filter* (RP-EKF) ([13] e [12]) também foi estudado, sendo este uma forma de inicialização dos filtros aplicável a todos os demais modelos.

## II. O PROBLEMA DE *Bearing-Only Tracking* (BOT)

O problema de BOT considera o deslocamento em duas dimensões de um navio-alvo, com vetor velocidade  $\mathbf{v}_t(t)$  e rumo  $\alpha_t(t)$  constantes e desconhecidos, e de um navio-observador, que detecta sua emissão radar e mede o ângulo de chegada do sinal para estabelecer a marcação  $\beta(t)$  do potencial alvo (ângulo medido a partir do Norte no sentido horário). O observador, a uma distância  $r(t)$  do alvo desconhecida, possui velocidade  $\mathbf{v}_o(t)$  e rumo  $\alpha_o(t)$  que podem variar, conforme representado na Figura 1.

Para estimar  $\mathbf{v}_t(t)$  e  $r(t)$ , deve ser feita uma análise do movimento relativo entre o navio-observador e o alvo, usando as marcações apenas. Para isso, o observador deverá realizar uma manobra para alterar seu rumo e velocidade. Os modelos clássicos ou geométricos utilizam algumas marcações antes e depois da manobra a fim de comparar a diferença entre as medições após a manobra e a esperada se o observador mantivesse o movimento anterior. Posteriormente, algoritmos iterativos foram desenvolvidos, com grande destaque para os baseados em Filtro de Kalman.

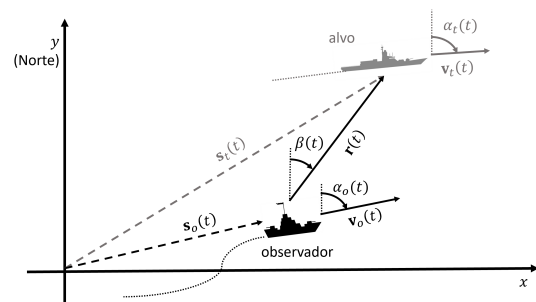


Fig. 1. Representação do problema de BOT.

## III. FILTROS DE KALMAN APLICADOS A BOT

O Filtro de Kalman apresenta uma solução de Erro Quadrático Médio (MSE) ótimo para sistemas lineares com ruídos

não-estacionários e sinais com formulação estocástica, permitindo uma estimativa indireta de variáveis de estado de um sistema pela medição de suas saídas [3].

O espaço de estados, discretizado no tempo com período de amostragem  $\tau$ , considera o vetor de variáveis de estado  $\mathbf{x}(k) = [r_x(k) \ r_y(k) \ v_x(k) \ v_y(k)]^T$ , onde  $r_x(k)$  e  $r_y(k)$  são as componentes de  $\mathbf{r}(k)$  e  $v_x(k)$  e  $v_y(k)$  são as componentes da velocidade relativa  $\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}_t(k) - \mathbf{v}_o(k)$ .

A transição de estados considera a cinemática descrita na Seção II, onde a aceleração do observador é dada pelo seu valor médio em função da variação de velocidade entre amostras ( $\Delta \mathbf{v}_o(k) = \mathbf{v}_o(k) - \mathbf{v}_o(k-1)$ ). A equação de saída considera a medida de  $\tilde{\beta}(k)$  como função de  $\mathbf{x}(k)$  (arco tangente definido para 4 quadrantes [6]) somada a um ruído de medição gaussiano branco  $\eta(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$ , que será considerado como o erro de medição. Sendo assim, o espaço de estados é dado por (1) e complementado por (2).

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) - \mathbf{w}(k) \\ \tilde{\beta}(k) = \arctan \left[ \frac{r_x(k)}{r_y(k)} \right] + \eta(k) \end{cases} ; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \tau \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{w}(k) = \left[ \frac{\tau}{2} \Delta v_{o,x}(k) \quad \frac{\tau}{2} \Delta v_{o,y}(k) \quad \Delta v_{o,x}(k) \quad \Delta v_{o,y}(k) \right]^T \quad (2)$$

Os modelos estudados serão descritos a seguir. Os algoritmos baseados em coordenada polar, MP-EKF e LP-EKF, não serão apresentados por falta de espaço e por não terem apresentado resultados promissores na maioria das simulações. Detalhes desses métodos podem ser encontrados em [8] e [12].

#### A. Extended Kalman Filter (EKF)

O EKF se baseia em duas etapas: a primeira, predição, calcula o estado  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  e a matriz de covariância do erro de predição  $\mathbf{P}(k|k-1)$  com base em estimativas do instante anterior; a segunda, predição com inovação, calcula  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ , com base na informação de medição atual e na estimativa de  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ , assim como a nova matriz de covariância do erro,  $\mathbf{P}(k|k)$ . Esses dois cálculos dependem do Ganho de Kalman,  $\mathbf{g}(k)$ , e da linearização da equação de saída. As equações podem ser encontradas em [2] ou [3]. A linearização da função arco tangente como uma aproximação de Taylor de 1ª ordem é dada por (3).

$$\mathbf{c}(k) = \left[ \frac{\hat{r}_y(k|k-1)}{\hat{r}_x^2(k|k-1) + \hat{r}_y^2(k|k-1)} \quad \frac{-\hat{r}_x(k|k-1)}{\hat{r}_x^2(k|k-1) + \hat{r}_y^2(k|k-1)} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (3)$$

Os modelos baseados no EKF precisam de uma estimativa inicial de  $\hat{\mathbf{x}}(0|0)$  e  $\mathbf{P}_e(0|0)$ . Em [7], [10] e [12] é proposta uma forma válida também para os demais modelos, onde se estima  $\hat{r}(0)$ ,  $\hat{v}_t(0)$ ,  $\sigma_{\hat{r}}$  e  $\sigma_{\hat{v}_t}$ , e se utiliza  $\hat{\alpha}_t = \tilde{\beta}(0) + \pi$  (alvo rumo ao observador) e  $\sigma_{\hat{\alpha}_t} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$  (distribuição uniforme de  $-\frac{\pi}{2}$  a  $\frac{\pi}{2}$ ) para calcular  $\hat{\mathbf{x}}(0|0)$  e  $\mathbf{P}_e(0|0)$  com base nessas estimativas.

#### B. Pseudo-Linear Kalman Filter (PLKF)

O PLKF foi proposto com intuito de melhorar a estabilidade do modelo, o que não era garantida com a linearização proposta pelo EKF [5]. Dessa forma, por meio de manipulação

algébrica de (1) [4], resultando em (4), encontrou-se uma forma alternativa para (3) que usa  $\tilde{\beta}(k)$  (e sua incerteza) no lugar de  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ , dada em (6).

$$0 = \hat{\mathbf{c}}(k)\mathbf{x}(k) + \nu(k) \quad (4)$$

$$\nu(k) = r(k) \sin \eta(k) \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{c}}(k) = \left[ \cos \tilde{\beta}(k) \quad -\sin \tilde{\beta}(k) \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (6)$$

É proposta ainda em [5] a simplificação da variância do ruído pseudolinear  $\nu(k)$ ,  $\sigma_\nu^2 = \mathbb{E}[\nu^2(k)] \approx \sigma_\eta^2(k)$ , dado que  $r(k)$  é desconhecido e, assim, descorrelaciona-o da covariância do ruído, assumindo que há uma pequena distorção, mas que não prejudica o desempenho do modelo. Além disso, (4) impacta a equação de  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ , sendo reescrita como:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{g}(k)\hat{\mathbf{c}}^T(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1). \quad (7)$$

Com estas modificações, o PLKF permite uma inicialização trivial  $\hat{\mathbf{x}}(0|0) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{P}_e(0|0) = \mathbf{I}$ .

#### C. Bias Compensated Pseudo-Linear Kalman Filter (BC-PLKF)

O BC-PLKF proposto em [6] busca subtrair o viés provocado pelo uso de  $\hat{\mathbf{c}}(k)$ , que está correlacionado com  $\eta(k)$ . Nesta versão,  $\sigma_\nu^2$  não é simplificado, sendo calculado como em (8) e usado no lugar de  $\sigma_\eta^2$  na equação do Ganho de Kalman.

$$\sigma_\nu^2(k) = [\hat{r}_x^2(k|k-1) + \hat{r}_y^2(k|k-1)] \sigma_\eta^2(k) \quad (8)$$

O viés do modelo, dado por  $\epsilon(k) = \mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{x}(k)]$ , é calculado em [6], sendo composto por três parcelas: a primeira corresponde à propagação do viés do instante  $k-1$  para  $k$  (sendo nulo se as outras duas também forem); a segunda depende da distorção se for considerada alteração de rota do alvo (aproximando-se de zero se a perturbação for pequena); e a terceira depende da correlação entre  $\hat{\mathbf{c}}(k)$  e  $\eta(k)$ . Assumindo que esta é a parcela mais relevante do viés, após o cálculo de  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ , é incluída uma etapa para subtrair este termo:

$$\hat{\mathbf{x}}_{BC}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{P}_e(k|k)\sigma_\nu^{-2}(k)\sigma_\eta^2(k)\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(k|k) \quad (9)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

#### D. Selective Angle Measurements Instrumental Variables-based Kalman Filter (SAM-IVKF)

Diferente do BC-PLKF, que subtrai o viés, o SAM-IVKF tem o objetivo de descorrelacionar os termos que o causam. Sendo assim, baseado no conceito de Variáveis Instrumentais (IV), usado geralmente em econometria, que busca uma variável correlacionada com a variável explicativa e, portanto, com a variável dependente, mas descorrelacionada do ruído, visto como uma generalização dos Mínimos Quadrados [14].

A solução apresentada em [6] define  $\hat{\mathbf{c}}_{IV}(k)$  (11), cuja solução ótima dependeria do valor real de  $\beta(k)$  e, então, foi aproximada pela sua estimativa com viés compensado  $\hat{\beta}_{BC}(k)$  (12), calculada com as componentes de  $\hat{\mathbf{x}}_{BC}(k|k)$

(9), tornando este modelo dependente do anterior. Com isso, o Ganho de Kalman  $\mathbf{g}(k)$  é reescrito como em (13).

$$\hat{\mathbf{c}}_{IV}(k) = \begin{bmatrix} \cos \hat{\beta}_{BC}(k|k) & -\sin \hat{\beta}_{BC}(k|k) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

$$\hat{\beta}_{BC}(k|k) = \arctan \frac{\hat{r}_{x,BC}(k|k)}{\hat{r}_{y,BC}(k|k)} \quad (12)$$

$$\mathbf{g}_{IV}(k) = \mathbf{P}_e(k|k-1)\hat{\mathbf{c}}_{IV}(k) \left[ \hat{\mathbf{c}}^T(k)\mathbf{P}_e(k|k-1)\hat{\mathbf{c}}_{IV}(k) + \sigma_v^2(k) \right]^{-1} \quad (13)$$

Para garantir a performance do modelo, é necessária forte correlação entre  $\hat{\mathbf{c}}_{IV}(k)$  e  $\hat{\mathbf{c}}(k)$ . Com isso, o SAM-IVKF executa o cálculo do BC-PLKF e se aplica o critério de seleção pelos ângulos: se  $|\hat{\beta}_{BC}(k) - \tilde{\beta}(k)| \leq \kappa\sigma_\eta$  (onde  $2 \leq \kappa \leq 4$  [6]), são calculados (11) e (13) e refeita a predição com inovação; senão, é mantido o valor de  $\hat{\mathbf{x}}_{BC}(k|k)$  para  $k$  atual.

### E. Ensemble Kalman Filter (EnKF)

O EnKF tem o objetivo de remediar o mau desempenho do EKF em aplicações onde as não linearidades são severas ou quando o número de variáveis de estado é alto por meio de um conjunto de simulações de Monte Carlo [3]. Primeiro, um conjunto de  $J$  amostras  $\hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1)$  é gerado independentemente, a partir da predição com base no estado anterior, aplicando o ruído  $\mathbf{n}_j(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ , conforme (14) ( $\mathbf{Q}$  é a matriz de covariância do ruído, definida em [6] e [7]). É calculada a média do conjunto e sua matriz de covariância  $\bar{\mathbf{P}}_e(k|k-1)$ .

$$\hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \mathbf{w}(k) + \mathbf{n}_j(k) \quad (14)$$

Há diferentes abordagens sobre  $\mathbf{P}_e(k|k-1)$ , como em [3] e [7], sendo a proposta em [15], dada por (15), a que retornou melhores resultados neste trabalho.

$$\mathbf{P}_e(k|k-1) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{P}_e(k-1|k-1)\mathbf{A}^T(k-1) + \bar{\mathbf{P}}_e(k|k-1) \quad (15)$$

Posteriormente, de forma similar, é gerado um conjunto de  $\hat{\beta}_j$  aplicando a perturbação  $\eta_j(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$  sobre a medição  $\tilde{\beta}(k)$ , dado por  $\hat{\beta}_j(k) = \tilde{\beta}(k) + \eta_j(k)$ . Também são calculadas a média  $\bar{\beta}(k)$  e a matriz de covariância  $\bar{P}_\beta(k)$ .

### F. Augmented Ensemble Kalman Filter (AEnKF)

O AEnKF tem o objetivo de superar os limites dos filtros baseados no EKF generalizando a solução por meio de Conversão Descorrelacionada com Expansão de Caos Polinomial Arbitrária, aumentando, assim, o conjunto da medição [7]. Essa expansão necessita apenas dos momentos do conjunto e garante ortogonalidade entre os polinômios e entre polinômio e variável de saída.

Diferente do EnKF, o AEnKF utiliza os elementos do conjunto do estado anterior  $\hat{\mathbf{x}}_j(k-1|k-1)$  para o conjunto de predição e as estimativas com base nas predições de  $\hat{\mathbf{x}}_j(k|k-1)$ , para o conjunto de medições. O conjunto aumentado é da forma de (16), onde  $P^{(L)}[\hat{\beta}_j(k)]$  é o polinômio de grau  $L$  de  $\hat{\beta}_j(k)$ , com coeficientes baseados nos momentos de  $\hat{\beta}_j(k)$ , apresentados em [16].

$$\hat{\mathbf{y}}_{j, aug}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_j(k) & P^{(2)}[\hat{\beta}_j(k)] & P^{(3)}[\hat{\beta}_j(k)] & \dots & P^{(L)}[\hat{\beta}_j(k)] \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

Para o AEnKF, os cálculos do ganho de Kalman  $\mathbf{G}(k)$  e de  $\mathbf{P}_e(k|k)$  são feitos de forma alternativa, apresentada em [7].

### G. Range Parametrized Extended Kalman Filter (RP-EKF)

O RP-EKF proposto em [13] consiste em definir intervalos de distância, de forma que se possa refinar a busca da localização do alvo trabalhando com filtros em paralelo inicializados com parâmetros distintos. Em [12] o conceito é expandido para a velocidade do alvo. Dessa forma, cada filtro é inicializado com  $\hat{r}(0)$  e  $\hat{v}_t(0)$  no centro do intervalo e com os desvios-padrão para probabilidade uniforme dentro do intervalo.

O resultado  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  é uma média ponderada da saída dos  $N$  filtros, onde o peso do  $i$ -ésimo filtro,  $\xi_i(k)$ , dado em (17), é definido com base distância entre  $\hat{\beta}_i(k)$  (calculado com  $\hat{\mathbf{x}}_i(k|k)$ ) e  $\tilde{\beta}(k)$ . Em [13] é proposto que  $f$  seja a função de distribuição gaussiana e que os  $\xi_i(0)$  sejam iguais ou definidos com base em algum conhecimento prévio. Como a solução tende a convergir para um dos filtros, pode-se estabelecer um limite inferior de  $\xi_i$  para “desligar” o  $i$ -ésimo filtro durante a execução.

$$\xi_i(k) = \frac{\xi_i(k-1)f[\hat{\beta}_i(k), \tilde{\beta}(k), \sigma_\eta^2 + \sigma_\beta^2]}{\sum_{i=1}^{N_i} \xi_i(k-1)f[\hat{\beta}_i(k), \tilde{\beta}(k), \sigma_\eta^2 + \sigma_\beta^2]} \quad (17)$$

## IV. EXPERIMENTOS REALIZADOS

Os algoritmos EKF, PLKF, BC-PLKF, SAM-IVKF, EnKF, AEnKF (com polinômio do segundo grau), MP-EKF e LP-EKF foram implementados e simulados em MATLAB. Foram simulados 15 cenários combinando 5 tipos de inicialização do algoritmo ( $\mathbf{I}_1$  a  $\mathbf{I}_5$ ) e 3 tipos de movimentação de navios ( $\mathbf{M}_1$  a  $\mathbf{M}_3$ ), sendo 2.000 execuções para cada cenário e utilizando a mesma inicialização aleatória para todos os modelos.

### A. Cenários simulados

Com base nos trabalhos levantados, foram identificadas quatro principais formas de inicializar as variáveis do modelo, sendo considerado o RP-EKF como uma quinta forma. São estas:  $\mathbf{I}_1$ :  $\hat{r}(0)$  e  $\hat{v}_t(0)$  como variáveis aleatórias centradas no valor real e com desvio-padrão arbitrado ([6] e [7]);  $\mathbf{I}_2$ :  $\hat{r}(0)$  e  $\hat{v}_t(0)$  como variáveis aleatórias centradas em valor arbitrado e com desvio-padrão arbitrado ([8] e [12]);  $\mathbf{I}_3$ :  $\hat{r}(0)$  e  $\hat{v}_t(0)$  como variáveis determinísticas arbitradas (aleatoriedade apenas para o erro de medição da marcação) e com desvios-padrão arbitrados apenas para calcular  $\mathbf{P}(0|0)$  ([4] e [5]);  $\mathbf{I}_4$ :  $\hat{r}(0)$  determinístico e arbitrado, e  $\hat{\mathbf{v}}(0|0) = \mathbf{0}$  ( $\hat{\mathbf{v}}_t(0) = \mathbf{v}_o(0)$ ) ([4], [9] e [13]); e  $\mathbf{I}_5$ : RP-EKF combinando 8 intervalos de distância com 8 intervalos de velocidade do alvo ([13] e [12]). Os valores aplicados encontram-se na Tabela I.

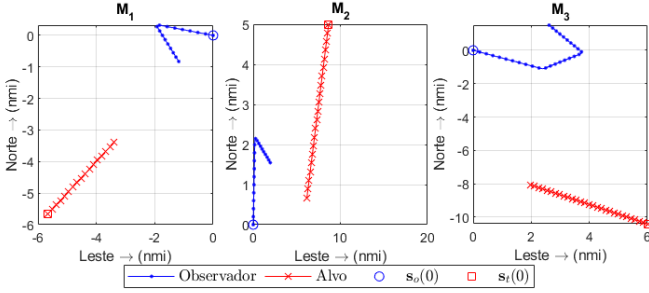
Os cenários de movimentação foram:  $\mathbf{M}_1$ : navio-observador realizando 1 manobra (simplificada, sem amostragem), com velocidades distintas em cada trecho;  $\mathbf{M}_2$ : navio-observador realizando 1 manobra (detalhada, ocorrendo amostragem durante) com mesma velocidade em cada trecho; e  $\mathbf{M}_3$ : navio-observador realizando 2 manobras (detalhadas, ocorrendo amostragem apenas na segunda), e velocidades distintas em cada trecho, conforme Figura 2.

Os demais parâmetros usados foram:  $\sigma_\eta = 2^\circ$ ,  $\tau = 1$  min,  $\kappa = 4$  (SAM-IVKF) e  $J = 500$  (EnKF e AEnKF).

TABELA I  
 PARÂMETROS PARA INICIALIZAÇÃO POR CENÁRIO

Cenário	Distância ao alvo (nmi*)		Velocidade do alvo (nós)		Rumo do alvo (rad)	
	$\bar{r}(0 0)$	$\sigma_{\bar{r}}$	$\bar{v}_t(0 0)$	$\sigma_{v_t}$	$\hat{\alpha}_t$	$\sigma_{\hat{\alpha}_t}$
I <sub>1</sub>	Conforme rota	2, 2	Conforme rota	4, 0	$\tilde{\beta}(0) + \pi$	$\frac{\pi}{\sqrt{12}}$
I <sub>2</sub> e I <sub>3</sub>	15	2, 2	15	4, 0	$\tilde{\beta}(0) + \pi$	$\frac{\pi}{\sqrt{12}}$
I <sub>4</sub>	15	2, 2	$v_o(0)$	4, 0	$\alpha_o(0)$	$\frac{\pi}{\sqrt{12}}$
I <sub>5</sub>	2 a 20	$\frac{9}{4\sqrt{12}}$	5 a 20	$\frac{15}{8\sqrt{12}}$	$\tilde{\beta}(0) + \pi$	$\frac{\pi}{\sqrt{12}}$

\* Milha náutica (1 nmi = 1.852 m)


 Fig. 2. Representação das movimentações M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub> e M<sub>3</sub>.

### B. Métricas de desempenho

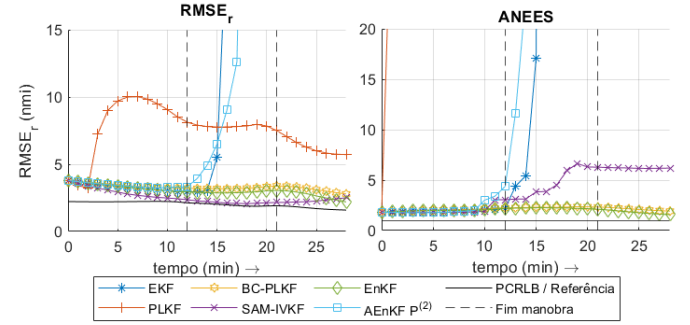
Para avaliar a acurácia das estimativas, as métricas utilizadas foram a Raiz-Quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE) para distância (RMSE<sub>r</sub>) e velocidade do alvo (RMSE<sub>v<sub>t</sub></sub>) e *Posterior Cramér-Rao Lower Bound* (PCRLB) como referência de valor mínimo de RMSE ([17] e [6]). A credibilidade do resultado foi medida pelo *Average Normalized Estimation Error Squared* (ANEES) [7], cujo valor de referência é 1 (acima deste, a estimativa do erro é otimista, e, abaixo, pessimista). As métricas foram calculadas em seu valor instantâneo e também médio (neste caso, considerando apenas os instantes após a primeira manobra). Também foram avaliadas a estabilidade e a convergência de rota. A taxa de estabilidade considerou o inverso do número de condicionamento de norma 1 da matriz  $\mathbf{P}_e(k|k)$ , considerando o percentual de simulações onde este valor não ficou abaixo de  $10^{-12}$  em algum momento. Já a taxa de convergência de rota considerou se a ordem de grandeza do módulo do erro de estimação da distância do alvo estava acima de  $10^1$  (ou seja, o erro maior que 31,6 nmi).

## V. RESULTADOS OBTIDOS

A partir da análise dos resultados, não se observou um único modelo dominante. Os modelos baseados em coordenada polar (MP-EKF e LP-EKF) foram os que tiveram pior desempenho no geral, tanto em RMSE quanto apresentando baixa convergência e com taxa de estabilidade de 0% em cenários com M<sub>3</sub> (não ocorrido em outros algoritmos).

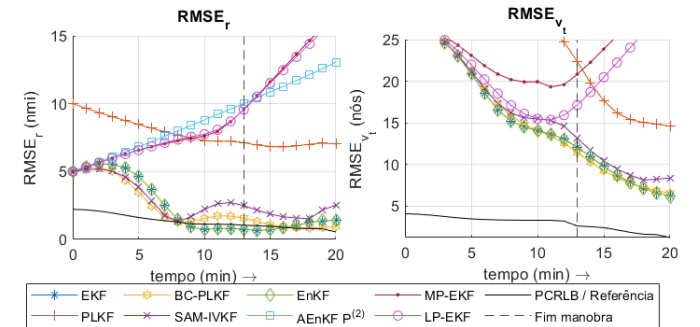
O AEnKF e o EKF também apresentaram problemas de convergência nos cenários com M<sub>3</sub>, o primeiro com índices abaixo de 20% para as 4 primeiras inicializações e o segundo abaixo de 50%. Como pode ser visto na Figura 3, a divergência ocorreu após a primeira manobra, não sendo, então, um problema específico de haver duas manobras. Por outro lado,

o EKF convergiu com bons resultados nos demais cenários, enquanto o AEnKF teve outros problemas de convergência, além de resultados com RMSE destoante dos demais modelos.


 Fig. 3. Resultados RMSE<sub>r</sub> e ANEES do cenário M<sub>3</sub>I<sub>2</sub>.

O PLKF manteve a estabilidade e convergência nos cenários simulados, como previsto em [5], mas, no geral, com resultado de RMSE mais elevado que os demais de coordenada cartesiana, como observado na Figura 3.

O EnKF, o BC-PLKF e o SAM-IVKF tiveram maiores destaques em RMSE, como visto nas Figuras compõem a lista de modelos com os melhores resultados de RMSE, chegando a se confundir para vários cenários, como nas Figuras 3 e 4. Na Tabela II pode ser visto que estes modelos obtiveram os melhores resultados nas principais métricas de desempenho. O EnKF melhorou o desempenho do EKF, não só em RMSE como trazendo a convergência para 100% em todos os cenários. O BC-PLKF ficou entre os 3 melhores RMSE de distância em 13 de 15 cenários e, apesar de não ter obtido o melhor RMSE<sub>r</sub>, os valores são próximos dos demais. Em compensação, destacou-se com ANEES (14 de 15 cenários entre os 3 melhores). Já o SAM-IVKF teve problemas pontuais de convergência (pior resultado de 96,1%), mas, ainda assim, apresentando melhores resultados em diversos cenários.


 Fig. 4. Resultados RMSE<sub>r</sub> e RMSE<sub>v<sub>t</sub></sub> do cenário M<sub>2</sub>I<sub>4</sub>.

Referente às inicializações, I<sub>1</sub> corresponde a um cenário teórico, enquanto I<sub>4</sub> seria a situação mais dificultada já que fornece apenas a distância. As inicializações I<sub>2</sub> e I<sub>3</sub> se aproximam de situações factíveis em aplicações práticas, assim como I<sub>5</sub>, que tem alto potencial de uso prático. Embora I<sub>1</sub> traga melhor RMSE, o ANEES tende a ser elevado, como na Figura 5, onde são comparadas as inicializações para uma

TABELA II  
NÚMERO DE CENÁRIOS POR *ranking* DAS MÉTRICAS

	RMSE <sub>r</sub>			RMSE <sub>v<sub>t</sub></sub>			ANEES		
	1°	2°	3°	1°	2°	3°	1°	2°	3°
EKF	2	2	-	-	2	4	1	2	2
PLKF	3	1	1	2	1	1	-	-	2
BC-PLKF	-	3	10	2	1	6	4	5	5
SAM-IVKF	6	2	2	5	3	2	7	1	3
EnKF	3	5	2	2	5	1	3	4	3
AEnKF ( $P^{(2)}$ )	1	1	-	4	2	-	-	3	-
MP-EKF	-	-	-	-	-	1	-	-	-
LP-EKF	-	1	-	-	1	-	-	-	-

mesma movimentação de um mesmo algoritmo. Já  $I_4$ , no geral, apresentou os piores resultados.

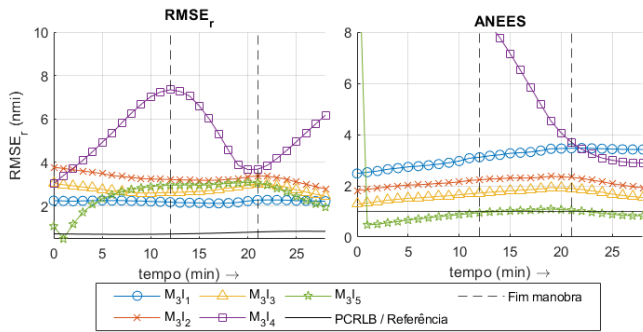


Fig. 5. Resultados RMSE<sub>r</sub> e ANEES do BC-PLKF para cenários com  $M_3$ .

Com relação às demais inicializações, notou-se uma grande proximidade entre os resultados, com  $I_5$  tendo um desempenho um pouco inferior em RMSE<sub>r</sub> em  $M_1$ , mas garantindo os melhores valores de ANEES em todos os cenários, como também visto na Figura 5. O RP-EKF também aumentou a robustez dos modelos, permitindo o EKF sair de uma convergência abaixo de 52% para 99,9%, além de obter valores de RMSE adequados.

No que tange as movimentações dos navios, a descontinuidade provocada pela guinada acentuada em  $M_1$  provocou uma queda da taxa de convergência de alguns modelos, sendo em média de 96,0%, enquanto para  $M_2$  é de 99,3%. Os cenários com  $M_3$  foram os que causaram maior problema para os algoritmos, sem um motivo específico identificado. No entanto, evidenciou a robustez dos modelos BC-PLKF, EnKF e SAM-IVKF, assim como do uso da parametrização de distâncias e velocidades, como mencionado anteriormente.

O tempo de processamento também foi medido, mas não se mostrou um fator crítico. O pior cenário (AEnKF combinado com RP-EKF) teve um tempo de ciclo médio de 39 ms, muito inferior ao período de amostragem de 1 min e, assim, não criaria restrição para analisar diversos alvos simultâneos ou mesmo executar outros modelos ao mesmo tempo.

## VI. CONCLUSÕES

A análise dos 8 modelos em 15 cenários mostrou que os modelos BC-PLKF, EnKF e SAM-IVKF são os candidatos indicados a serem implementados para uma aplicação real, sejam isolados ou de uma forma combinada a ser estudada. Além

disso, o uso do RP-EKF trouxe maior robustez aos modelos e, assim, se tornaria o método preferencial de inicialização dos modelos citados.

Para uma evolução do trabalho, serão necessários testes com dados reais e experimentação em execução contínua para avaliação da convergência após longo período e com sucessivas manobras e deslocamentos sem alteração de rumo. Também será necessária uma análise do impacto da manobra, com o intuito de avaliar o que possa afetar o desempenho do filtro em uma situação real, como ocorreu em  $M_3$  para diversos modelos.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do Instituto de Pesquisas da Marinha (IPqM), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

## REFERÊNCIAS

- [1] V. Aidala, *Behavior of the Kalman filter applied to bearings-only target motion analysis*. Relatório Técnico 4984, Naval Underwater Systems Center, Newport, R.I., USA, nov. 1976.
- [2] D. Kourkoulis, *Bearing-Only Target Tracking: maneuvering target*. Master's thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, USA, 1984.
- [3] P. S. R. Diniz, "Kalman Filters". In: *Adaptive Filtering*, 5th ed., cap. 14, Switzerland, Springer Cham, 2020. doi: 10.1007/978-3-030-29057-3.
- [4] A. G. Lingren e K. F. Gong, "Position and Velocity Estimation Via Bearing Observations", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. AES-14, n. 4, pp. 564–577, 1978.
- [5] V. J. Aidala, "Kalman Filter Behavior in Bearings-Only Tracking Applications", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. AES-15, n. 1, pp. 29–39, 1979. doi: 10.1109/TAES.1979.308793
- [6] N. H. Nguyen e K. Doğançay, "Improved Pseudolinear Kalman Filter Algorithms for Bearings-Only Target Tracking", *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 65, n. 23, pp. 6119–6134, 2017.
- [7] T. Sun e M. Xin, "Bearings-Only Tracking Using Augmented Ensemble Kalman Filter", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 28, n. 3, pp. 1009–1016, 2020. doi: 10.1109/TCST.2018.2890370.
- [8] H. Hoelzer, G. Johnson e A. Cohen, *Modified Polar Coordinates – The Key to Well Behaved Bearings Only Ranging*. IBM Federal System Division, Shipboard and Defense Systems, Virginia, USA, ago. 1978.
- [9] V. Aidala e S. Hammel, "Utilization of modified polar coordinates for bearings-only tracking", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 28, n. 3, pp. 283–294, 1983. doi: 10.1109/TAC.1983.1103230.
- [10] A. Jawahar e S. Rao Koteswara, "Modified Polar Extended Kalman Filter (MP-EKF) for Bearings - Only Target Tracking", *Indian Journal of Science and Technology*, v. 9, pp. 1 – 5, set. 2016.
- [11] T. Brehard e J.-P. L. Cadre, "Closed-form posterior Cramer-Rao bounds for bearings-only tracking", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 42, n. 4, pp. 1198–1223, 2006.
- [12] B. La Scala e M. Moreland, "An analysis of the single sensor bearings-only tracking problem". In: *2008 11th International Conference on Information Fusion*, pp. 1–6, 2008
- [13] N. G. Peach, *Bearings Only Tracking Using a Set of Range Parameterised Extended Kalman Filters*. Doctoral thesis, University of Bath, UK, 1997.
- [14] A. C. Cameron e P. K. Trivedi, "Linear Models". In: *Microeconometrics: Methods and Applications*, 1 ed., cap. 4, New York, USA, Cambridge University Press, 2005.
- [15] M. K. Tippett, J. L. Anderson *et al*, "Ensemble Square Root Filters", *Monthly Weather Review*, v. 131, n. 7, pp. 1485 – 1490, 2003.
- [16] S. Oladyskhin e W. Nowak, "Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion", *Reliability Engineering and System Safety*, v. 106, pp. 179–190, 2012. ISSN: 0951-8320.
- [17] P. Tichavsky, C. Muravchik e A. Nehorai, "Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering", *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 46, n. 5, pp. 1386–1396, 1998.