

# Aplicação da Teoria de Fractais em Transformador de Impedância do Tipo Klopfenstein em Microfita

Mayk A. Lamim, Rafael Macedo, Daniel D. Silveira, Álvaro A. M. Menezes

**Resumo**— Este artigo apresenta a aplicação da teoria de fractais em um transformador de impedância do tipo Klopfenstein em microfita para a faixa de frequências de 500 MHz, visando a redução do seu tamanho. Foi utilizado o substrato FR-4 de espessura de 1,6 mm. Para validar o estudo, foram simulados através do software CST e construídos três transformadores de impedância em microfita de 50 Ohms para 25 Ohms: um transformador ordinário de quarto de onda de três seções, um transformador do tipo Klopfenstein, e um transformador do tipo Klopfenstein com a aplicação da teoria de fractais. Os resultados das medidas são apresentados e analisados.

**Palavras-Chave**— Geometria Fractal, Klopfenstein, Sierpinski, Transformador de Impedância para RF.

**Abstract**— This article describes the application of the fractal theory to a microstrip Klopfenstein impedance transformer for the frequency of 500 MHz and above aiming size reduction. The substrate used for simulations in CST and practical implementation was the FR-4. Three impedance transformers are analyzed in this article: an ordinary quarter wave transformer with three sections, a Klopfenstein transformer, and a partitioned Klopfenstein transformer with the mentioned fractal theory. Simulated and practical results are presented and discussed.

**Keywords**— Fractal Geometry, Impedance Transformer, Klopfenstein, Sierpinski.

## I. INTRODUÇÃO

O aumento da banda de transformadores de impedância possibilita também o aumento da banda de dispositivos que usam este elemento básico de circuitos de rádio-frequência, como amplificadores de RF. Entretanto, o aumento da banda destes dispositivos tem relação direta com o seu tamanho físico. Técnicas de diminuição do tamanho físico do transformador são então desejadas, a fim de minimizar seu tamanho nas placas de circuito impresso.

Os três tipos de transformadores de impedância mais usuais são transformador de quarto de onda ordinário, formado por uma ou mais seções de linha de quarto de onda [1], o transformador de linha afilada, que possui uma variação contínua na impedância característica da linha, sendo um dos mais conhecidos a linha Chebyshev [2], e o Klopfenstein, que visa uma transformação de impedância otimizada [3].

Este artigo aborda uma investigação sobre a possibilidade da redução de tamanho dos transformadores de impedância do

tipo Klopfenstein utilizando a teoria de fractais, uma vez que estes transformadores apresentam um ótimo desempenho na prática em comparação com os transformadores de quarto de onda.

## II. ABORDAGEM TEÓRICA

Esta seção inclui detalhes acerca dos transformadores de impedância abordados e sobre a teoria de fractais.

### A. Transformador de Impedância de Quarto de Onda

O transformador de quarto de onda é um circuito simples e útil para casar uma impedância de carga real com uma linha de transmissão [4]. O comprimento do mesmo é definido como  $\frac{\lambda}{4}$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda no substrato adotado. Esta dependência limita a largura de banda do transformador. Uma forma de contornar este problema é utilizar mais estágios de transformação, o que conseqüentemente aumenta o seu tamanho físico, sendo este um ponto negativo para a construção de placas de circuito impresso. Logo, técnicas que possam manter a largura de banda do transformador e reduzir o seu tamanho físico são desejáveis.

### B. O Transformador de Klopfenstein

O transformador de Klopfenstein se baseia em um formato cônico, que em geral é de construção prática mais trabalhosa, porém funciona bem a altas frequências. Segundo [7], a teoria dos projetos de arranjos ideais de transformadores em cascata pode ser transformada no projeto de cones contínuos de linha de transmissão. Logo, um transformador de impedância possuindo vários estágios se aproxima de uma estrutura cônica ligando a impedância de entrada e a impedância de saída para à de transmissão. Esse procedimento já foi utilizado a fim de melhorar a largura de banda operacional e alcançar um design compacto de uma antena combinada, utilizando o método de conicidade de Klopfenstein [8]. O cone de impedância de Klopfenstein provou ser ideal no sentido de que se encontra uma reflexão mínima sobre a largura de banda [9]. De acordo com Klopfenstein, há uma mudança descontínua da impedância característica em cada extremidade, bem como uma mudança contínua ao longo do comprimento do cone [7]. O transformador de impedância de Klopfenstein pode ser pensado como um caso limitante do transformador de impedância Chebyshev [10], em que o comprimento da seção cônica pode ser calculada conforme (1).

$$L = 300 \frac{A}{2\pi f_0} \quad (1)$$

Mayk A. Lamim, Circuitos Elétricos, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, e-mail: mayk.alves@engenharia.ufjf.br; Rafael Macedo, Circuitos Elétricos, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, e-mail: rafael.macedo2016@engenharia.ufjf.br; Daniel D. Silveira, Circuitos Elétricos, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, email: danielsilveira@engenharia.ufjf.br; Álvaro A. M. Menezes, Circuitos Elétricos, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, email: alvaro@engenharia.ufjf.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pela Universidade Federal de Juiz de Fora.

$$A = \cosh^{-1} \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma_m} \right) \quad (2)$$

Em (1),  $L$  é o comprimento do cone em mm e  $f_0$  é a frequência de operação. Sendo assim, Klopfenstein afirmou que ao se reduzir a frequência pela metade o comprimento irá dobrar de tamanho. Em contrapartida uma suavidade baixa da conicidade se assemelha a um transformador de quarto de onda.

### C. Geometria Fractal

Fractais podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente através de processos recursivos, apresentando determinadas características que por várias vezes são encontradas em formas da natureza [5].

Existem duas formas principais de se analisar e estudar a geometria fractal: a primeira delas é através da retirada, ou seja, remover partes da figura inicial; a segunda forma é através de processos que mudam a geometria da figura inicial, ou seja, a cada análise a figura é alterada.

Para a aplicação dos fractais no transformador de impedância de Klopfenstein foi selecionado um estudo de geometria fractal desenvolvido por Sierpinski, conhecido como *Tapete de Sierpinski*. O *Tapete de Sierpinski* se trata de um quadrado plano em que é aplicado a teoria de fractais citada acima, ou seja, são retiradas partes da figura original. Para se construir o *Tapete de Sierpinski* deve-se dividir o quadrado em nove quadrados iguais e retirando o quadrado central será criado a figura geradora. A partir de cada iteração feita será reproduzido o mesmo processo a cada quadrado que não foi retirado. Pode-se observar a construção da figura geradora e duas iterações subsequentes na Fig. 1.

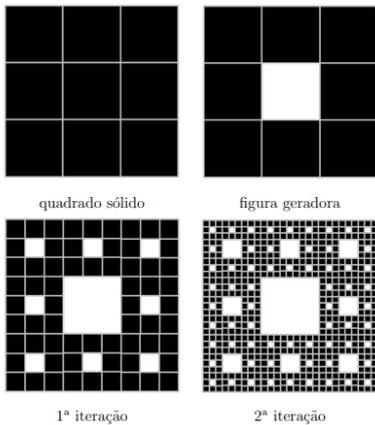


Fig. 1. Sequência do processo iterativo de construção do Tapete de Sierpinski [5].

Neste estudo de geometria fractal é usado o conceito matemático de auto-semelhança, que se trata da não alteração visual da figura geométrica inicial, mesmo que aconteça uma ampliação ou redução do tamanho da figura geométrica, neste caso do quadrado. Para o *Tapete de Sierpinski* é utilizado a auto-semelhança na divisão do quadrado em nove partes iguais e exatas, sendo assim um elemento importante do processo de criação do mesmo. Um fractal possui um número infinito de

pequenas cópias dele próprio, e esta propriedade se chama auto-semelhança [6].

### III. DESENVOLVIMENTO DAS SIMULAÇÕES

Para a investigação dos transformadores de impedância foi utilizado o software *CST Studio Suite*, e para todos os transformadores o modelo base inicial foi o mesmo. A construção do projeto no *CST Studio Suite* utilizou as seguintes configurações: Create a new project → MW & RF & Optical → Planar Couplers & Dividers → Time Domain → (E-field; H-field; Power flow; Power loss). Após ter feito as configurações foi proposto o seguinte setup das frequências  $f_{min} = 0,1$  GHz e  $f_{max} = 3$  GHz, utilizando uma acurácia de -50 dB e uma frequência de operação próximo de 500 MHz.

Os transformadores de impedância construídos apresentam na porta de entrada uma impedância  $Z_0 = 50\Omega$  e uma impedância de saída de  $Z_l = 25\Omega$ . Foi proposto que a entrada e a saída dos transformadores tivessem 10 mm de comprimento. Para o substrato do projeto foi adotado o material *FR-4 (loss free)*, sem perdas, com  $\epsilon_r = 4,3$  e espessura de 1,53 milímetros. Para simulações este valor de  $\epsilon_r$  foi considerado razoável.

Na Tabela I estão as medidas em milímetros e a impedância característica em ohms utilizadas para cada um dos estágios do transformador de três seções de quarto de onda.

TABELA I

DIMENSÕES DO TRANSFORMADOR DE IMPEDÂNCIA DE QUARTO DE ONDA COM TRÊS SEÇÕES.

-	Entrada	Seção 1	Seção 2	Seção 3	Saída
Z ( $\Omega$ )	50,00	43,00	33,80	26,10	25,00
l (mm)	10,00	69,60	68,40	67,20	10,00
w (mm)	3,12	3,79	5,44	7,75	8,44

A resposta do parâmetro  $S_{11}$  em dB deste transformador é mostrada na Fig. 2.

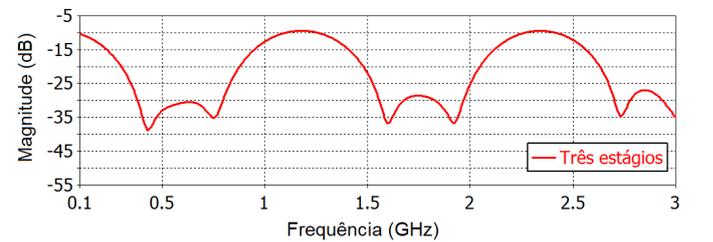


Fig. 2. Resposta do parâmetro  $S_{11}$  (dB) do transformador de impedância retangular de três estágios construído no *CST Studio Suite*.

Através da Tabela I é observado que o transformador de impedância de três estágios possui o tamanho de 225,20 milímetros. Considerando o limiar de -20 dB como limite aceitável para largura de banda, observa-se através da Fig. 2 uma largura de banda de aproximadamente 575 MHz. Pode-se observar através do gráfico a repetição do comportamento para frequências mais altas, como esperado neste tipo de transformador de quarto de onda.

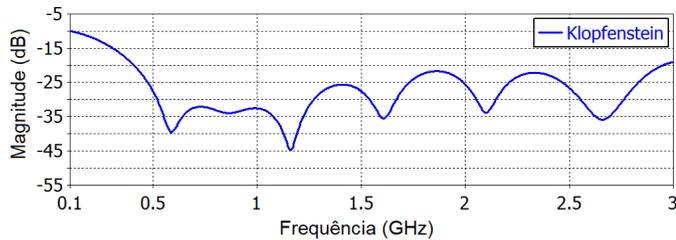
Para a construção do transformador de Klopfenstein foram utilizadas as Eq. (1) e (2) e assim construído o referido transformador em 10 GHz. Após isto, utilizando o escalonamento citado por Klopfenstein, o transformador foi redimensionado para a frequência de 500 MHz. Este transformador possui um estágio cônico interligando a entrada e a saída através de um sólido formado por uma curva com suavidade baixa de 0,1 que se aproxima de uma linha retilínea na seção cônica. A Tabela II mostra as medidas em milímetros para a construção do transformador de Klopfenstein, e as impedâncias características para cada estágio em ohms.

TABELA II

DIMENSÕES DO TRANSFORMADOR DE IMPEDÂNCIA DE KLOPFENSTEIN.

-	Entrada	Estágio Cônico	Saída
Z ( $\Omega$ )	50,00	nula	25,00
l (mm)	10,00	192,10	10,00
w (mm)	3,12	-	8,44

Pode-se observar através da Tabela II que o transformador de impedância de Klopfenstein tem o tamanho de 212,10 milímetros, um pouco menor que o transformador de três estágios, tendo uma redução de 5% no tamanho final do projeto. A largura de banda deste transformador é apresentada na Fig. 3.


 Fig. 3. Resposta do parâmetro  $S_{11}$  (dB) do transformador de impedância Klopfenstein construído no CST Studio Suite.

Pode-se também perceber uma melhora significativa na banda do projeto. O gráfico da Fig. 3 nos mostra que o transformador de Klopfenstein atinge o limiar de -20 dB na frequência de 408 MHz e permanece abaixo desse limiar até quase 3 GHz.

Por último foi construído o transformador de Klopfenstein particionado em 10 estágios sendo aplicando a teoria de fractal com um fator de  $\frac{1}{3}$  como mostrado na Fig. 4. Como relatado anteriormente, foi utilizando o conceito do tapete de Sierpinski em cada um dos 10 estágios do transformador. Para a construção dos fractais foi dividido tanto a largura, quanto o comprimento de cada estágio por 3 para que fosse aplicado a geometria fractal, retirando a divisão central de cada estágio. As medidas e impedâncias características de cada estágio estão sendo mostradas na Tabela III.

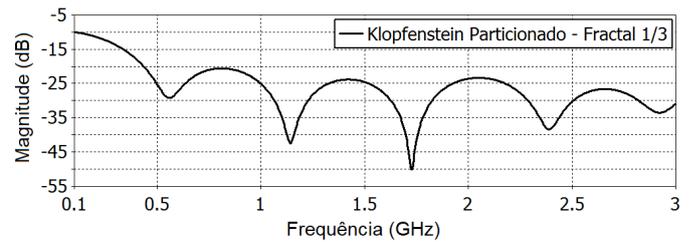

 Fig. 4. Projeto do transformador de impedância Klopfenstein particionado com fator de aplicação do fractal de  $\frac{1}{3}$  construído no CST Studio Suite.

TABELA III

DIMENSÕES DO TRANSFORMADOR DE IMPEDÂNCIA DE KLOPFENSTEIN.

-	Entrada	Seção 1	Seção 2	Seção 3
Z ( $\Omega$ )	50,00	44,01	40,62	37,73
l (mm)	10,00	12,43	12,43	12,43
w (mm)	3,12	3,61	4,09	4,57
-	Seção 4	Seção 5	Seção 6	Seção 7
Z ( $\Omega$ )	35,18	33,02	31,11	29,38
l (mm)	12,43	12,43	12,43	12,43
w (mm)	5,06	5,54	6,02	6,51
-	Seção 8	Seção 9	Seção 10	Saída
Z ( $\Omega$ )	27,87	26,51	25,65	25,00
l (mm)	12,43	12,43	12,43	10,00
w (mm)	6,99	7,47	7,96	8,44

A Fig. 5 mostra a resposta em magnitude do parâmetro  $S_{11}$  (dB) do projeto do transformador de Klopfenstein particionado em dez seções, e aplicado o fator de  $\frac{1}{3}$  da teoria de fractal. Através da geometria fractal foi possível reduzir significativamente o tamanho do projeto, mantendo aproximadamente as mesmas características do parâmetro  $S_{11}$  do transformador de Klopfenstein anterior.


 Fig. 5. Resposta do parâmetro  $S_{11}$  (dB) do transformador de impedância Klopfenstein particionado com fator de aplicação do fractal de  $\frac{1}{3}$  construído no CST Studio Suite.

A partir da Tabela III observa-se que o transformador particionado apresentou o menor comprimento físico em microfita para as mesmas características de operação dos transformadores analisados anteriormente: 114,30 milímetros. Comparando ao transformador de impedâncias de três estágios, foi observada uma redução de aproximadamente 50 % do comprimento total do projeto. A resposta em magnitude apresentada na Fig. 5 mostra que o transformador atinge o limiar de -20 dB na frequência de 433 MHz e se mantém abaixo desse limiar.

#### IV. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS SIMULADOS

A Fig. 6 mostra as três curvas de resposta superpostas, evidenciando a largura de banda de cada um dos transformadores de impedância.

A curva 1 apresentada na Fig. 6 refere-se à resposta do transformador de impedância de quarto de onda com três estágios, a curva 2 é a resposta do transformador de impedância de Klopfenstein e a curva 3 é a resposta do transformador de Klopfenstein particionado em dez estágios, com geometria fractal, com um fator de  $\frac{1}{3}$ . Esse fator da geometria de fractal foi escolhido por ter apresentado a melhor resposta em relação à largura de banda. Pode-se então observar que a metodologia aplicada aproximou o comportamento do transformador de tamanho reduzido utilizando a teoria de geometria de fractais

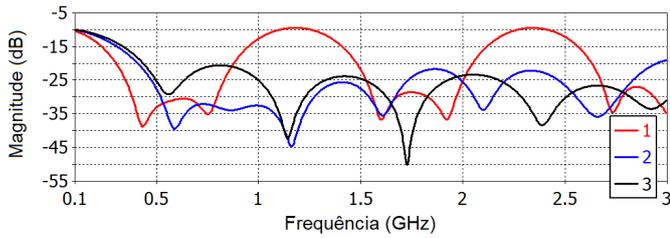


Fig. 6. Comparação das respostas em magnitudes (dB) dos três projetos propostos.

ao Klopfenstein original. A Tabela IV traz a comparação das dimensões físicas dos projetos.

TABELA IV  
COMPARAÇÃO NO TAMANHO DOS TRANSFORMADORES.

Transformador	Comprimento (mm)	Redução
Três estágios	225,20	-
Klopfenstein	212,10	5 %
Particionado	114,30	50%

## V. RESULTADOS PRÁTICOS

Os protótipos para cada um dos transformadores simulados foram construídos conforme mostrados na Fig. 7. Os resultados das medidas realizadas serão apresentados nesta seção.



Fig. 7. Foto dos transformadores construídos.

Em um primeiro momento foram construídos dois transformadores iguais de cada tipo e foi feita a união dos dois pelo lado de  $25 \Omega$  para se verificar a perda por inserção, medida pelo parâmetro  $S_{21}$ . Dividindo essa perda em dB por dois é possível quantificar as perdas de cada um dos transformadores em dB. As Figs. 8, 9 e 10, mostram respectivamente a perda por inserção do transformador de impedância de três estágios, a perda por inserção do transformador de Klopfenstein, e a perda por inserção do transformador de Klopfenstein particionado com um fator de  $\frac{1}{3}$  de fractal aplicado.

Os resultados do parâmetro  $S_{11}$  dos transformadores são apresentados nas Figs. 11, 12 e 13, sendo respectivamente a resposta para o transformador de quarto de onda de três estágios, para o transformador de Klopfenstein e para o transformador de Klopfenstein particionado.

A Tabela V mostra um resumo das medidas realizadas. Observa-se que a técnica de redução de tamanho do transformador de Klopfenstein apresentou um resultado satisfató-



Fig. 8. Parâmetro  $S_{21}$  (dB) do transformador de quarto de onda de três estágios (2 transformadores).



Fig. 9. Parâmetro  $S_{21}$  (dB) do transformador do tipo Klopfenstein (2 transformadores).

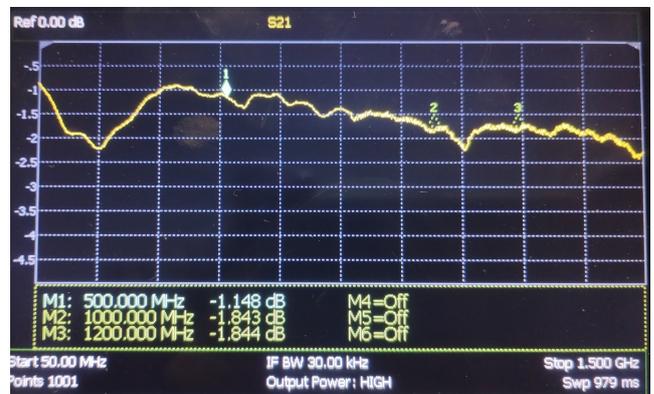


Fig. 10. Parâmetro  $S_{21}$  do transformador de Klopfenstein particionado com aplicação de fractal (2 transformadores).

rio, aproximando o seu comportamento ao transformador de Klopfenstein original.

## VI. CONCLUSÕES

Este trabalho propõe a aplicação da teoria de fractais em um transformador de impedância do tipo Klopfenstein em microfita. Foram apresentados resultados simulados utilizando o software CST e também medidos. A placa utilizada para a construção do projeto possui espessura de 1,6 mm e o substrato de FR-4. Baseado-se nos resultados das simulações obtidos no software CST, confeccionou-se os protótipos dos três transformadores estudados: um transformador de quarto

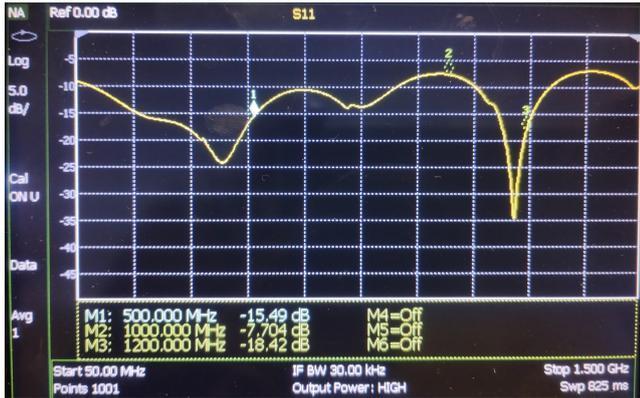


Fig. 11. Medida do parâmetro  $S_{11}$  do transformador de três estágios.



Fig. 12. Medida do parâmetro  $S_{11}$  do transformador de Klopfenstein.



Fig. 13. Medida dos parâmetros  $S_{11}$  do transformador de Klopfenstein particionado com aplicação de fractal.

TABELA V

VALORES MEDIDOS DOS PARÂMETROS  $S_{11}$  E  $S_{21}$  PARA 500 MHz, 1000 MHz E 1200 MHz.

Três Estágios	500 MHz	1000 MHz	1200 MHz
$S_{11}$ (dB)	-15,49	-7,70	-18,42
$S_{21}$ (dB)	-1,09	-2,50	-3,72
Klopfenstein	500 MHz	1000 MHz	1200 MHz
$S_{11}$ (dB)	-20,39	-9,13	-9,37
$S_{21}$ (dB)	-1,23	-1,86	-2,21
Particionado	500 MHz	1000 MHz	1200 MHz
$S_{11}$ (dB)	-12,87	-9,30	-11,50
$S_{21}$ (dB)	-1,15	-1,84	-1,84

de onda de três estágios, um transformador de Klopfenstein e um transformador de Klopfenstein com a aplicação de teoria de fractais. Pode-se então concluir através das simulações e das medidas dos protótipos que o transformador particionado e projetado com a geometria fractal traz um resultado similar ao transformador do tipo Klopfenstein original, com uma redução de praticamente 50% do tamanho, evidenciando a vantagem da aplicação da geometria fractal para este dispositivo.

#### AGRADECIMENTOS

Programa de Pós-Graduação da Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora (PPEE)-UFJF, à Capes e à Fapemig. Este estudo foi financiado pela Coordenacao de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivel Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

#### REFERÊNCIAS

- [1] W. L. Chen, G. M. Wang, Y. N. Qi, and J.G. Liang, "Fractal-Shaped Stepped-Impedance transformers for wideband application," *Microwave and Optical Technology Letters*, v. 49, n. 7, p. 1628-1630, 2007.
- [2] L. S. Demenicis, "Transformadores de impedância banda larga para dispositivos optoeletrônicos," Tese de Doutorado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. pp.34-84. Maio (2004).
- [3] M. Esa, N. N. A. Malik, M. K. H. Ismail, and S.A. Hamzah, "Performance Investigation of Microstrip Klopfenstein Tapered Line Impedance Transformer using MathCAD Software for Communication System," *Applied Mechanics and Materials*, vol. 781, pp 57-60. 2015.
- [4] D. M. Pozar, "Microwave Engineering," 656f. Wiley; 4ª edição (2021).
- [5] R. S. R. Nunes, "Geometria Fractal e Aplicações," 78f. Tese (Mestre em Ensino da Matemática) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, Portugal, 2006.
- [6] T. A. F. Silva "Introdução à Geometria Fractal". Produção Científica - Universidade de Cabo Verde. Cabo Verde, 2007.
- [7] R. W. Klopfenstein, "A Transmission Line Taper of Improved Design," *Proceedings of the ire*, pp. 31-35. 1956.
- [8] S. Wang, and Y. Xie, "Design and Optimization of High-Power UWB Combined Antenna Based on Klopfenstein Impedance Taper," *IEEE Transactions on Antennas and propagation*, vol. 65, NO. 12, 6960-6967. December 2017.
- [9] A. O. Bah, P. Y. Qin, and Y. J. Guo, "An extremely wideband tapered balun for application in tightly coupled arrays," in *Proc. IEE-APS Top. Conf. (APWC)*, Sep. pp. 162-165. 2016.
- [10] H. El Kamchouchi, and G. Abouelseoud. "MAMA: a new methodically designed broadband microstrip antenna using off-the-shelf components," *IEEE Antenna and Propagation Magazine*, Vol. 48, Iss. 2, pp. 72-81, (2006).
- [11] M. Steer, "Fundamentals of Microwave and RF Design," 244f. NC State University; 3rd ed. edição(2019).