

A Transformada Quaterniônica de Fourier sobre Grafos

Guilherme B. Ribeiro, Juliano B. Lima e José R. de Oliveira Neto

Resumo—Neste artigo, amplia-se o escopo usual do processamento de sinais sobre grafos, considerando sinais quaterniônicos sobre grafos com pesos de arestas também quaterniônicos. A abordagem proposta parte da definição de uma transformada quaterniônica de Fourier sobre grafos (QGFT), cujo cálculo envolve o encadeamento de vários resultados da álgebra dos quaterniônicos. O ferramental introduzido permite tratar holisticamente sinais multivariados sobre grafos, em vez de tratá-los como sinais reais independentes. Por meio de experimentos envolvendo a compressão de dados do mundo real, demonstra-se que o uso da QGFT na aplicação em questão pode prover vantagens em comparação com o uso de sua versão não-quaterniônica.

Palavras-Chave—Processamento de sinais sobre grafos, quaterniônicos, transformada de Fourier, compressão de dados.

Abstract—In this paper, we extend the usual scope of graph signal processing, considering quaternionic signals over graphs with edge weights that are also quaternionic. The proposed approach starts from the definition of a quaternion graph Fourier transform (QGFT), whose calculation requires several results from the quaternion algebra. The introduced tool allows multivariate signals over graphs to be treated holistically, instead of being treated as real-valued independent signals. Experiments involving real-world data compression demonstrate that the use of QGFT in such an application can provide advantages compared to the use of its non-quaternionic version.

Keywords—Graph signal processing, quaternions, Fourier transform, data compression.

I. INTRODUÇÃO

O processamento de sinais sobre grafos (GSP) é um ferramental bastante flexível para analisar dados dispostos sobre redes e outras estruturas com topologias arbitrárias. Apesar de maduro, com 10 anos de produção acadêmica, está longe de mostrar-se conclusivo, admitindo diversas abordagens e opções de modelagem em sua aplicação a problemas reais. Os pesos das arestas podem ser feitos reais ou complexos, os grafos podem ser direcionados ou não direcionados, pode-se ou não admitir laços ou múltiplas arestas, por exemplo [1], [2].

Este artigo explora uma decisão de projeto inédita na pesquisa em GSP, o que pode revelar novas ferramentas e aplicações: expandir para além dos complexos a álgebra sobre a qual as amostras do sinal e os pesos das arestas são definidos. O benefício imediato que se espera com esse estudo é o aumento na quantidade de informação armazenada em cada amostra; um objetivo já alcançado com estratégias semelhantes no passado.

Como primeiro exemplo do que se menciona acima, consideremos que, há décadas, na Engenharia Elétrica, têm sido explorados os benefícios de lidar com mais de uma informação

de valor real (p. ex., magnitude e fase) codificada em uma única amostra de sinal complexo. Em linha semelhante, foi concebida uma família de transformadas bidimensionais sobre quaterniônicos [3], [4], uma álgebra associativa \mathbb{H} formada por números da forma $q = a + bi + cj + dk$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Essas transformadas têm sido usadas, por exemplo, no processamento holístico de imagens coloridas [5]–[9] e na análise de sinais bivariados [10]–[12].

Este trabalho introduz, pela primeira vez na literatura, fundamentos do que se pode denominar *processamento de sinais quaterniônicos sobre grafos*. O foco do trabalho é voltado à definição da transformada quaterniônica de Fourier sobre grafos (Seção II), ao estudo de grafos que admitam a referida definição (Seção III) e a uma aplicação dos conceitos desenvolvidos à compressão de sinais sobre grafos (Seção IV).

II. A TRANSFORMADA QUATERNIÔNICA DE FOURIER SOBRE GRAFOS

No cerne da análise vértice-frequência do GSP, está a ideia de que uma autobase de um operador de deslocamento no grafo atua como uma base de Fourier para o respectivo espaço de sinais. No caso quaterniônico, define-se um sinal s sobre o grafo $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ | $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ como $s : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{H}$ | $s(v_i) = s_i$; \mathbf{A} é a matriz de adjacência de \mathcal{G} , que é tomada como operador quaterniônico de deslocamento no grafo (QGSO). A extensão direta da ideia original da transformada para o cenário em questão é estabelecida na definição a seguir.

Definição 1. Dado o grafo $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$, com $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$, a transformada quaterniônica de Fourier sobre grafos (QGFT) é a projeção de um sinal num grafo sobre o autoespaço de \mathbf{A} .

Embora a descrição da QGFT seja conceitualmente simples, o seu cálculo requer que se considere uma série de questões algébricas. Essas são consideradas nas subseções a seguir e culminam com a proposição de um algoritmo para o cômputo da transformada e com a consolidação de um critério de variação total para ordenação das respectivas frequências.

A. Autodecomposição do operador de deslocamento

O primeiro passo para calcular uma QGFT é gerar uma autobase da matriz de adjacência \mathbf{A} , cuja decomposição simplética é dada por $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j$, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$; sua diagonalizabilidade tanto implica quanto requer a de sua matriz complexa adjunta [13], [14]

$$\chi_{\mathbf{A}} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

em que o símbolo “ \triangleq ” sobre uma matriz indica que se está tomando o conjugado complexo dos seus elementos. Além disso, os autovalores de \mathbf{A} podem ser tomados como metade dos de $\chi_{\mathbf{A}}$. Especificamente, eles podem ser considerados

como a união do conjunto de autovalores com parte imaginária positiva e o conjunto de autovalores *distintos* com parte imaginária nula [13].

Uma vez definidos os autovalores desejados de χ_A , escrevendo $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$, a matriz \mathbf{V} é montada a partir dos autovetores de χ_A com o apoio da expressão

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ -\bar{\mathbf{v}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ -\bar{\mathbf{v}}_2 \end{pmatrix} \lambda.$$

No lado esquerdo da equação, encontram-se χ_A e um de seus autovetores, que é escrito em termos de um vetor coluna quaterniônico $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{j}$, correspondente ao autovetor de \mathbf{A} associado ao autovalor λ [13]. Uma vez escolhidos os autovalores de χ_A , é possível montar $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ dos respectivos autovetores de χ_A segmentando-os com $2n$ -pontos numa primeira metade, \mathbf{v}_1 (parte simplex de \mathbf{v}), e numa segunda metade, $-\bar{\mathbf{v}}_2$ (em que \mathbf{v}_2 é a parte perplex de \mathbf{v}).

Em suma, consegue-se obter \mathbf{V} de \mathbf{A} , usando a sua complexa adjunta para evitar a sua autodecomposição direta. Porém, a questão de como obter \mathbf{V}^{-1} , se existir, se coloca de imediato, afinal \mathbf{V} corresponde ao *inverso* da QGFT.

B. Inversão da matriz de autovetores e ordenação espectral

O estudo sobre a inversão de matrizes de quatérnios desenvolvido parte de um algoritmo proposto em [15], em que se destaca a utilidade dos chamados complementos de Schur no cálculo da inversa de qualquer matriz $\mathbf{M} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ sobre o anel \mathcal{R} . Dado que \mathbf{M} é escrito em forma de bloco,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

e sob o requisito de que $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{k \times k}$ é inversível, o complemento de Schur de \mathbf{A} em \mathbf{M} é definido como

$$\mathbf{A}_s \triangleq \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \quad (3)$$

Como \mathbf{A}_s também é inversível, a inversa de \mathbf{M} é dada por

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix},$$

de modo que a inversão de \mathbf{M} é, agora, reduzida à inversão de duas matrizes menores \mathbf{A} e \mathbf{A}_s .

Embora este método leve a uma fórmula fechada para inverter matrizes quaterniônicas, ele requer uma busca exaustiva por uma submatriz que *seja inversível e tenha complemento de Schur inversível*. Diante disso, propõe-se o Algoritmo 1, que provê um compromisso razoável entre velocidade de processamento, tempo de implementação e ampla aplicabilidade.

O raciocínio é o seguinte. Segundo o Teorema 4.3 em [14], uma condição necessária e suficiente para a inversibilidade de uma matriz $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ é a existência de χ_V^{-1} . Além disso, pelo Teorema 4.2 na mesma referência, se χ_V^{-1} existe e tem a forma de uma matriz complexa adjunta, digamos $\chi_V^{-1} = \chi_M$, segue-se que $\mathbf{M} = \mathbf{V}^{-1}$, pois o teorema garante que

$$\chi_V \chi_M = \chi_V \chi_V^{-1} = \mathbf{I}_{2n \times 2n} = \chi_{\mathbf{I}_{n \times n}} \Rightarrow \mathbf{V}\mathbf{M} = \mathbf{I}_{n \times n}, \quad (4)$$

sendo $\mathbf{I}_{m \times m}$ a matriz identidade de ordem m . Ou seja, uma vez calculada a complexa adjunta de \mathbf{V} , basta calcular a sua inversa, se existir, e verificar se ela segue o formato de (1).

Algoritmo 1. Calcule o inverso de uma matriz quaterniônica, se uma condição suficiente para sua existência for atendida:

Input: $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{n \times n}$. **Output:** \mathbf{V}^{-1} ou None.

- 1: $\chi_V \leftarrow \text{to_complex_adjoint}(\mathbf{V})$
- 2: **if** $\det(\chi_V) = 0$ **then**
- 3: **return** None
- 4: **else**
- 5: $\mathbf{U} \leftarrow \text{inverse}(\chi_V)$
- 6: **if not** $\text{has_complex_adjoint_form}(\mathbf{U})$ **then**
- 7: **return** None
- 8: **else**
- 9: $\mathbf{V}^{-1} \leftarrow \text{from_complex_adjoint}(\mathbf{U})$
- 10: **return** \mathbf{V}^{-1}
- 11: **end if**
- 12: **end if**

As funções usadas no algoritmo são descritas a seguir:

- $\text{to_complex_adjoint}$: converte uma matriz quaterniônica em sua forma complexa adjunta.
- $\text{from_complex_adjoint}$: converte uma matriz complexa adjunta em sua forma quaterniônica.
- inverse : computa a inversa de uma matriz complexa.
- $\text{has_complex_adjoint_form}$: verifica se a matriz possui forma complexa adjunta.

Neste ponto, todas as etapas necessárias para gerar a QGFT foram abordadas. Porém, ainda é necessário discutir, no atual contexto, a noção de frequências baixas e altas. Neste sentido, pode-se tomar emprestada do GSP clássico a definição de variação total¹ no grafo como uma *métrica* para frequência. Considera-se, inicialmente, $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ e seus autovalores associados aos autovetores $(\mathbf{v}_i)_{i=0, \dots, n-1}$ ordenados segundo

$$|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_{N-1}| \triangleq |\lambda_{max}|. \quad (5)$$

Com a norma² ℓ_1 de $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^n$ dada por $\|\mathbf{v}\|_1 \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} |v_k|$, tem-se

$$TV_G(\mathbf{s}) \triangleq \left\| \mathbf{s} - \frac{1}{|\lambda_{max}|} \mathbf{A}\mathbf{s} \right\|_1. \quad (6)$$

Escalonando os autovetores \mathbf{v}_i para que tenham norma unitária, ou seja, $\|\mathbf{v}_i\|_1 = 1$, as propriedades associativas e distributivas da multiplicação de quatérnios permitem fazer

$$\begin{aligned} TV_G(\mathbf{v}_k) &= \left\| \mathbf{v}_k - \frac{1}{|\lambda_{max}|} \mathbf{A}\mathbf{v}_k \right\|_1 = \left\| \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k \frac{1}{|\lambda_{max}|} \lambda_k \right\|_1 \\ &= \left\| \mathbf{v}_k \left(1 - \frac{1}{|\lambda_{max}|} \lambda_k \right) \right\|_1 \\ &= \underbrace{\|\mathbf{v}_k\|_1}_{=1} \left| 1 - \frac{\lambda_k}{|\lambda_{max}|} \right| = \left| \lambda_k - |\lambda_{max}| \right| \frac{1}{|\lambda_{max}|}, \end{aligned}$$

o que leva à mesma ordenação de frequências do GSP clássico,

$$\left| \lambda_i - |\lambda_{max}| \right| \leq \left| \lambda_j - |\lambda_{max}| \right| \iff TV_G(\mathbf{v}_i) \leq TV_G(\mathbf{v}_j).$$

¹A *variação total* no grafo de um sinal (não quaterniônico) \mathbf{s} sobre $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ é $TV_G(\mathbf{s}) \triangleq \|\mathbf{s} - \mathbf{A}^{\text{norm}}\mathbf{s}\|_1$, com $\mathbf{A}^{\text{norm}} = |\lambda_{max}|^{-1}\mathbf{A}$ e λ_{max} sendo o autovalor de \mathbf{A} com maior valor absoluto.

²Por simplicidade, neste trabalho, adota-se a norma ℓ_1 , mas os resultados podem ser generalizados para qualquer norma ℓ_p , $p > 1$.

A conclusão é que, uma vez que os autovetores são individualmente *normalizados*, ou seja, escalonados para ter norma unitária, então, quanto mais distante um autovalor estiver do ponto $|\lambda_{max}|$ na reta real do plano complexo, maior é a variação total TV_G do autovetor correspondente; isso significa que maior é a frequência que este autovetor representa. Além do mais, observa-se que o escalonamento implica que o valor de TV_G depende apenas dos autovalores, não de p . Para interpretar o domínio espectral, os autovalores são classificados em ordem crescente da variação total do respectivo autovetor: isso classifica a frequência do menor para o maior.

III. SOBRE A EXISTÊNCIA DE UMA CLASSE DE GRAFOS COM MATRIZ DE ADJACÊNCIA DIAGONALIZÁVEL

Considerando o que se desenvolveu na Seção II, é relevante discutir a existência de uma classe de grafos quaterniônicos para a qual se garanta, de antemão, que o operador de deslocamento seja diagonalizável. No GSP, a razão subjacente para grafos de peso real não direcionados terem matrizes de adjacência diagonalizáveis é que tais matrizes são simétricas, ou, mais geralmente, *normais*; isto é, elas comutam com (porque são iguais a) suas transpostas.

No caso quaterniônico, porém, o fato de \mathbf{A} ser simétrico não tem efeito em provar a diagonalizabilidade de sua complexa adjunta. Assim, grafos quaterniônicos análogos a grafos reais não direcionados, isto é, cujos operadores de deslocamento sejam diagonalizáveis, devem possuir matriz de adjacência com complexa adjunta *normal* (ou seja, comutante com sua transposta Hermitiana). O Teorema 4.2 em [14], cujo autor indica ser demonstrável por verificação direta, estabelece a condição: χ_A é normal ($\chi_A^H \chi_A = \chi_A \chi_A^H$) ou Hermitiano ($\chi_A^H = \chi_A$) se e somente se assim é \mathbf{A} . Para leitura deste resultado especificamente à luz do GSP, uma parte de sua demonstração é desenvolvida a seguir.

Demonstração: A parte do Teorema a ser verificada é: *é verdade que matrizes Hermitianas quaterniônicas possuem adjuntas complexas Hermitianas?* Equivalentemente,

$$\mathbf{A}^H = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n} \Rightarrow \chi_A^H = \chi_A, \quad \chi_A \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \quad (7)$$

Enxergando \mathbf{A} como a matriz de adjacência de um grafo, $A_{i,j} = a + bi + cj + dk$ corresponde ao peso da aresta que vai de v_j a v_i . A hipótese de uma matriz Hermitiana quaterniônica implica $A_{j,i} = \overline{A_{i,j}}$, ou $A_{j,i} = a - bi - cj - dk$. A título de exemplo, um par de vértices conectados neste grafo é representado na Fig. 1, na qual podem ser observadas as arestas em direções opostas e com pesos conjugados.

A Fig. 1 também mostra as arestas que surgiriam separadamente das partes simplex e perplex dos pesos das arestas (diagramas central e à direita). Por exemplo, o peso da aresta $A_{j,i} = a - bi - cj - dk$ satisfaz³

$$A_{j,i} = A_{j,i}^{(s)} + A_{j,i}^{(p)} \mathbf{j}, \quad \text{with} \quad \begin{cases} A_{j,i}^{(s)} = a - bi \\ A_{j,i}^{(p)} = -c - di \end{cases} \quad (8)$$

³Os sobrescritos (s) e (p) denotam uma representação alternativa da decomposição simplética, para evitar sobrecarga de notação com o uso dos índices j e i .

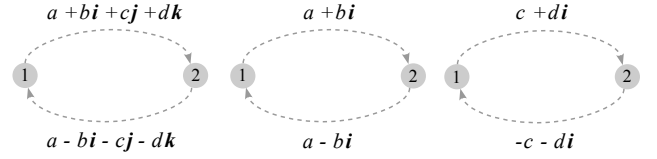


Fig. 1: Dois vértices conectados em um grafo com matriz de adjacência Hermitiana (à esquerda). No centro e à direita, respectivamente, são exibidas as arestas criadas pelas partes simplex e perplex da matriz de adjacência.

Isso (juntamente com a Fig. 1) esclarece a decomposição simplética de \mathbf{A} : sua parte simplex satisfaz $\mathbf{A}_1^T = \overline{\mathbf{A}_1}$ (matriz Hermitiana complexa) enquanto a sua parte perplex satisfaz $\mathbf{A}_2^T = -\mathbf{A}_2$. Assim, o Hermitiano da complexa adjunta produz

$$\chi_A^H = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^H & -\mathbf{A}_2^T \\ \mathbf{A}_2^H & \mathbf{A}_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

precisamente a matriz χ_A , conforme se pretendia provar.

A. Um QGSO Hermitiano possui matriz de autovetores unitária?

Na parte inicial desta seção, apresentou-se uma garantia de que um QGSO Hermitiano possui uma matriz complexa adjunta Hermitiana. Apesar disso, pode-se questionar se isso implica que a respectiva matriz de autovetores é unitária. Para avaliar tal questão, considera-se uma matriz de adjacência quaterniônica Hermitiana (portanto diagonalizável) \mathbf{A} , para a qual se pode escrever $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}$. Como χ_A é complexa e Hermitiana, sua matriz de autovetores (diga-se, Φ) é unitária, de modo que se tem $\chi_A = \Phi \Gamma \Phi^H$. Cada coluna ϕ em Φ é escrita em termos das partes simplex e perplex (que são complexas) da respectiva coluna \mathbf{v} em \mathbf{V} :

$$\phi^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^{(n)} \\ -\overline{\mathbf{v}_2^{(n)}} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Uma vez que Φ é unitária,

$$\phi^{(n)H} \phi^{(n)} = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1^{(n)H} \mathbf{v}_1^{(n)} + \mathbf{v}_2^{(n)T} \overline{\mathbf{v}_2^{(n)}} = 1. \quad (11)$$

Para averiguar se a igualdade final em (11) implica $\mathbf{v}^{(n)H} \mathbf{v}^{(n)} = 1$, o que tornaria \mathbf{V} unitária, descarta-se temporariamente o sobrescrito n da notação e, dado que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{j}$, desenvolve-se

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^H \mathbf{v} &= (\mathbf{v}_1^H - \mathbf{v}_2^T \mathbf{j})(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{j}) \\ &= \mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_2 \mathbf{j} - \underbrace{\mathbf{v}_2^T \mathbf{j} \mathbf{v}_1}_{\mathbf{v}_2^T \overline{\mathbf{v}_1} \mathbf{j}} - \underbrace{\mathbf{v}_2^T \mathbf{j} \mathbf{v}_2 \mathbf{j}}_{-\mathbf{v}_2^T \overline{\mathbf{v}_2}} \\ &= \underbrace{\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \overline{\mathbf{v}_2}}_{=1} + (\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^T \overline{\mathbf{v}_1}) \mathbf{j} \\ &= 1 + (\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^T \overline{\mathbf{v}_1}) \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Como o autovetor $\phi^{(n)} = (\mathbf{v}_1^{(n)} \quad -\overline{\mathbf{v}_2^{(n)}})^T$ é complexo, então satisfaz a restrição adicional $\mathbf{v}^{(n)H} \mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v}_1^{(n)H} \mathbf{v}_1^{(n)} - \mathbf{v}_2^{(n)T} \overline{\mathbf{v}_2^{(n)}} = 0$, pois o produto $\mathbf{v}^{(n)H} \mathbf{v}^{(n)}$ comuta. Assim, um QGSO Hermitiano tem uma matriz unitária de autovetores. Como consequência, a inversa da matriz de autovetores sempre pode ser calculada simplesmente tomando seu conjugado complexo.

IV. EXEMPLOS

Os exemplos apresentados nesta seção foram desenvolvidos utilizando `gspix`, um pacote Python de código aberto construído pelos autores e dedicado à implementação das principais operações do QGSP. O pacote se encontra disponível em <https://github.com/gboaviagem/gspix>.

Como um primeiro exemplo ilustrativo do que se estabeleceu nas Seções II e III, considera-se o grafo da Fig. 2a, que possui matriz de adjacência \mathbf{A} dada em (13). Uma vez que \mathbf{A} é Hermitiana, sua complexa adjunta χ_A possui a forma dada em (14). Como χ_A é complexa e Hermitiana, ela é diagonalizável por uma matriz unitária Φ ; seus autovalores são todos reais e aparecem em pares, conforme observado em (15). Toma-se metade dos autovalores de χ_A (aqueles com parte imaginária positiva, mais metade dos valores reais) para obter os autovalores padrão de \mathbf{A} e os respectivos autovetores, de modo que se tem $\text{diag}(\mathbf{A}) = (-22,835, -6,349, 0, 6,457, 22,726)^T$.

Os autovalores escolhidos determinam os autovetores de χ_A utilizados para montar os autovetores de \mathbf{A} . A matriz de autovetores resultante é omitida, em função da restrição sobre o número de páginas deste artigo. Em todo caso, verifica-se que tal matriz passa no teste de inversibilidade, dado que o seu determinante é $\det(\mathbf{V}) = \det(\chi_V) = 1 \neq 0$, e que ela é unitária, pois o produto $\mathbf{V}\mathbf{V}^H$ produz uma matriz identidade. Assim, a matriz da QGFT é prontamente determinada.

A Fig. 2b fecha o exemplo, descrevendo a variação total TV_G do grafo para cada autovetor normalizado \mathbf{v}_i . Os valores são $TV_G(\mathbf{v}_i) \in \{2, 1,2780, 1, 0,7171, 0,0047\}$, e *permanecem os mesmos* à medida em que p é alterado (vide comentário ao final da Seção II).

No segundo exemplo, avalia-se o uso da QGFT na compressão de dados multidimensionais sobre um grafo. São selecionados 1000 condados dos Estados Unidos (US) para criar, empregando o critério de vizinhos mais próximos em função das respectivas coordenadas geográficas, um grafo não-direcionado com 4158 arestas (vide Fig. 3). Para criar o sinal quaterniônico, quatro variáveis sociodemográficas referentes ao ano de 2017 e relacionadas à saúde financeira da população americana⁴ foram selecionadas:

- **bachelors_2017**: percentual da população que obteve um grau de Bacharelado.
- **median_household_income_2017**: renda familiar média.
- **unemployment_rate_2017**: taxa de desemprego.
- **uninsured_2017**: percentual da população sem seguro.

Uma matriz de adjacência Hermitiana foi criada usando

$$\mathbf{A}_{i,j} = \exp^{-1} \left(\frac{d(i,j)}{\theta} \cdot \frac{q(i,j)}{\|q(i,j)\|} \right), \quad (16)$$

em que $d(i,j)$ é a distância entre os condados i e j (interligados por arestas), e $q(i,j)$ é um quatérnio cujos coeficientes são a diferença absoluta entre os valores de cada uma das variáveis acima listadas, para o mesmo par de condados. Utilizou-se $\theta = 2$, valor que foi selecionado empiricamente.

⁴Extraído da OpenIntro, uma organização sem fins lucrativos focada em divulgar publicações de código aberto de alta qualidade, e disponível em https://www.openintro.org/data/?data=county_complete

Após a diagonalização do operador de deslocamento e a ordenação das frequências segundo a variação total, a QGFT do sinal é calculada e representada na Fig. 4. Embora o sinal apresente um ruído intenso ao longo de todo o espectro, ele claramente possui uma característica passa-baixa proeminente. Assim, o que se faz é reconstruir o sinal (isto é, calcular a QGFT inversa) considerando apenas determinado percentual das componentes de frequência com maior energia no domínio da transformada. Tal percentual é variado ao longo de 20 valores linearmente espaçados entre 5% e 95% (inclusive). O sinal reconstruído é comparado com o sinal original por meio do erro quadrático médio normalizado (NMSE). Uma rotina semelhante é realizada considerando cada uma das variáveis independentemente, o que daria origem a quatro sinais reais. Neste caso, a reconstrução é feita considerando, para cada sinal, um percentual de componentes da GFT com maior energia correspondente a 1/4 do percentual considerado no caso quaterniônico. Assim, nos dois casos, serão armazenados os mesmos números totais de (posições de) componentes espectrais mais relevantes, tornando justa a comparação com base no erro de reconstrução.

A Fig. 5 mostra que o erro de reconstrução no caso quaterniônico (abordagem proposta) é, em geral, menor que o erro no caso não-quaterniônico. Tal vantagem é acentuada quando são preservadas menos de 30% das componentes espectrais mais relevantes. De modo mais específico, quando são preservadas apenas 5% de tais componentes, o NMSE obtido pela QGFT é de apenas 16,4%; considerando o percentual equivalente de componentes preservadas na GFT, o NMSE obtido é de 47,1%. Tal resultado, embora preliminar, sugere que a QGFT tem potencial para uso na compressão de dados multivariados sobre grafos.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A principal contribuição deste artigo foi a ampliação do escopo do GSP ao caso quaterniônico, em que tanto as amostras de um sinal quanto os pesos das arestas do respectivo grafo subjacente podem ser representados por quatérnios. Embora o foco do trabalho tenha sido no tratamento de questões algébricas para viabilização do cálculo de uma transformada quaterniônica de Fourier sobre grafos e no desenvolvimento de exemplos ilustrativos da utilidade dessa ferramenta, outros resultados se encontram em fase de consolidação nesse contexto. Isso inclui conceitos relativos à filtragem de sinais quaterniônicos sobre grafos, os quais, além de complementarem a teoria do QGSP, devem ser aplicáveis, por exemplo, à remoção de ruído de sinais multivariados sobre grafos.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Ortega, P. Frossard, J. Kovacevic, J. M. F. Moura, and P. Vandergheynst, "Graph signal processing: Overview, challenges, and applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 106, no. 5, pp. 808–828, May 2018.
- [2] J. B. Lima, G. B. Ribeiro, W. A. Martins, V. R. M. Elias, and G. Lewenfus, *Processamento de Sinais sobre Grafos: Fundamentos e Aplicações*, Notas em Matemática Aplicada. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2021.
- [3] S. J. Sangwine, "Fourier transforms of colour images using quaternion or hypercomplex numbers," *Electronics Letters*, vol. 32, no. 21, pp. 1979–1980, 1996.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 - 7i - 5j - 1k & 6 + 3i + 7j + 4k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 + 9i + 2j + 6k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 + 4i + 3j + 7k \\ 1 + 7i + 5j + 1k & 0 & 0 & 0 & 7 + 2i + 5j + 4k \\ 6 - 3i - 7j - 4k & 6 - 9i - 2j - 6k & 7 - 4i - 3j - 7k & 7 - 2i - 5j - 4k & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

$$\chi_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 - 7i & 6 + 3i & 0 & 0 & 0 & -5 - 1i & 7 + 4i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 + 9i & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 + 6i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 + 4i & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 + 7i \\ 1 + 7i & 0 & 0 & 0 & 7 + 2i & 5 + 1i & 0 & 0 & 0 & 5 + 4i \\ 6 - 3i & 6 - 9i & 7 - 4i & 7 - 2i & 0 & -7 - 4i & -2 - 6i & -3 - 7i & -5 - 4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 - 1i & -7 + 4i & 0 & 0 & 0 & 1 + 7i & 6 - 3i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 + 6i & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 - 9i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 + 7i & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 - 4i \\ -5 + 1i & 0 & 0 & 0 & -5 + 4i & 1 - 7i & 0 & 0 & 0 & 7 - 2i \\ 7 - 4i & 2 - 6i & 3 - 7i & 5 - 4i & 0 & 6 + 3i & 6 + 9i & 7 + 4i & 7 + 2i & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

$$\text{diag}(\mathbf{\Gamma}) = (-22,835 \quad -22,835 \quad -6,349 \quad -6,349 \quad 0 \quad 0 \quad 6,457 \quad 6,457 \quad 22,726 \quad 22,726)^T. \quad (15)$$

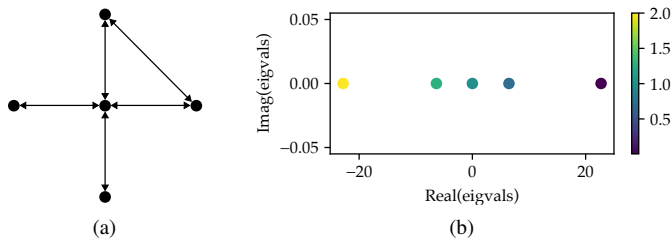


Fig. 2: (a) Grafo usado no exemplo numérico, com arestas bidirecionais indicando que a matriz de adjacência não é simétrica; (b) variação total no grafo (escala pseudocolorida) dos autovetores normalizados, em função dos seus autovalores.

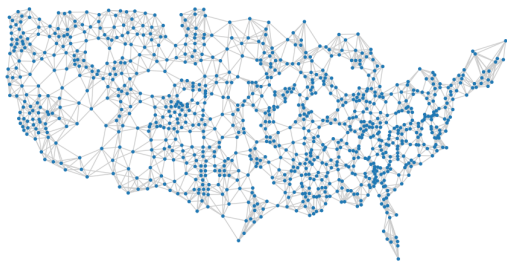


Fig. 3: Grafo de vizinhos mais próximos de alguns dos condados dos Estados Unidos.

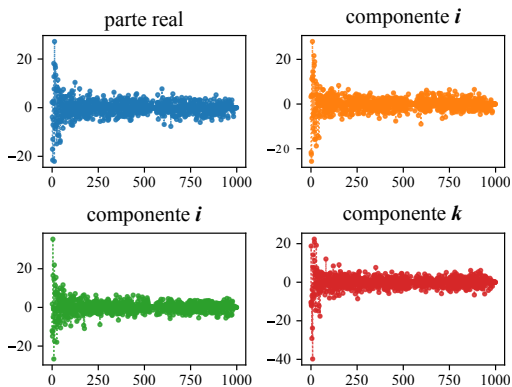


Fig. 4: Espectro do sinal sobre o grafo dos Estados Unidos.

[4] A. M. Grigoryan and S. S. Aghaian, "Commutative quaternion algebra and DSP fundamental properties: Quaternion convolution and Fourier transform," *Signal Processing*, vol. 196, pp. 108533, 2022.

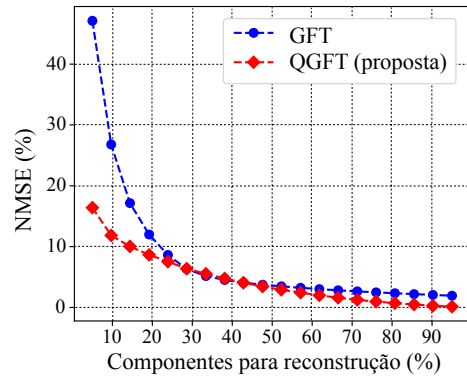


Fig. 5: Erro quadrático médio normalizado em função do percentual de componentes espectrais mais relevantes considerados na reconstrução do sinal.

- [5] T. A. Ell and S. J. Sangwine, "Hypercomplex Fourier transforms of color images," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 16, no. 1, pp. 22–35, 2007.
- [6] B. Chen, C. Zhou, B. Jeon, Y. Zheng, and J. Wang, "Quaternion discrete fractional random transform for color image adaptive watermarking," *Multimedia Tools and Applications*, vol. 77, no. 16, pp. 20809–20837, 2018.
- [7] Y. N. Li, "Quaternion polar harmonic transforms for color images," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 8, pp. 803–806, 2013.
- [8] C. J. Evans, S. J. Sangwine, and T. A. Ell, "Hypercomplex color-sensitive smoothing filters," in *Proceedings 2000 International Conference on Image Processing (Cat. No. 00CH37101)*. IEEE, 2000, vol. 1, pp. 541–544.
- [9] Y. Zhang, J. Zhang, R. Liu, P. Zhu, and Y. Liu, "Key frame extraction based on quaternion Fourier transform with multiple features fusion," *Expert Systems with Applications*, vol. 216, pp. 119467, 2023.
- [10] J. Flamant, N. Le Bihan, and P. Chainais, "Spectral analysis of stationary random bivariate signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, no. 23, pp. 6135–6145, 2017.
- [11] J. Flamant, N. Le Bihan, and P. Chainais, "Time–frequency analysis of bivariate signals," *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2017.
- [12] J. Flamant, P. Chainais, and N. Le Bihan, "A complete framework for linear filtering of bivariate signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 66, no. 17, pp. 4541–4552, 2018.
- [13] G. B. Ribeiro, *Foundations of quaternion graph signal processing and related contributions to fractional-order operators*, Tese de doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Dezembro 2022, <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/50071>.
- [14] F. Zhang, "Quaternions and matrices of quaternions," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 251, pp. 21–57, 1997.
- [15] Nir Cohen and Stefano De Leo, "The quaternionic determinant," *arXiv preprint math-ph/9907015*, 1999.