

# Radiação de Linhas de Corrente Magnética e Elétrica em uma Região Mista com Quatro Meios

Jeferson B. N. Leite, Alexandre C. Oliveira, Augusto C. C. de Lima e Karlo Q. da Costa

**Resumo**— Este trabalho apresenta um modelo numérico para análise da radiação bidimensional de linhas de corrente em uma região mista com quatro meios diferentes. Os meios estão localizados em cada quadrante do plano de análise, e as linhas de corrente magnética e elétrica estão no segundo quadrante. O problema foi inicialmente modelado pelas equações de Maxwell e o método da função de Green. As equações integrais obtidas foram resolvidas pelo Método dos Momentos (MoM). Os resultados mostram um exemplo de aplicação em microondas, onde a região mista é formada por ar, água, solo e floresta, e a frequência de operação é 521 MHz.

**Palavras-chave**— *radiação bidimensional, polarização, meios não homogêneos, funções de Green, Método dos Momentos.*

**Abstract**— This work presents a numerical model for analyzing the two-dimensional radiation of current lines in a mixed region with four different media. The media are located in each quadrant of the analysis plane, and the magnetic and electric current lines are in the second quadrant. The problem was initially modeled by Maxwell's equations and Green's function method. The integral equations obtained were solved by the Method of Moments (MoM). The results show an example of microwave application, where the mixed region is formed by air, water, soil and forest and the operating frequency is 521MHz.

**Keywords**— *two-dimensional radiation, polarization, non-homogeneous media, Green's functions; Method of Moments.*

## I. INTRODUÇÃO

O estudo da radiopropagação terrestre é fundamental para o desenvolvimento dos sistemas de comunicação sem fio [1]. Estes estudos visam principalmente desenvolver modelos precisos e eficientes para descrever o comportamento de sinais de rádio em ambientes reais. Dentre os tipos de modelos existentes na literatura, os determinísticos são os mais precisos para análise de regiões realísticas, no entanto estes são os que exigem mais custo computacional [1].

Existem diversos modelos determinísticos de radiopropagação que simulam ambientes reais não homogêneos [2]-[15]. Trabalhos com não homogeneidade em apenas uma dimensão, por exemplo, regiões com estratificação horizontal, são bem conhecidos na literatura [2]-[6]. Um exemplo de modelo de propagação em floresta com estratificação apenas na vertical é apresentado em [7].

Problemas de propagação mais comuns em aplicações são aqueles com regiões não homogêneas em duas direções, estes casos são às vezes chamados de regiões mistas. Exemplos de trabalhos que modelam estas situações podem ser encontrados em [8]-[15]. Em [8] os autores analisam a propagação em uma

região mista composta pelos meios solo e água, sendo que a aproximação destes é feita por simples impedâncias superficiais equivalentes. Já em [9] é utilizado um método semi-analítico espectral com múltiplas estratificações verticais e uma horizontal. Já os métodos de ótica geométrica com teoria da difração são também amplamente aplicados para estudo da propagação em meios mistos contendo cidades, rios e florestas [10]-[11]. Métodos baseados em equações parabólicas também têm sido utilizados eficientemente para estudo da propagação em regiões mistas entre mares e ilhas em [12]-[13] e ruas e florestas em [14]. Também podemos encontrar na literatura modelos baseados em funções diádicas de Green que utilizam a aproximação de superposição de espalhamento [15]. A maioria destes métodos é válida apenas para determinadas faixas de frequências, e alguns efeitos são considerados de forma aproximada, como por exemplo, os efeitos de difrações em obstáculos.

Neste trabalho apresentamos um modelo numérico para análise do problema de radiação bidimensional de linhas de correntes elétrica e magnética em uma região mista com quatro meios diferentes. Os meios são localizados em cada quadrante do plano de análise e a fonte no segundo quadrante. Utilizamos as equações de Maxwell e o método da função de Green [16] para obter um sistema de equações integrais para os campos nas interfaces dos meios, e o Método dos Momentos (MoM) é utilizado para resolver numericamente este sistema [17]. Os resultados apresentam um exemplo de aplicação em microondas na frequência de 521 MHz, onde os quatro meios considerados são: ar, água, solo e floresta típicos da região amazônica [15]. Alguns resultados obtidos são comparados com o Método dos Elementos Finitos (FEM) [18].

## II. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

### A. Descrição do Problema

A geometria dos problemas analisados neste trabalho é mostrada na Fig. 1. Nesta figura temos uma região mista bidimensional no plano  $xy$  com quatro meios diferentes 1-4 localizados em  $(y>0; x<0)$ ,  $(y>0; x>0)$ ,  $(y<0; x<0)$  e  $(y<0; x>0)$ , respectivamente. As propriedades eletromagnéticas numeradas de cada meio são: permissividade relativa  $\epsilon_{ru}$ , condutividade elétrica  $\sigma_u$ , permissividade complexa  $\epsilon_u$  e permeabilidade  $\mu_u$ , sendo  $u=1-4$ .

A fonte mostrada na Fig. 1 é uma linha de corrente infinita, paralela ao eixo  $z$ , que pode ser magnética ou elétrica:

$$\vec{M}(x, y) = M_0 \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \vec{a}_z \quad (1)$$

$$\vec{J}(x, y) = J_0 \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \vec{a}_z \quad (2)$$

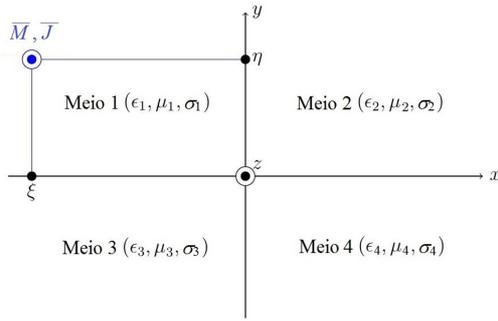


Fig. 1. Geometria do problema de radiação bidimensional (plano  $xy$ ) de uma linha de corrente magnética ou elétrica, paralela ao eixo  $z$ , em uma região com quatro meios localizados em cada quadrante do plano.

onde  $M_0$  é a intensidade da corrente magnética (V),  $J_0$  é a intensidade da corrente elétrica (A),  $\xi$  e  $\eta$  são as posições das fontes localizadas no meio 1. Os campos eletromagnéticos radiados por estas fontes satisfazem as equações de Maxwell:

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} - \bar{M} \quad (3)$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega\epsilon\bar{E} + \bar{J} \quad (4)$$

onde a dependência temporal considerada é  $\exp(j\omega t)$ , sendo  $j$  a unidade imaginária,  $\omega$  a frequência angular e  $t$  a variável temporal. Do caso geral descrito por (3) e (4), analisamos dois casos particulares, sendo um o magnético quando  $\bar{M} \neq 0$  e  $\bar{J} = 0$  e outro o elétrico quando  $\bar{M} = 0$  e  $\bar{J} \neq 0$ . Apresentamos aqui a modelagem apenas do caso magnético e aplicamos o teorema da dualidade para analisar o caso elétrico [19].

Devido ao tipo de geometria (Fig. 1) e a fonte, o problema é bidimensional no plano  $xy$ , ou seja,  $\partial/\partial z = 0$  para todas as componentes de campo. Considerando isto para o caso magnético, o desenvolvimento de (1), (3) e (4) produz uma polarização vertical ( $TM_y$ ) com a seguinte equação da onda escalar para a componente  $z$  do campo magnético ( $H_z$ ):

$$\nabla_{xy}^2 H_z + k^2 H_z = j\omega\epsilon M_z \quad (5)$$

onde  $E_x = (1/j\omega\epsilon)\partial H_z/\partial y$ ,  $E_y = -(1/j\omega\epsilon)\partial H_z/\partial x$ ,  $k = \alpha(\mu\epsilon)^{1/2}$  e  $M_z$  a componente escalar de (1). Como a fonte (1) está no meio 1, à equação (5) é não homogênea para o meio 1 e homogênea para os meios 2, 3 e 4. O problema de valor de contorno é definido por (5) mais a geometria da Fig. 1 e as condições de fronteira de limite e de continuidade das componentes tangenciais dos campos nas interfaces entre os meios.

### B. Sistema de Equações Integrais do Problema

Aplicando o método da função de Green e as condições de fronteira ao problema descrito na seção anterior [16], obtemos as seguintes soluções de  $H_z$  na forma integral para cada meio:

$$H_{z1}(x, y) = -j\omega\epsilon_1 M_0 g_1(\xi, \eta, x, y) - \int_{-\infty}^0 g_1(x', 0, x, y) \frac{\partial H_{z1}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} dx' + \int_0^{+\infty} g_1(0, y', x, y) \frac{\partial H_{z1}}{\partial x'} \Big|_{x'=0} dy' \quad (6)$$

$$H_{z2}(x, y) = - \int_0^{+\infty} g_2(x', 0, x, y) \frac{\partial H_{z2}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} dx' - \int_0^{+\infty} g_2(0, y', x, y) \frac{\partial H_{z2}}{\partial x'} \Big|_{x'=0} dy' \quad (7)$$

$$H_{z3}(x, y) = \int_{-\infty}^0 g_3(x', 0, x, y) \frac{\partial H_{z3}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} dx' + \int_{-\infty}^0 g_3(0, y', x, y) \frac{\partial H_{z3}}{\partial x'} \Big|_{x'=0} dy' \quad (8)$$

$$H_{z4}(x, y) = \int_0^{+\infty} g_4(x', 0, x, y) \frac{\partial H_{z4}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} dx' - \int_{-\infty}^0 g_4(0, y', x, y) \frac{\partial H_{z4}}{\partial x'} \Big|_{x'=0} dy' \quad (9)$$

sendo as funções de Green  $g_u$  dadas por:

$$g_u(x, y, x', y') = \frac{1}{4j} \left[ H_0^2(k_u \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}) + H_0^2(k_u \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}) + H_0^2(k_u \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2}) + H_0^2(k_u \sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2}) \right] \quad (10)$$

onde  $u=1-4$ ,  $H_0^2$  a função de Hankel de 2º tipo e ordem zero e  $k_u = \omega(\mu_u \epsilon_u)^{1/2}$  as constantes de propagação dos meios.

As condições de contorno de continuidade dos campos eletromagnéticos nas interfaces entre os meios da Fig. 1 são:

$$E_a(x') = \frac{1}{j\omega\epsilon_1} \frac{\partial H_{z1}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} = \frac{1}{j\omega\epsilon_3} \frac{\partial H_{z3}}{\partial y'} \Big|_{y'=0}, \quad -\infty < x' < 0 \quad (11)$$

$$E_b(x') = \frac{1}{j\omega\epsilon_2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial y'} \Big|_{y'=0} = \frac{1}{j\omega\epsilon_4} \frac{\partial H_{z4}}{\partial y'} \Big|_{y'=0}, \quad 0 < x' < +\infty \quad (12)$$

$$E_c(y') = \frac{1}{j\omega\epsilon_3} \frac{\partial H_{z3}}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = -\frac{1}{j\omega\epsilon_4} \frac{\partial H_{z4}}{\partial x'} \Big|_{x'=0}, \quad -\infty < y' < 0 \quad (13)$$

$$E_d(y') = \frac{1}{j\omega\epsilon_1} \frac{\partial H_{z1}}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = -\frac{1}{j\omega\epsilon_2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x'} \Big|_{x'=0}, \quad 0 < y' < +\infty \quad (14)$$

$$H_{z1}(x, 0) = H_{z3}(x, 0), \quad -\infty < x < 0 \quad (15)$$

$$H_{z2}(x, 0) = H_{z4}(x, 0), \quad 0 < x < +\infty \quad (16)$$

$$H_{z3}(0, y) = H_{z4}(0, y), \quad -\infty < y < 0 \quad (17)$$

$$H_{z1}(0, y) = H_{z2}(0, y), \quad 0 < y < +\infty \quad (18)$$

onde  $E_a$ ,  $E_b$ ,  $E_c$  e  $E_d$  são os campos elétricos tangenciais nas interfaces entre os meios 1-3, 2-4, 3-4 e 1-2, respectivamente. Substituindo (11)-(18) em (6)-(9), obtemos o seguinte sistema de equações integrais:

$$\int_{-\infty}^0 [\epsilon_1 g_1(x', 0, x, 0) + \epsilon_3 g_3(x', 0, x, 0)] E_a(x') dx' - \int_{-\infty}^0 \epsilon_1 g_1(y', x, 0) E_c(y') dy' + \int_0^{+\infty} \epsilon_1 g_1(0, y', x, 0) E_d(y') dy' = -\epsilon_1 M_0 g_1(\xi, \eta, x, 0) \quad (19)$$

$$\int_0^{+\infty} [\epsilon_2 g_2(x', 0, x, 0) + \epsilon_4 g_4(x', 0, x, 0)] E_b(x') dx' + \int_{-\infty}^0 \epsilon_4 g_4(0, y', x, 0) E_c(y') dy' - \int_0^{+\infty} \epsilon_2 g_2(0, y', x, 0) E_d(y') dy' = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\infty}^0 \varepsilon_3 g_3(x', 0, 0, y) E_a(x') dx' + \int_0^{+\infty} \varepsilon_4 g_4(x', 0, 0, y) E_b(x') dx' + \\
 & + \int_{-\infty}^0 [\varepsilon_3 g_3(0, y', 0, y) + \varepsilon_4 g_4(0, y', 0, y)] E_c(y') dy' = 0
 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^0 \varepsilon_1 g_1(x', 0, 0, y) E_a(x') dx' - \int_0^{+\infty} \varepsilon_2 g_2(x', 0, 0, y) E_b(x') dx' + \\
 & + \int_0^{+\infty} [\varepsilon_1 g_1(0, y', x, y) + \varepsilon_2 g_2(0, y', 0, y)] E_d(x') dx' = -\varepsilon_1 M_0 g_1(\xi, \eta, 0, y)
 \end{aligned} \quad (22)$$

A solução do sistema integral acima fornece as funções  $E_a$ ,  $E_b$ ,  $E_c$  e  $E_d$ , as quais podem ser substituídas em (11)-(14) e (6)-(9) para obter os campos  $H_z$  em todos os meios.

### C. Solução do Sistema pelo MoM

A solução numérica do sistema (19)-(22) foi realizada pelo MoM [16]-[17]. Neste método aproximamos as funções  $E_a$ ,  $E_b$ ,  $E_c$  e  $E_d$  por expansões em bases de funções pulso:

$$\begin{aligned}
 E_a(x') &= \sum_{n_a=1}^{N_a} \alpha_{n_a} p_{n_a}, & E_b(x') &= \sum_{n_b=1}^{N_b} \alpha_{n_b} p_{n_b} \\
 E_c(y') &= \sum_{n_c=1}^{N_c} \alpha_{n_c} p_{n_c}, & E_d(y') &= \sum_{n_d=1}^{N_d} \alpha_{n_d} p_{n_d}
 \end{aligned} \quad (23)$$

onde  $\alpha_{n_a}$ ,  $\alpha_{n_b}$ ,  $\alpha_{n_c}$  e  $\alpha_{n_d}$  são os coeficientes de expansão e  $p_{n_a}$ ,  $p_{n_b}$ ,  $p_{n_c}$  e  $p_{n_d}$  as funções de base do tipo pulso retangular. Estas funções tem valor 1 ao longo de um subintervalo genérico  $\Delta x_a$ ,  $\Delta x_b$ ,  $\Delta y_c$  e  $\Delta y_d$ , e valor 0 fora deste subintervalo, onde  $\Delta x_a = |x_{\min}|/N_a$ ,  $\Delta x_b = |x_{\max}|/N_b$ ,  $\Delta y_c = |y_{\min}|/N_c$  e  $\Delta y_d = |y_{\max}|/N_d$  ao longo dos intervalos  $x_{\min} < x' < 0$ ,  $0 < x' < x_{\max}$ ,  $y_{\min} < y' < 0$  e  $0 < y' < y_{\max}$ , respectivamente. Os parâmetros  $N_a$ ,  $N_b$ ,  $N_c$  e  $N_d$  são os números de subintervalos uniformes (discretizações) de cada intervalo. A Fig. 2 mostra curvas genéricas das expansões (23), onde os pontos destacados  $x_{an}$ ,  $x_{bn}$ ,  $y_{cn}$  e  $y_{dn}$  são os pontos centrais de cada subintervalo. As expansões em (23) convergem para as funções desconhecidas para maiores valores das discretizações e quando  $x_{\min} \rightarrow -\infty$ ,  $x_{\max} \rightarrow +\infty$ ,  $y_{\min} \rightarrow -\infty$  e  $y_{\max} \rightarrow +\infty$  [20].

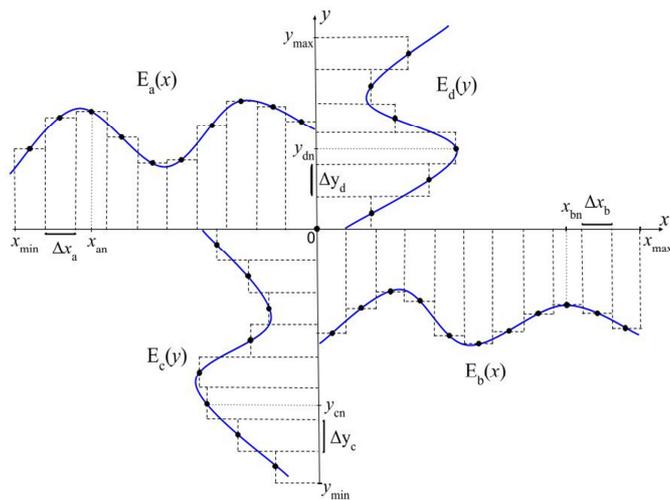


Fig. 2. Expansão por pulso retangular de  $E_a$ ,  $E_b$ ,  $E_c$  e  $E_d$  nas interfaces.

Substituindo (23) em (19)-(22) e aplicando o processo de teste padrão do MoM [17], obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases}
 \sum_{n_a=1}^{N_a} \alpha_{n_a} I_1^{m_a n_a} + \sum_{n_c=1}^{N_c} \alpha_{n_c} I_2^{m_a n_c} + \sum_{n_d=1}^{N_d} \alpha_{n_d} I_3^{m_a n_d} = f^{m_a}, & m_a = 1, 2, \dots, N_a \\
 \sum_{n_b=1}^{N_b} \alpha_{n_b} I_4^{m_b n_b} + \sum_{n_c=1}^{N_c} \alpha_{n_c} I_5^{m_b n_c} + \sum_{n_d=1}^{N_d} \alpha_{n_d} I_6^{m_b n_d} = 0, & m_b = 1, 2, \dots, N_b \\
 \sum_{n_a=1}^{N_a} \alpha_{n_a} I_7^{m_c n_a} + \sum_{n_b=1}^{N_b} \alpha_{n_b} I_8^{m_c n_b} + \sum_{n_c=1}^{N_c} \alpha_{n_c} I_9^{m_c n_c} = 0, & m_c = 1, 2, \dots, N_c \\
 \sum_{n_a=1}^{N_a} \alpha_{n_a} I_{10}^{m_d n_a} + \sum_{n_b=1}^{N_b} \alpha_{n_b} I_{11}^{m_d n_b} + \sum_{n_d=1}^{N_d} \alpha_{n_d} I_{12}^{m_d n_d} = f^{m_d}, & m_d = 1, 2, \dots, N_d
 \end{cases} \quad (24)$$

sendo

$$I_1^{m_a n_a} = \int_{\Delta x_{n_a}} [\varepsilon_1 g_1(x', 0, x_{m_a}, 0) + \varepsilon_3 g_3(x', 0, x_{m_a}, 0)] dx' \quad (25)$$

$$I_2^{m_a n_c} = - \int_{\Delta y_{n_c}} \varepsilon_3 g_3(0, y', x_{m_a}, 0) dy' \quad I_3^{m_a n_d} = \int_{\Delta y_{n_d}} \varepsilon_1 g_1(0, y', x_{m_a}, 0) dy' \quad (26)$$

$$I_4^{m_b n_b} = \int_{\Delta x_{n_b}} [\varepsilon_2 g_2(x', 0, x_{m_b}, 0) + \varepsilon_4 g_4(x', 0, x_{m_b}, 0)] dx' \quad (27)$$

$$I_5^{m_b n_c} = \int_{\Delta y_{n_c}} \varepsilon_4 g_4(0, y', x_{m_b}, 0) dy' \quad I_6^{m_b n_d} = - \int_{\Delta y_{n_d}} \varepsilon_2 g_2(0, y', x_{m_b}, 0) dy' \quad (28)$$

$$I_7^{m_c n_a} = - \int_{\Delta x_{n_a}} \varepsilon_3 g_3(x', 0, 0, y_{m_c}) dx' \quad I_8^{m_c n_b} = \int_{\Delta x_{n_b}} \varepsilon_4 g_4(x', 0, 0, y_{m_c}) dx' \quad (29)$$

$$I_9^{m_c n_c} = \int_{\Delta y_{n_c}} [\varepsilon_3 g_3(0, y', 0, y_{m_c}) + \varepsilon_4 g_4(0, y', 0, y_{m_c})] dy' \quad (30)$$

$$I_{10}^{m_d n_a} = \int_{\Delta x_{n_a}} \varepsilon_1 g_1(x', 0, 0, y_{m_d}) dx' \quad I_{11}^{m_d n_b} = - \int_{\Delta x_{n_b}} \varepsilon_2 g_2(x', 0, 0, y_{m_d}) dx' \quad (31)$$

$$I_{12}^{m_d n_d} = \int_{\Delta y_{n_d}} [\varepsilon_1 g_1(0, y', 0, y_{m_d}) + \varepsilon_2 g_2(0, y', 0, y_{m_d})] dy' \quad (32)$$

$$f^{m_a} = -\varepsilon_1 M_0 g_1(\xi, \eta, 0, y_{m_a}) \quad f^{m_d} = -\varepsilon_1 M_0 g_1(\xi, \eta, 0, y_{m_d}) \quad (33)$$

O sistema linear (24), de ordem  $N_a + N_b + N_c + N_d$ , pode ser representado na forma matricial  $[I][\alpha] = [f]$ , onde  $[\alpha]$  é o vetor coluna que contem as incógnitas  $\alpha_{n_a}$ ,  $\alpha_{n_b}$ ,  $\alpha_{n_c}$  e  $\alpha_{n_d}$  de (23),  $[f]$  é o vetor coluna fonte com elementos dados por (33), e  $[I]$  é uma matriz quadrada que representa a interação mútua entre os subintervalos. Os elementos desta matriz são dados pelas integrais (25)-(32), as quais foram calculadas numericamente por funções de integração do Matlab [21]. Desta forma, o sistema pode ser resolvido por inversão matricial  $[\alpha] = [I]^{-1}[f]$ . Com os  $[\alpha]$  obtidos, estes são então substituídos em (23), (11)-(14) e depois em (6)-(9) para calcular aproximadamente o campo magnético  $H_z$  em cada meio.

### III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Baseado no método apresentado na seção anterior, desenvolvemos um programa MoM em Matlab [11] para calcular os campos elétricos tangenciais (23) nas interfaces e os campos magnéticos (6)-(9) em cada meio. Aplicamos também o teorema da dualidade para analisar o caso com fonte de corrente elétrica (2). Os resultados apresentados a seguir são de um exemplo de aplicação em microondas, na frequência de 521 MHz, em uma região contendo os meios ar, água, solo e floresta. Para comparação, apresentamos alguns resultados

calculados pelo FEM através do software Comsol [18]. Chamamos aqui os casos magnético e elétrico de polarização vertical e horizontal, respectivamente.

### A. Campos Tangenciais nas Interfaces

As propriedades eletromagnéticas dos quatro meios considerados no exemplo de aplicação estão descritas na Tabela 1. Já a Tabela 2 mostra os parâmetros utilizados nas simulações e a Fig. 3 mostra os resultados obtidos para os campos  $E_a$ ,  $E_b$ ,  $E_c$  e  $E_d$  para as duas polarizações. Para cada polarização a simulação durou 3 min em um computador com processador i7 e 16Gb de ram. Observamos que os parâmetros utilizados (Tabela II) satisfazem os critérios de convergência conforme discutido na seção anterior e em [20].

TABELA I. PROPRIEDADES ELETROMAGNÉTICAS DOS MEIOS NA FREQUENCIA DE 521 MHz [15]

Propriedade Eletromagnética	Meio 1 Ar	Meio 2 Floresta	Meio 3 Água	Meio 4 Solo
Permeabilidade magnética, $\mu_r$	1	1	1	1
Permissividade relativa, $\epsilon_r$	1	1,1	80	1,9
Condutividade, $\sigma$ (mS/m)	0	0,1	50	20

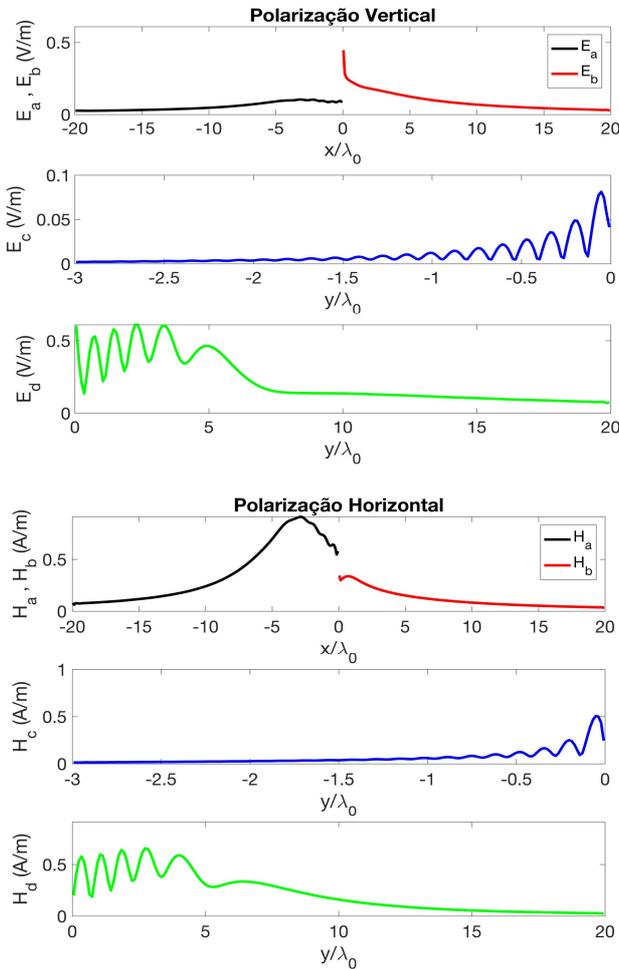


Fig. 3. Módulo dos campos eletromagnéticos tangenciais  $abs(E)$  e  $abs(H)$  ao longo das quatro interfaces para a polarização vertical (superior) e polarização horizontal (inferior).

TABELA II. PARÂMETROS UTILIZADOS NAS SIMULAÇÕES ( $\lambda_0=0,58m$ )

Parâmetro	Valor			
Posição da fonte	$\xi = -3\lambda_0$		$\eta = h = 3\lambda_0$	
Limites de $E_a$ e $E_b$	$x_{min} = -20\lambda_0$		$x_{max} = 20\lambda_0$	
Limites de $E_c$ e $E_d$	$y_{min} = -3\lambda_0$		$y_{max} = 20\lambda_0$	
Discretizações de $E_a$ , $E_b$ , $E_c$ e $E_d$	$N_a = 200$	$N_b = 200$	$N_c = 200$	$N_d = 200$
Área do plot de $H_z$	$-6\lambda_0 < x, y < 6\lambda_0$			
Discretização da área de plot 2D no plano $xy$	$N_x = N_y = 400$			

### B. Variação dos Campos $H_z$ e $E_z$ em Linhas Horizontais

A Fig. 4 mostra a variação da intensidade dos campos  $abs(H_z)$  e  $abs(E_z)$  versus  $x$  das polarizações vertical e horizontal, respectivamente, para diferentes alturas em relação à fonte  $y=h$ ,  $h/2$  e  $0$ . Para comparação são apresentados também os resultados obtidos pelo FEM, e observamos uma boa concordância entre os métodos. Cada curva do MoM foi obtida em torno 1min depois dos cálculos iniciais apresentados na Fig. 3, e as curvas do FEM foram obtidas em 3h.

Observamos na Fig. 4 para  $x>0$  um comportamento oscilatório maior da polarização horizontal. Isto ocorre porque a polarização vertical reflete menos que a horizontal em ambas as interfaces ar-agua e floresta-solo [19]. Além disso, observamos que na superfície  $y=0$  o campo sofre um decaimento na interface ar-floresta para a polarização vertical e uma amplificação para a polarização horizontal.

### C. Campos $H_z$ e $E_z$ no Plano $xy$

A Fig. 5 mostra os gráficos bidimensionais no plano  $xy$  do módulo e fase dos campos para as duas polarizações. Estes resultados foram obtidos em  $400min=400linhas \times 1min/linha$  horizontal. Estes gráficos comprovam que a polarização vertical sofre menos reflexão que a polarização horizontal, em todos os pontos dos meios ar e floresta. No entanto, a polarização vertical sofre mais difração que a polarização horizontal na interface entre os quatro meios.

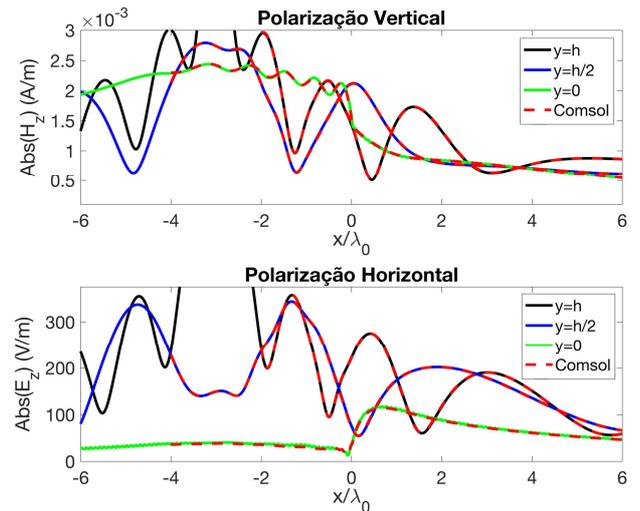


Fig. 4. Variação do módulo dos campos  $abs(H_z, E_z)$  versus  $x$  para diferentes alturas  $y=h$ ,  $h/2$  e  $0$  para as duas polarizações.

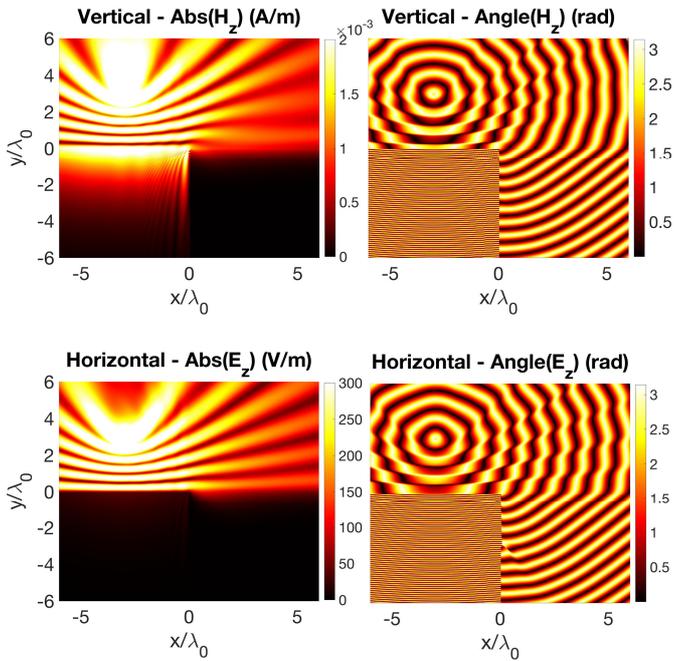


Fig. 5. Gráficos bidimensionais do módulo  $\text{abs}(H_z, E_z)$  e fase  $\text{angle}(H_z, E_z)$  dos campos das polarizações vertical (cima) e horizontal (baixo).

#### IV. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou uma análise numérica pelo MoM da radiação de linhas de corrente magnética (polarização vertical) e elétrica (polarização horizontal) em uma região formada por quatro meios. O problema considerado é bidimensional onde cada meio ocupa um quadrante do plano  $xy$ , e as fontes são localizadas no segundo quadrante. Dois exemplos de aplicação em microondas foram analisados, onde as fontes operam em 521 MHz e os quatro meios são: ar, floresta, água e solo. Os resultados obtidos para as duas polarizações foram: campos nas interfaces, variação dos campos em função da distância em relação às fontes, para diferentes alturas em relação ao solo, e distribuição bidimensional dos campos. Estes exemplos também foram simulados pelo FEM para comparação.

Os resultados mostraram uma boa concordância entre os métodos, sendo que aqueles calculados pelo MoM (Fig. 4) foram obtidos em apenas 4 min, enquanto que os calculados pelo FEM durou em torno de 3h. Isto mostra que o MoM possui uma boa eficiência computacional comparada ao FEM para análise destes problemas. Além disso, o modelo apresentado pode ser considerado mais preciso que outros da literatura que aproximam a difração por ótica geométrica. Isto porque o método proposto é de onda completa, ou seja, considera todos os fenômenos eletromagnéticos de radiação, difração, reflexão e refração em uma faixa ampla de frequências. Para isto basta considerar o critério de convergência conforme discutido na Seção II. Em trabalhos futuros o método pode ser generalizado para considerar regiões mistas com mais meios, por exemplo, floresta com altura finita, e considerar outras posições das fontes.

#### REFERÊNCIAS

- [1] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*, 2nd ed., Prentice Hall, 2002.
- [2] K. Li, *Electromagnetic Fields in Stratified Media*, Springer, 2009.
- [3] J. R. Wait, *Electromagnetic Waves in Stratified Media*, 2nd ed., Pergamon Press, 1970.
- [4] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, IEEE Press, 1995.
- [5] L.-W. Li, et al, "Radio Wave Propagation Along Mixed Paths Through a Four-Layered Model of Rain Forest: An Analytic Approach," *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. 46, N. 7, pp. 1098-1111, Jul. 1998.
- [6] L.-W. Li, et al, "Analysis of Electromagnetic Wave Propagation in Forest Environment Along Multiple Paths," *Progress in Elect. Res.*, vol. 23, pp. 137-164, 1999.
- [7] R. Zabihi and R. G. Vaughan, "Simplifying Through-Forest Propagation Modelling," *IEEE Open J. of Ant. Propagat.*, vol. 1, pp. 104-112, 2020.
- [8] J. R. Wait, and L. C. Walters, "Curves for ground wave propagation over mixed land and sea paths," *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol. 11, N. 1, pp. 38-45, Jan. 1963.
- [9] W. C. Chew, "Response of a source on top of a vertically stratified half-space," *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol. 33, N. 6, pp. 649-654, Jun. 1985.
- [10] T. Tamir, "Radio Wave Propagation Along Mix Paths in Forest Environments," *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol. 25, N. 4, pp. 471-477, Jul. 1977.
- [11] L. E. C. Eras, et al, "A Radio Propagation Model for a Rainforest-River Environment Using UTD and Geometrical Optics," *IEEE Trans. Ant. Wir. Propagat. Lett.*, vol. 21, N. 1, pp. 54-58, Jan. 2022.
- [12] G. Apaydin and L. Sevgi, "A Novel Split-Step Parabolic-Equation Package for Surface-Wave Propagation Prediction Along Multiple Mixed Irregular-Terrain Paths," *IEEE Ant. Propagat. Mag.*, vol. 52, N. 4, pp. 90-97, Aug. 2010.
- [13] G. Apaydin and L. Sevgi, "Numerical Investigations of and Path Loss Predictions for Surface Wave Propagation Over Sea Paths Including Hilly Island Transitions," *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol. 58, N. 4, pp. 1302-1314, Apr. 2010.
- [14] F. N. B. Magno, et al, "Propagation Path Loss in Mixed-Path Environment Using Narrow Angle and Wide-Angle Parabolic Equations," *2011 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC 2011)*, Nov. 2011.
- [15] D. K. N. da Silva, et al., "A propagation model for mixed paths using dyadic Green's functions: a case study over the river for a city-river-forest path," *IEEE Antennas Wirel. Propagat. Lett.*, vol. 17, N. 12, pp. 2364-2368, Dec. 2018.
- [16] D. G. Dudley, *Mathematical Foundations for Eletromagnetic Theory*, IEEE Press, 1994.
- [17] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, IEEE Press, 1993.
- [18] Comsol software. <https://www.comsol.com>.
- [19] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, 2nd ed., John Wiley and Sons, 2012.
- [20] J. B. N. Leite and K. Q. Costa, "Method of Moments Analysis of Radiation in Horizontally and Vertically Stratified Media," *SBMO 2022 - 20º Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica*, Nov. 2022.
- [21] Matlab software. <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.