

# Uma Abordagem Multi-escala para Separação Espectral Esparsa e Estruturada em Imagens Hiperespectrais

Luciano C. Ayres, Ricardo A. Borsoi, José C. M. Bermudez e Sérgio J. M. de Almeida

**Resumo**— Na análise de imagens hiperespectrais, uma abordagem particularmente bem-sucedida emprega bibliotecas espectrais estruturadas para lidar com a variabilidade espacial na separação espectral esparsa. No entanto, as penalidades usadas agregam um custo computacional substancial, e as soluções são sensíveis ao ruído. Neste trabalho, generalizamos a abordagem de regularização multi-escala para resolver o problema de separação espectral incorporando normas indutoras de esparsidade de grupo. Ainda, propomos um método estruturado, resistente a ruídos, para lidar com a variabilidade dos materiais e garantir a esparsidade inter- e intra-classe com reprodutibilidade e baixo custo computacional. Os experimentos ilustram a robustez e a consistência dos resultados.

**Palavras-Chave**— Dados hiperespectrais, variabilidade espectral, separação esparsa, múltiplas escalas.

**Abstract**— In hyperspectral sparse unmixing, a successful approach employs spectral bundles to address the variability of the endmembers in the spatial domain. However, the penalties used aggregate substantial computational complexity, and the solutions are very noise-sensitive. Thus, we generalize the multiscale spatial regularization approach to solve the unmixing problem by incorporating group sparsity inducing mixed norms. We propose a noise-robust method that can benefit from the bundle structure to deal with variability while ensuring inter- and intra-class sparsity in abundance estimation with reproducibility and low computational cost. Experiments illustrate the robustness and consistency of the results when compared to related methods.

**Keywords**— Hyperspectral data, spectral variability, sparse unmixing, multiscale.

## I. INTRODUÇÃO

Na análise de imagens hiperespectrais (IHs), o problema de separação espectral (SE) consiste em determinar as assinaturas espectrais dos materiais contidos na cena (*i.e.*, os *endmembers* – EMs) e as proporções nas quais estão presentes em cada pixel da imagem [1]. A maioria das abordagens para o problema de SE baseiam-se em um modelo de mistura linear (MML) [1], que pressupõe que cada pixel da IH é constituído pela combinação linear dos EMs, ponderados por suas abundâncias fracionárias. Porém, variações nas condições atmosféricas, de iluminação e ambientais que normalmente ocorrem em uma cena podem ter um impacto significativo nas assinaturas espectrais dos EMs contidos em uma IH [2]. Devido a essa *variabilidade espectral*, muitas vezes um único espectro não é suficiente para caracterizar um EM. Isso porque

o vetor que representa um EM tende a sofrer alterações em função de sua posição na IH.

O uso de grandes bibliotecas de espectros previamente conhecidos é uma abordagem típica para lidar com a variabilidade espectral em SE [2]. Dentre os métodos existentes, os baseados em regressão esparsa, considerados computacionalmente eficientes, pressupõem que a refletância dos pixels em uma IH pode ser descrita como uma combinação linear de algumas poucas assinaturas de EMs de uma grande biblioteca espectral conhecida *a priori* (geralmente construída através de medidas realizadas *in situ* ou em laboratório) [3]. No entanto, muitas vezes bibliotecas espectrais não estão disponíveis para uma determinada IH. Trabalhos recentes propuseram métodos para extração de bibliotecas espectrais estruturadas diretamente a partir da IH observada [4]. Tais abordagens tipicamente aplicam algoritmos clássicos de extração de EMs a subconjuntos de pixels aleatoriamente amostrados da IH. Essa aleatoriedade faz com que os EMs obtidos a cada extração sejam ligeiramente diferentes, representando a variabilidade espectral na IH.

Em [5], os autores propõem a introdução de normas mistas no problema de otimização da SE esparsa com bibliotecas espectrais estruturadas para promover a esparsidade de grupo. É proposta uma nova penalidade que permite controlar a esparsidade inter- e intra-estruturas, o que pode melhorar consideravelmente o desempenho da SE quando comparada às penalizações de esparsidade tipicamente utilizadas. Porém, os resultados dessa técnica dependem da inicialização das abundâncias no problema de otimização. Além disso, quando utilizada em conjunto com bibliotecas espectrais extraídas da IH através de métodos como o AEB (do inglês, *Automated Endmember Bundles*) [4], as abundâncias estimadas são variáveis aleatórias e podem ser ligeiramente diferentes para cada execução do método.

Outro desafio associado a essas técnicas é sua sensibilidade à presença de ruído devido ao grande número de assinaturas na biblioteca. A integração de regularizações que promovem a suavidade espacial das abundâncias melhora o desempenho dos algoritmos de SE esparsa em condições ruidosas, mas às custas de um aumento considerável no custo computacional [6], [7]. Um algoritmo rápido de SE esparsa (chamado MUA – do inglês, *Multiscale sparse Unmixing Algorithm*), baseado em superpixels e em uma separação multi-escala, foi recentemente proposto para o problema de SE sem o emprego de bibliotecas estruturadas [8]. Essa abordagem também foi considerada em [9] baseando-se em uma decomposição hierár-

Luciano C. Ayres, José C. M. Bermudez, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, e-mail: lucayress@gmail.com, j.bermudez@ieee.org; Ricardo A. Borsoi, Université de Lorraine, Vandoeuvre-lès-Nancy, e-mail: raborsoi@gmail.com; Sérgio J. M. de Almeida, Universidade Católica de Pelotas, Pelotas-RS, e-mail: sergio.almeida@ucpel.edu.br.

quica da IH. Apesar dos excelentes resultados obtidos em [8] utilizando uma penalização de esparsidade baseada na norma  $L_1$ , essa solução não é adequada para enfrentar o desafio da variabilidade espectral através de bibliotecas estruturadas.

Este trabalho aborda a questão da variabilidade espectral de EMs no problema de SE, mantendo um baixo custo computacional e sendo robusto a ruídos. Além disso, buscamos a *reprodutibilidade* [10] da solução, ou seja, usando o mesmo algoritmo e os mesmos dados, os resultados devem ser consistentes (muito semelhantes), mesmo considerando a aleatoriedade em algumas etapas do método. As principais contribuições deste artigo podem ser resumidas como: 1) Generalizamos o problema de regularização espacial multi-escala formulado no algoritmo MUA [8] para resolver o problema de SE esparsa com bibliotecas estruturadas, permitindo o uso de penalizações indutoras de esparsidade mais gerais, como as baseadas em normas mistas empregadas em [5]. 2) Propomos uma heurística adaptada de [11] e baseada em um critério de centralidade de grafos para selecionar estimativas de abundância com alta reprodutibilidade (i.e., com menor influência da aleatoriedade no processo de SE) a partir de  $K$  execuções do método.

O método proposto é capaz de lidar com a variabilidade espectral dos EMs através de bibliotecas estruturadas com alta robustez ao ruído e baixo custo computacional.

## II. SEPARAÇÃO ESPECTRAL ESPARSA ESTRUTURADA

Considerando o MML, uma IH  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{L \times N}$  com  $L$  bandas,  $N$  pixels e  $P$  EMs pode ser escrita como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AZ} + \mathbf{E}, \quad (1)$$

em que as abundâncias  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{P \times N}$  estão sujeitas às restrições de não-negatividade (ANC) e soma unitária (ASC) [1].  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{L \times P}$  representa a matriz de EMs. Cada coluna  $\mathbf{a}_p$  de  $\mathbf{A}$  é a assinatura de um dos EMs.  $\mathbf{E}$  é o ruído aditivo. Apesar de sua popularidade [1], o MML ignora a variabilidade espectral dos EMs ao longo de uma IH, o que pode comprometer a qualidade das abundâncias estimadas no processo de SE.

### A. SE com bibliotecas de EMs estruturadas

Seguindo [5], considere a substituição de  $\mathbf{A}$  no MML (1) por uma biblioteca espectral estruturada  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{L \times Q}$ .  $\mathbf{B}$  é composta por  $P$  estruturas de espectros  $\mathbf{B}_p$  ( $p = 1, \dots, P$ ). As colunas da  $p$ -ésima estrutura de  $\mathbf{B}$  são diferentes assinaturas espectrais do  $p$ -ésimo EM da IH:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{BX} + \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{B}_2 \mid \dots \mid \mathbf{B}_P]. \quad (2)$$

Em (2),  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{Q \times N}$  contém as abundâncias associadas a cada assinatura espectral em  $\mathbf{B}$ . Cada submatriz  $\mathbf{B}_p \in \mathbb{R}^{L \times m_{\mathcal{G}_p}}$  representa um grupo  $\mathcal{G}_p$  de  $m_{\mathcal{G}_p}$  assinaturas. O representante  $i$  do grupo  $\mathcal{G}_p$  no dicionário é denotado como  $\mathbf{b}_{\mathcal{G}_p,i}$  (i.e.,  $\mathbf{b}_{\mathcal{G}_p,i}$  é a  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{B}_p$ ). Isso significa que  $Q = \sum_{p=1}^P m_{\mathcal{G}_p}$ .

Podemos extrair de (2) a expressão de um único pixel  $\mathbf{y}$  em termos da abundância “global” do  $p$ -ésimo material:

$$\mathbf{y} = \sum_{p=1}^P z_p \mathbf{a}_p = \sum_{p=1}^P \left( \sum_{i=1}^{m_{\mathcal{G}_p}} x_{\mathcal{G}_p,i} \right) \left( \frac{\sum_{i=1}^{m_{\mathcal{G}_p}} x_{\mathcal{G}_p,i} \mathbf{b}_{\mathcal{G}_p,i}}{\sum_{i=1}^{m_{\mathcal{G}_p}} x_{\mathcal{G}_p,i}} \right), \quad (3)$$

em que  $x_{\mathcal{G}_p,i}$  é a abundância associada a  $\mathbf{b}_{\mathcal{G}_p,i}$ .

A SE esparsa consiste em recuperar as abundâncias  $\mathbf{X}$  a partir da IH  $\mathbf{Y}$  observada, dado o dicionário  $\mathbf{B}$ . Podemos então formular o seguinte problema de otimização:

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \Delta_P} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{BX}\|_F^2 + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{X}), \quad (4)$$

em que  $\mathcal{R}(\mathbf{X})$  é uma penalidade de regularização que promove a esparsidade,  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  é um parâmetro de regularização,  $\|\cdot\|_F$  é a norma de Frobenius, e  $\Delta_P$  denota o conjunto de matrizes de coeficientes cujas abundâncias pertencem ao simplex unitário (i.e., satisfazem as restrições de ANC e ASC).

### B. Normas (penalidades) mistas promotoras de esparsidade

A penalização de regularização  $\mathcal{R}(\mathbf{X})$  tem um papel fundamental no desempenho dos algoritmos de SE esparsa. Em [5], Drumetz *et al.* propõem o uso da esparsidade de grupo por meio da introdução de normas mistas no problema de otimização de SE esparsa para impor a esparsidade dentro de cada grupo, e entre diferentes grupos, a partir de bibliotecas de EMs estruturadas extraídas automaticamente da IH por [4]. A norma mista de dois níveis  $\ell_{\mathcal{G},r,s}$  é definida para qualquer par de dois números reais positivos,  $r$  e  $s$ , como:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{G},r,s} \triangleq \left( \sum_{p=1}^P \left( \sum_{i=1}^{m_{\mathcal{G}_p}} |x_{\mathcal{G}_p,i}|^r \right)^{s/r} \right)^{1/s} = \left( \sum_{p=1}^P \|\mathbf{x}_{\mathcal{G}_p}\|_r^s \right)^{1/s}.$$

Com a mesma expressão, operando em colunas e somando os resultados em todos os pixels, os autores em [5] definiram a penalização de esparsidade através da norma  $\ell_{\mathcal{G},r,s}$  da matriz de coeficientes como:

$$\mathcal{R}(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{G},r,s} \triangleq \sum_{n=1}^N \|\mathbf{x}_n\|_{\mathcal{G},r,s}. \quad (5)$$

Considerando essa penalização, o problema de SE esparsa (4) foi resolvido em [5] utilizando o Método dos Multiplicadores de Direção Alternada (MMDA). Porém,  $\mathcal{R}(\mathbf{X})$  é uma função não-convexa para vários valores de  $r$  e  $s$ , o que torna a solução computacionalmente custosa e dependente da inicialização. Além disso, a extração da biblioteca  $\mathbf{B}$  a partir da IH por [4] adiciona variabilidade ao processo de SE.

## III. MÉTODO PROPOSTO

Nesta seção, apresentamos o algoritmo de SE esparsa estruturada proposto (chamado GMBUA – *Generalized Multiscale Bundle-based Unmixing Algorithm*), o qual consiste em duas partes fundamentais. Primeiro, desenvolvemos uma abordagem de regularização espacial multi-escala capaz de considerar uma grande variedade de penalidades de esparsidade, como a norma fracionária  $\ell_{\mathcal{G},r,s}$ , de maneira eficiente. Posteriormente, propomos uma estratégia para mitigar o efeito da aleatoriedade envolvida na extração da biblioteca espectral a partir da IH (como em, e.g., [4]) e no processo de SE. Essa estratégia utiliza um critério de centralidade sobre a representação das diferentes realizações na forma de um grafo.

### A. Abordagem multi-escala para SE esparsa e estruturada

Considere uma biblioteca espectral  $\mathbf{B}$  extraída da IH utilizando um algoritmo como, e.g., [4]. Definimos a decomposição multi-escala do problema de SE esparsa em (4) como uma transformação espacial promovida por um operador  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ ,  $M < N$ , aplicado à IH e às abundâncias [8]:

$$\mathbf{Y}_C = \mathbf{Y}\mathbf{W}, \quad \mathbf{X}_C = \mathbf{X}\mathbf{W}, \quad (6)$$

em que  $\mathbf{Y}_C \in \mathbb{R}^{L \times M}$ ,  $\mathbf{X}_C \in \mathbb{R}^{Q \times M}$ , e o subscrito  $C$  refere-se ao novo domínio aproximado da imagem. O operador  $\mathbf{W}$ , construído com base na decomposição em superpixels de  $\mathbf{Y}$ , calcula a média da amplitude dos pixels que pertencem a regiões espacialmente homogêneas da IH, nas quais as abundâncias variam pouco. Essa suavidade espacial das abundâncias pode então ser explorada formulando o problema de SE esparsa no domínio aproximado de acordo com (6):

$$\hat{\mathbf{X}}_C = \arg \min_{\mathbf{X}_C \in \Delta_P} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_C - \mathbf{B}\mathbf{X}_C\|_F^2 + \lambda_C \mathcal{R}(\mathbf{X}_C). \quad (7)$$

Note que em (7)  $\mathcal{R}$  é aplicada às abundâncias na escala de aproximação. Desde que  $\mathcal{R}$  não utilize diretamente a organização espacial dos diferentes pixels da imagem, esse procedimento pode ser estendido para quaisquer penalizações de esparsidade empregadas. Esse problema pode ser resolvido da mesma forma que a Eq. (4). A estimativa  $\hat{\mathbf{X}}_C$  é então mapeada de volta para a escala espacial original, denotada por  $\mathcal{D}$ , através da operação  $\hat{\mathbf{X}}_D = \hat{\mathbf{X}}_C \mathbf{W}^* \in \mathbb{R}^{Q \times N}$ , na qual o operador  $\mathbf{W}^*$  replica os pixels de  $\hat{\mathbf{X}}_C$  para todos os pixels de um mesmo superpixel na escala  $\mathcal{D}$ . Assim,  $\hat{\mathbf{X}}_D$  fornece uma estimativa da estrutura espacial dos mapas de abundâncias.

Em seguida, a matriz de abundância aproximada  $\hat{\mathbf{X}}_D$  é usada para regularizar o problema de SE na escala original:

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \Delta_P} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{B}\mathbf{X}\|_F^2 + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{X}) + \frac{\beta}{2} \|\hat{\mathbf{X}}_D - \mathbf{X}\|_F^2, \quad (8)$$

em que  $\beta$  é um parâmetro de regularização. A maior complexidade da solução de (7) e (8) foi resolvida de forma eficiente em [8] para o caso em que  $\mathcal{R}(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_{1,1}$ . Essa solução, no entanto, não pode ser generalizada facilmente para outras normas.

Para viabilizar soluções simples para outras normas, propomos reformular a abordagem multi-escalas expressando (8) de forma equivalente como:

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \Delta_P} \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \sqrt{\beta} \hat{\mathbf{X}}_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \sqrt{\beta} \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{X} \right\|_F^2 + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{X}). \quad (9)$$

Definindo  $\tilde{\mathbf{Y}} = [\mathbf{Y}^\top, \sqrt{\beta} \hat{\mathbf{X}}_D^\top]^\top$  e  $\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{B}^\top, \sqrt{\beta} \mathbf{I}^\top]^\top$ , esse problema pode ser escrito na mesma forma que (4) como:

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \Delta_P} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{X}\|_F^2 + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{X}). \quad (10)$$

O problema (10) é equivalente à SE esparsa sem regularização espacial (4) com uma IH e dicionário dados por  $\tilde{\mathbf{Y}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$ , respectivamente. Consequentemente, tanto (7) quanto (10) podem ser resolvidos utilizando os mesmos algoritmos desenvolvidos para resolver o problema (4). Em particular, neste trabalho consideraremos  $\mathcal{R}(\mathbf{X})$  como sendo a norma mista  $\ell_{G,r,s}$  descrita em (5). Isso permite utilizar a estratégia descrita

em [5] para resolver os problemas de otimização. Omitimos os detalhes por brevidade. Após resolver (10), as abundâncias globais  $\hat{\mathbf{Z}} \in \mathbb{R}^{P \times N}$  são então calculadas agregando as abundâncias em cada grupo da solução  $\hat{\mathbf{X}}$  (conforme ilustrado em (3)).

### B. Seleção de uma estimativa de abundâncias consistente

As abundâncias estimadas  $\hat{\mathbf{X}}$  são variáveis aleatórias devido à aleatoriedade nos processos de extração da biblioteca espectral e de SE. Variabilidades importantes podem ocorrer entre diferentes execuções do algoritmo. Essa variabilidade indesejável é frequentemente ignorada nos trabalhos da área (incluindo os discutidos na introdução do artigo), e escolher uma solução representativa não é uma tarefa trivial. Tomando como inspiração estratégias recentemente consideradas para aplicações de neurociência [11], propomos uma estratégia para obter uma estimativa representativa e reproduzível.

Primeiramente,  $K$  bibliotecas espectrais diferentes são extraídas da IH  $\mathbf{Y}$  utilizando um método como, e.g., [4]. Para cada uma delas, a SE é efetuada utilizando o algoritmo descrito na Seção III-A, levando a  $K$  diferentes mapas de abundâncias  $\hat{\mathbf{Z}}_k$  com  $(k = 1, \dots, K)$ , os quais são armazenados no conjunto  $\Omega = \{\hat{\mathbf{Z}}_1, \dots, \hat{\mathbf{Z}}_K\}$ . Agora, construímos um grafo com  $K$  nós, cada um representando uma das soluções em  $\Omega$ . A matriz de adjacência do grafo é construída com base em uma medida de similaridade  $C_{uv}$  entre cada par de soluções,  $\hat{\mathbf{Z}}_u$  e  $\hat{\mathbf{Z}}_v$ , calculada com base em um problema de atribuição linear (PAL). Mais precisamente, a similaridade entre  $\hat{\mathbf{Z}}_u$  e  $\hat{\mathbf{Z}}_v$ ,  $u \neq v$  é calculada como

$$C_{uv} = \min_{\mathbf{P} \in \Pi} \frac{1}{N} \|\hat{\mathbf{Z}}_u - \mathbf{P}\hat{\mathbf{Z}}_v\|_F, \quad (11)$$

em que  $\Pi$  representa o conjunto de matrizes de permutação de dimensão  $P$ . O problema de minimização em (11) tem como objetivo alinhar os mapas de abundância de modo a eliminar a ambiguidade de permutação nas abundâncias estimadas, e é solucionado de maneira eficiente na forma de um PAL.

Calculando  $C_{uv}$  para  $u, v = 1, \dots, K$ ,  $u \neq v$ , criamos um grafo conectado, não-direcionado e sem auto-laços. Um subgrafo de custo mínimo ligando todos os nós é a etapa seguinte no cálculo de uma árvore geradora mínima (AGM) [12], eliminando conexões entre nós desnecessárias. Finalmente, selecionamos a execução mais representativa como o nó mais central do grafo; isso consiste na execução correspondente ao nó com o maior número de conexões com outros nós (execuções) no grafo. Essa solução, chamada de mais representativa, ou a *melhor*, é denotada por  $\mathbf{Z}_*$ .

Note que a estratégia proposta nessa seção é geral, podendo ser aplicada para selecionar uma solução representativa para qualquer algoritmo de SE que contenha um grau de aleatoriedade significativo.

## IV. RESULTADOS EXPERIMENTAIS E DISCUSSÃO

Nesta seção, comparamos o GMBUA proposto com o método dos mínimos quadrados com restrição (FCLSU), *Collaborative* [13], *Group* [14], *Elitist* [15] e *Fractional* de SE esparsa baseados em diferentes penalizações [5]. Para comparações quantitativas utilizamos a raiz do erro quadrático

médio (RMSE) e o mapeador de ângulo espectral (SAM) calculados em  $\mathbf{X}$ , além do tempo de execução. Nos casos em que uma matriz de abundância de referência (*ground-truth*) é conhecida, também incluímos a razão sinal-erro de reconstrução [6],  $SRE \text{ (dB)} = 10 \log_{10} (\|\mathbf{Z}\|_F^2 / \|\mathbf{Z} - \hat{\mathbf{Z}}\|_F^2)$ , que avalia a estimativa das abundâncias. Avaliações qualitativas basearam-se na visualização dos mapas de abundância globais gerados pelos algoritmos. Os resultados foram obtidos para valores de parâmetros de regularização ótimos obtidos por busca em grade para cada experimento e algoritmo. Ruídos brancos gaussianos foram adicionados aos dados testados para obter relações sinal-ruído (SNR) de 20 e 30 dB. Os algoritmos foram executados no software *MATLAB*<sup>®</sup>, em um computador equipado com um processador *Intel Core i7 9750H @ 2,60 GHz* e 16 GB de RAM.

**Dados sintéticos:** Para avaliar quantitativamente o desempenho dos algoritmos, geramos uma IH a partir de mapas de abundância gerados sinteticamente, com  $100 \times 100$  pixels e  $P = 9$  EMs, os quais são utilizados como *ground-truth*. Cada pixel da imagem é gerado utilizando como EMs assinaturas espectrais obtidas a partir de um subconjunto  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{224 \times 208}$  de materiais extraídos da biblioteca USGS, construída com características adequadas para avaliação do problema da variabilidade espectral.

Uma única execução de SE (caso particular do algoritmo proposto em que  $K = 1$ ) a partir da mesma biblioteca  $\mathbf{B}$  utilizada para gerar a imagem sintética foi inicialmente considerada para comparar os algoritmos. Dessa forma, é possível avaliar o potencial dos métodos sem a dependência da qualidade da etapa de extração de bibliotecas estruturadas de EMs. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela I. Os mapas de abundância globais estimados para o cenário mais ruidoso (20 dB SNR) são mostrados na Fig. 1.

TABELA I: Resultados para os dados sintéticos com  $K = 1$ . Os melhores resultados estão na cor vermelha, seguidos pelos destacados na cor azul. Valores de RMSE multiplicados por  $10^{-2}$ , SRE em dB e Tempo em segundos.

Método	SNR	SAM	RMSE	SRE	Tempo
FCLSU	Sem ruído	$\approx 0.00^\circ$	$\approx 0.00$	265.75	15.82
	30 dB	2.06°	1.54	8.11	22.51
	20 dB	6.52°	4.88	3.10	14.99
<i>Collaborative</i>	Sem ruído	1.45°	0.62	2.23	94.00
	30 dB	2.41°	1.67	2.06	101.97
	20 dB	6.33°	4.93	1.64	100.66
<i>Group</i>	Sem ruído	2.62°	1.86	1.01	57.81
	30 dB	3.39°	2.45	1.01	63.23
	20 dB	7.16°	5.29	1.02	58.85
<i>Elitist</i>	Sem ruído	2.20°	1.58	0.72	122.73
	30 dB	2.97°	2.25	0.70	138.52
	20 dB	6.76°	5.16	0.71	125.47
<i>Fractional</i>	Sem ruído	0.62°	0.48	6.63	147.53
	30 dB	2.12°	1.67	5.08	152.73
	20 dB	6.59°	4.94	2.87	161.51
GMBUA	Sem ruído	0.20°	0.20	10.94	170.04
	30 dB	2.02°	1.60	10.49	179.50
	20 dB	6.23°	4.95	8.51	182.35

Claramente, observando as métricas quantitativas, o desempenho do GMBUA superou os outros em praticamente todos os cenários, obtendo os melhores valores (em vermelho) ou

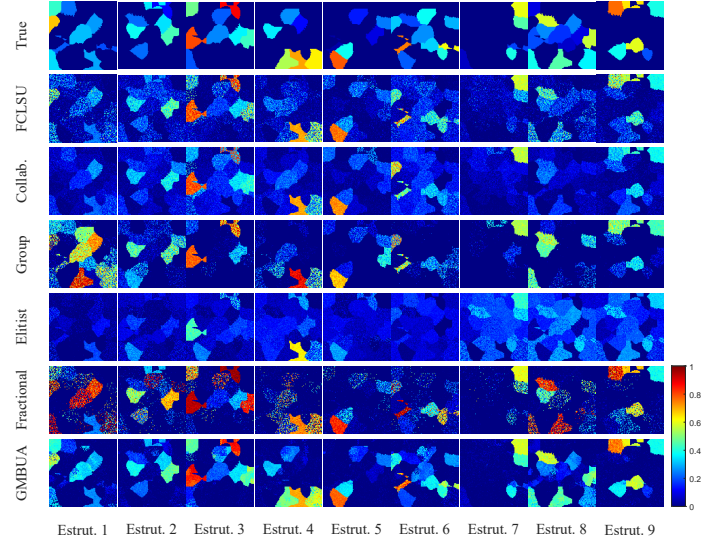


Fig. 1: Imagem sintética – Mapas de abundância globais estimados para cada EM com  $K = 1$  e 20 dB SNR.

o segundo lugar (em azul) nas métricas SAM e SRE, exceto pelo caso sem ruído, em que o melhor desempenho do FCLSU já era esperado, pois não tem regularizadores de esparsidade. O mesmo acontece com o tempo de execução. O FCLSU e o *Group* são os algoritmos mais simples e, portanto, os mais rápidos. Nesse caso, com o *ground-truth* das abundâncias conhecido, o desempenho do GMBUA supera em aproximadamente 5 dB o SRE obtido com o algoritmo *Fractional*, com um tempo de execução muito semelhante. Examinando a robustez dos métodos, desde o cenário sem ruído até o pior caso, 20 dB, houve uma redução de aproximadamente 22% no SRE para o GMBUA, enquanto para o *Fractional*, a redução foi de 57%. Na Fig. 1 podemos ver que o GMBUA gera estruturas de EMs que são mais semelhantes ao de referência. De fato, podemos ver que os outros métodos fornecem soluções ruidosas ou excessivamente esparsas como o caso do *Fractional*. Os mapas de abundâncias para os casos sem ruído e 30 dB SNR foram suprimidos por limitações de espaço.

**Dados reais:** Neste experimento, utilizamos a IH *Houston* [5], com  $152 \times 108$  pixels e 144 bandas espectrais. Essa IH contém  $P = 5$  EMs: concreto, telhados metálicos, vegetação, asfalto e outras estruturas coloridas. Para comparar o GMBUA com os resultados apresentados no artigo [16], foi usada uma execução ( $K = 1$ ) e a mesma biblioteca estruturada de EMs extraídas pelos autores. Os resultados quantitativos de cada algoritmo apresentados na Tabela II foram semelhantes aos do caso sintético, mostrando que o GMBUA supera os demais em relação à métrica SAM, exceto o algoritmo FCLSU pelos motivos já mencionados. Para imagens reais, a métrica SRE não pode ser calculada pela ausência do *ground-truth*.

Por fim, executamos o GMBUA e os demais algoritmos com  $K = 30$  realizações, mostrando a flexibilidade da aplicação da heurística proposta de seleção da abundância mais representativa para outros métodos. Os mapas resultantes para uma SNR de 20 dB são mostrados na Fig. 2. Como não temos uma abundância de referência para esses dados reais, comparamos visualmente os mapas de abundância globais estimados pelos algoritmos. Com exceção da penalidade elitista, todas as

TABELA II: Resultados para a imagem real com  $K = 1$ . Os melhores resultados estão na cor vermelha, seguidos pelos destacados na cor azul. Valores de RMSE multiplicados por  $10^{-2}$ .

Método	SNR	SAM	RMSE	Tempo (s)
FCLSU	Sem ruído	$\approx 0.00^\circ$	$\approx 0.00$	5.76
	30 dB	2.30°	0.73	4.87
	20 dB	6.77°	1.99	4.58
Collaborative	Sem ruído	1.23	0.46	33.08
	30 dB	2.54°	0.81	30.84
	20 dB	6.89°	2.03	30.32
Group	Sem ruído	2.79°	0.99	7.30
	30 dB	3.59°	1.20	6.97
	20 dB	7.37°	2.23	6.38
Elitist	Sem ruído	5.19°	1.64	46.33
	30 dB	5.66°	1.76	41.96
	20 dB	8.61°	2.57	40.45
Fractional	Sem ruído	2.37°	0.80	57.88
	30 dB	3.24°	1.03	53.00
	20 dB	7.19°	2.13	51.39
GMBUA	Sem ruído	1.04°	0.41	67.89
	30 dB	2.46°	0.79	64.74
	20 dB	6.88°	2.02	62.61

técnicas alcançam soluções aparentemente razoáveis, embora apenas GMBUA e o *Fractional* forneçam mapas de abundância explicitamente esparsos. Especificamente, observando estruturas de EMs de concreto e componentes coloridos, é possível afirmar a robustez da estratégia multi-escala ao lidar com o ruído em comparação com os outros algoritmos.

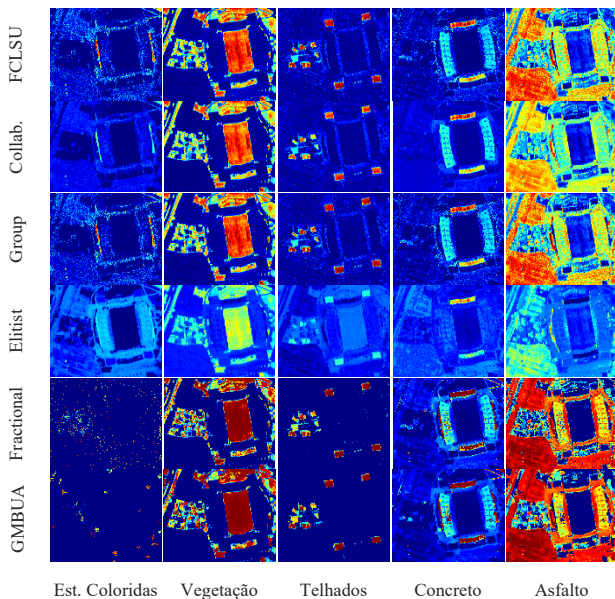


Fig. 2: Imagem real – Mapas de abundância globais estimados para cada EM com  $K = 30$  e 20 dB SNR.

## V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, formulamos uma generalização para a abordagem de regularização espacial multi-escala para resolver o problema de SE esparsa, permitindo o uso de normas mistas indutoras de esparsidade de grupo. Usando essa designação, propomos uma nova abordagem estruturada multi-escala para lidar com a variabilidade de EMs que garante a esparsidade

entre classes e intra-classe na estimativa de abundância sem um aumento significativo no custo computacional. Além disso, apresentamos uma heurística para determinar a estimativa de abundância mais representativa em várias execuções de SE. A nova heurística aumenta a robustez da solução à aleatoriedade do processo de extração dos EMs. Os experimentos em diferentes cenários demonstraram a confiabilidade do método e sua robustez ao ruído, estimando abundâncias com qualidade quando comparado aos algoritmos relacionados.

## REFERÊNCIAS

- [1] J. M. Bioucas-Dias, A. Plaza, N. Dobigeon, M. Parente, Q. Du, P. Gader, and J. Chanussot, "Hyperspectral unmixing overview: Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches," *IEEE journal of selected topics in applied earth observations and remote sensing*, vol. 5, no. 2, pp. 354–379, 2012.
- [2] R. A. Borsoi, T. Imbiriba, J. C. M. Bermudez, C. Richard, J. Chanussot, L. Drumetz, J.-Y. Tourneret, A. Zare, and C. Jutten, "Spectral variability in hyperspectral data unmixing: A comprehensive review," *IEEE geoscience and remote sensing magazine*, vol. 9, no. 4, pp. 223–270, 2021.
- [3] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Sparse unmixing of hyperspectral data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, no. 6, pp. 2014–2039, 2011.
- [4] B. Somers, M. Zortea, A. Plaza, and G. P. Asner, "Automated extraction of image-based endmember bundles for improved spectral unmixing," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 5, no. 2, pp. 396–408, 2012.
- [5] L. Drumetz, T. R. Meyer, J. Chanussot, A. L. Bertozzi, and C. Jutten, "Hyperspectral image unmixing with endmember bundles and group sparsity inducing mixed norms," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 28, no. 7, pp. 3435–3450, 2019.
- [6] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Total variation spatial regularization for sparse hyperspectral unmixing," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 50, no. 11, pp. 4484–4502, 2012.
- [7] S. Zhang, J. Li, H.-C. Li, C. Deng, and A. Plaza, "Spectral-spatial weighted sparse regression for hyperspectral image unmixing," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 56, no. 6, pp. 3265–3276, 2018.
- [8] R. A. Borsoi, T. Imbiriba, J. C. M. Bermudez, and C. Richard, "A fast multiscale spatial regularization for sparse hyperspectral unmixing," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 16, no. 4, pp. 598–602, 2018.
- [9] L. C. Ayres, S. J. de Almeida, J. C. Bermudez, and R. A. Borsoi, "A homogeneity-based multiscale hyperspectral image representation for sparse spectral unmixing," in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE, 2021, pp. 1460–1464.
- [10] T. Adalı, F. Kantar, M. A. B. S. Akhonda, S. Strother, V. D. Calhoun, and E. Acar, "Reproducibility in matrix and tensor decompositions: focus on model match, interpretability, and uniqueness," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 39, no. 4, pp. 8–24, 2022.
- [11] W. Du, S. Ma, G.-S. Fu, V. D. Calhoun, and T. Adalı, "A novel approach for assessing reliability of ica for fmri analysis," in *2014 IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing (Icassp)*. IEEE, 2014, pp. 2084–2088.
- [12] J. B. Kruskal, "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 7, no. 1, pp. 48–50, 1956.
- [13] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Collaborative sparse regression for hyperspectral unmixing," *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, vol. 52, no. 1, pp. 341–354, 2013.
- [14] L. Meier, S. Van De Geer, and P. Bühlmann, "The group lasso for logistic regression," *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, vol. 70, no. 1, pp. 53–71, 2008.
- [15] M. Kowalski and B. Torrèsani, "Sparsity and persistence: mixed norms provide simple signal models with dependent coefficients," *Signal, image and video processing*, vol. 3, pp. 251–264, 2009.
- [16] L. Drumetz, M.-A. Veganzones, S. Henrot, R. Phlypo, J. Chanussot, and C. Jutten, "Blind hyperspectral unmixing using an extended linear mixing model to address spectral variability," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 25, no. 8, pp. 3890–3905, 2016.