

Estimação e Extrapolação de Parâmetros de Projéteis Balísticos a partir de Medidas Radar

Paulo César Ribeiro Marciano, José Antonio Apolinário Jr. e João Abdalla Ney da Silva

Resumo— Os radares de contrabateria vêm ganhando notoriedade devido à sua capacidade de se contrapor às ameaças de artilharia modernas, ao estimar a posição da lançadora dos projéteis inimigos e seus pontos de impacto. O presente trabalho propõe um método para estimar os parâmetros de arrasto de projéteis balísticos em tempo real a partir de medidas 3D de radares. Isso permite estimar a trajetória futura dos projéteis e, conseqüentemente, o ponto de impacto, além de determinar a posição da lançadora. Os resultados da simulação mostram que o método utilizado tem um desempenho satisfatório em termos de precisão de estimativa comparado a outros métodos conhecidos.

Palavras-Chave— radar de contrabateria, balística externa, estimação de parâmetros, coeficiente de arrasto, extrapolação de trajetória.

Abstract— Counter-battery radars have been gaining notoriety due to their ability to counter modern artillery threats, by estimating the launcher position of enemy projectiles with great precision and speed. The present work proposes a method to estimate the drag parameters of ballistic projectiles in real time from 3D radar measurements. This allows estimating the future trajectory of projectiles and, consequently, the point of impact, in addition to determining the position of the launcher. The simulation results show that the used method performs satisfactorily in terms of estimation accuracy compared to other known methods.

Keywords— counter-battery radar, external ballistics, parameter estimation, drag coefficient, trajectory extrapolation.

I. INTRODUÇÃO

Nos cenários de guerra das últimas décadas, observou-se o frequente emprego de foguetes, projéteis de artilharia e granadas de morteiro (RAM, do inglês, *Rockets, Artillery projectiles, and Mortar grenades*), representando sérias ameaças às forças militares, bem como um grande perigo para suas instalações. Assim, as atividades de pesquisa e desenvolvimento na área de proteção de instalações tornaram-se muito relevantes, bem como a necessidade da implementação de um sistema de alerta precoce, preciso e que atue contra ameaças de RAM [1]. Uma das principais armas contra a artilharia são os radares de contrabateria, capazes de realizar medições da posição do alvo e estimar as trajetórias desses projéteis. A posição da lançadora (arma que realiza o disparo) pode ser estimada, havendo assim o reconhecimento da posição de fogo

P. C. R. Marciano[†] e J. A. Apolinário Jr.^{†‡}, Programas de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa[†] e de Engenharia Elétrica[‡], Instituto Militar de Engenharia (IME), Rio de Janeiro-RJ, e-mails: ribeiro.paulo@ime.eb.br e apolin@ime.eb.br; J. A. N. da Silva colabora com o Programas de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa, Instituto Militar de Engenharia (IME), Rio de Janeiro-RJ, e-mail: jabdallaney@gmail.com. À Equipe da Divisão de Avaliação de Material do Centro de Avaliações do Exército (CAEx). Este trabalho foi parcialmente financiado pela Marinha do Brasil, pelo Exército Brasileiro e por Projeto FINEP 0 1 22 0329 00.

do inimigo e possibilitando ações rápidas de contra-ataque, durante o combate. Ademais, após a detecção do projétil pelo radar e estimação da trajetória, pode-se também estimar o provável ponto de impacto. Simultaneamente, isso permite modificar a operação de suas próprias unidades de artilharia, além de detectar as posições de disparo do inimigo [2]. Nos sistemas radares de contrabateria (SRCB) atuais, o desempenho dos sistemas de radares e computadores permitem estimar as trajetórias de projéteis e seus pontos de disparo, detectando com certa precisão a localização dessas armas [3].

O estudo de estimação de trajetórias é explorado na literatura por meio de métodos clássicos como o EKF (*Extended Kalman Filter*) ou métodos mais recentes como o MMF (*Multiple Model Filter*). Em [4], [5] e [6], não foi observada a implementação de SRCB para comparar e validar sua eficiência em aplicações de tempo real. Os autores de [1] abordam a identificação de projéteis e a estimação de trajetórias mais voltada para um SRCB, onde um método factível e aplicável em sistemas de tempo real é testado para o caso bidimensional.

O estudo de balística externa demonstra a importância de se estimar os parâmetros de arrasto e, indiretamente, o coeficiente balístico, sendo eles responsáveis por grandes alterações no movimento dos projéteis [7].

Recente busca bibliográfica, indica a falta de publicações abordando metodologias aplicadas a SRCB lidando com medidas de radares reais, afetadas por diferentes fontes de ruído presentes no ambiente. Neste contexto, este artigo é desenvolvido com ênfase no SRCB e suas características típicas de operação.

Este trabalho utiliza um filtro digital projetado para preservar as informações de posição do alvo. Uma contribuição mais relevante é um método de modelagem do coeficiente de arrasto de projéteis balísticos mediante a sua estimativa inicial.

O artigo é dividido como segue: a Seção II caracteriza a modelagem das equações de movimento empregadas em balística externa. A Seção III apresenta as medidas radar utilizadas. A Seção IV mostra a análise no domínio da frequência dos sinais radares e a filtragem de suas medidas, enquanto a Seção V apresenta a metodologia. Por fim, nas Seções VI e VII, são apresentados os resultados e as conclusões, respectivamente.

II. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO BALÍSTICO

Existem várias forças e dinâmicas agindo em um projétil balístico. Algumas das forças como gravidade, arrasto, elevação, vento e Coriolis, agem independentemente da forma do projétil ou de seu modo de lançamento. Por outro lado, o modo de estabilização, a aerodinâmica ou outras propriedades intrínsecas, produzem dinâmicas distintas [8]. O modelo

utilizado neste trabalho considera a força de arrasto e a força da gravidade, desprezando-se efeitos de rotação, dado que os projéteis utilizados são estabilizados por aletas. A força de arrasto aerodinâmica que atua no projétil, pode ser representada por [8]

$$\mathbf{F}_D = -\frac{1}{2}\rho S C_D |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad (1)$$

onde S é a área da seção transversal do projétil, ρ a densidade do ar, \mathbf{v} o vetor velocidade do projétil e C_D o coeficiente de arrasto.

O coeficiente de arrasto do ar C_D depende do número *Mach*, ou seja, da razão entre a velocidade do projétil \mathbf{v} e a velocidade do som, ambas no ar, conforme a Figura 1.

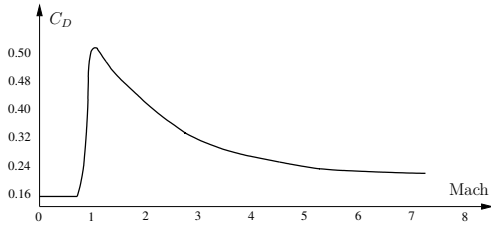


Fig. 1. Coeficiente de arrasto versus número Mach para um projétil típico (figura adaptada de [7]).

Como o arrasto é uma função da velocidade relativa do projétil, é mais conveniente usar um sistema de coordenadas fixo na terra, normalmente o sistema Leste-Norte-Acima (ENU, do inglês, East-North-Up). O modelo dinâmico para um projétil de massa m , levando em conta a força de arrasto em (1) e a gravidade, pode ser representada por

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -C_D^* \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad (2)$$

onde \ddot{x} , \ddot{y} e \ddot{z} correspondem as componentes do vetor aceleração e \dot{x} , \dot{y} e \dot{z} as componentes do vetor velocidade, g é a aceleração da gravidade com valor aproximado de $9,81 \text{ m/s}^2$.

A título de simplificação, adota-se na Eq. (2) que

$$C_D^* = \frac{\rho(z) S C_D}{2m}, \quad (3)$$

onde $\rho(z)$ é a densidade do ar na altitude z (em kg/m^3). A teoria de balística externa mostra que a diminuição de $\rho(z)$ com o aumento da altitude pode ser descrita, para altitudes moderadas, aproximadamente como uma função exponencial ou mais precisamente como uma função exponencial local da altitude, como indicado por [8]

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-hz}, \quad (4)$$

onde ρ_0 à densidade do ar no local de tiro e h o fator de decaimento densidade/altitude do ar ($1/\text{m}$).

III. MEDIDAS DO RADAR BANDA C

As medidas das trajetórias dos projéteis foram realizadas por meio de um radar Banda C (4,0 a 8,0 GHz). Esta é a faixa de frequências onde se encontram os radares de instrumentação que são precisos e de longo alcance, tipicamente usados

para o rastreamento de projéteis balísticos. A frequência de amostragem das medidas do radar é de $f_s = 20 \text{ Hz}$, os erros associados a essas medidas são fornecidos pelo equipamento a partir de sua operação durante o rastreamento de um dos projéteis estudados neste trabalho e são ilustrados na Figura 2. A medição da posição do alvo ocorre em coordenadas esféricas AER (do inglês em Azimuth-Elevation-Range), sendo ϕ o ângulo de elevação, θ o ângulo de azimute e R a distância radial do projétil.

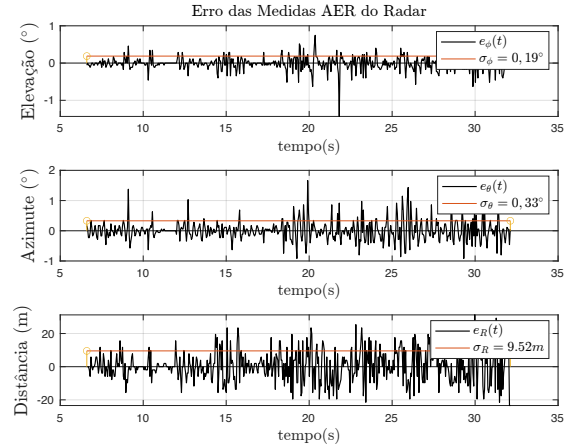


Fig. 2. Estimativa do erro das medidas AER do radar.

A relação do sistema de coordenadas AER com as coordenadas ENU é ilustrada pela Figura 3.

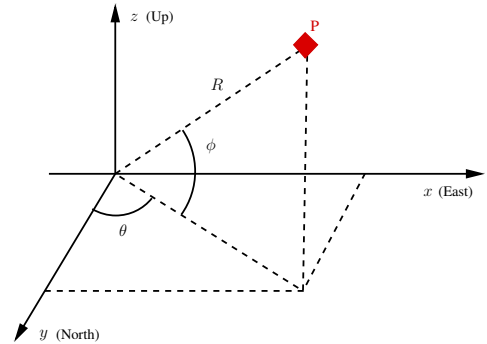


Fig. 3. Sistemas de coordenadas AER ($[\theta \ \phi \ R]$) e ENU ($[x \ y \ z]$).

A Figura 4 ilustra os dados do Radar, obtidos com o emprego do Sistema Transportável para Rastreamento de Engenheiros em Voo (STREV) do Centro de Avaliações do Exército (CAEx). Ela representa as medidas do radar de dois projéteis de características diferentes, P1 e P2, e as trajetórias formadas após a transformação para coordenadas ENU. As medições podem estar contaminadas por sinais aleatórios, como ruído atmosférico e térmico, interferência eletromagnética, anomalias do meio de propagação e até mesmo contramedidas eletrônicas [9]. A estimativa aprimorada da trajetória do projétil ao longo do tempo, pode ser obtida pela filtragem de suas medidas de posição que estejam de acordo com seu modelo dinâmico.

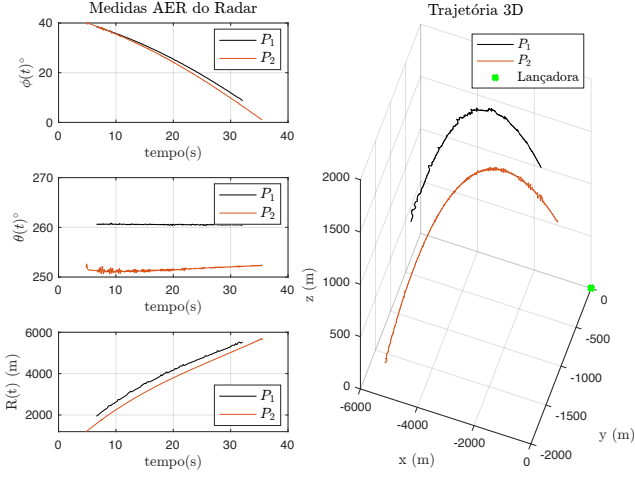


Fig. 4. Medidas do radar nos sistemas de coordenadas AER e ENU.

IV. ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Para uma visão das medidas no domínio da frequência, tomamos os módulos das DFTs [10], a N pontos, das medidas no sistema ENU, ou seja, para o caso de N medidas $x(n)$ (East), usamos $X_m(f) = |X(k)| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nk/N} \right|$, $0 \leq k \leq N-1$, onde $f = kf_s/N$. De similar maneira, obtivemos $Y_m(f)$ e $Z_m(f)$.

Na Figura 5 observamos $X_m(f)$, $Y_m(f)$ e $Z_m(f)$, os módulos das respostas em frequência das medidas no sistema ENU para dois tipos distintos de projéteis: P_1 (esquerda) e P_2 (direita). São também indicados os módulos das respostas em frequência teóricas (índice T), simulados no software *PRODAS*[®] (*Projectile Rocket Ordnance Design & Analysis System*) [11].

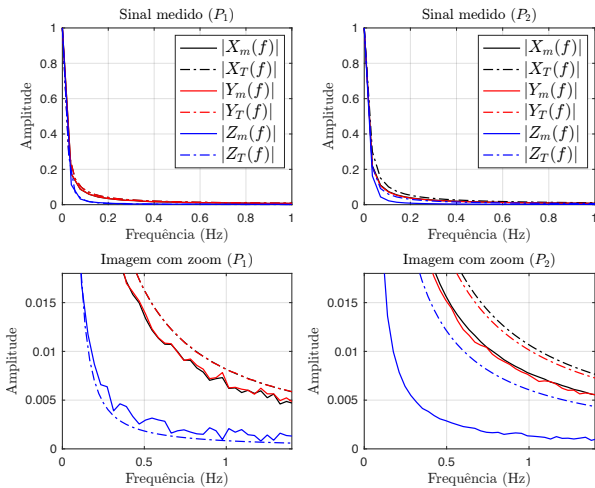


Fig. 5. Análise no domínio da frequência das medidas radar e PRODAS.

Para esta aplicação optou-se por um filtro passa baixa IIR elíptico. Os filtros elípticos apresentam comportamento *equiripple* tanto na banda de passagem quanto na de atenuação [12].

O filtro foi projetado, considerando a análise no domínio da frequência dos projéteis P_1 e P_2 simulados no software

PRODAS, para atender às seguintes especificações: frequência da banda de passagem $\Omega_p = 0,08\pi$ rad/s (ou $f_p = 0,04$ Hz), ganho máximo na banda de passagem igual a 0,01 dB, atenuação mínima na banda de rejeição igual a 60 dB e ordem igual a 2. As medidas $x(n)$, $y(n)$ e $z(n)$ formam as 3 entradas do filtro. A Figura 6 mostra o desempenho do filtro elíptico para os dois tipos de projéteis, os sinais $|X_w(f)|$, $|Y_w(f)|$ e $|Z_w(f)|$ representam as saídas filtradas no domínio da frequência. A atenuação de 60 dB não é observada devido ao efeito do transiente do filtro diante de um número reduzido de medições (duração da trajetória de P_1 multiplicada por f_s resulta em 510 amostras).

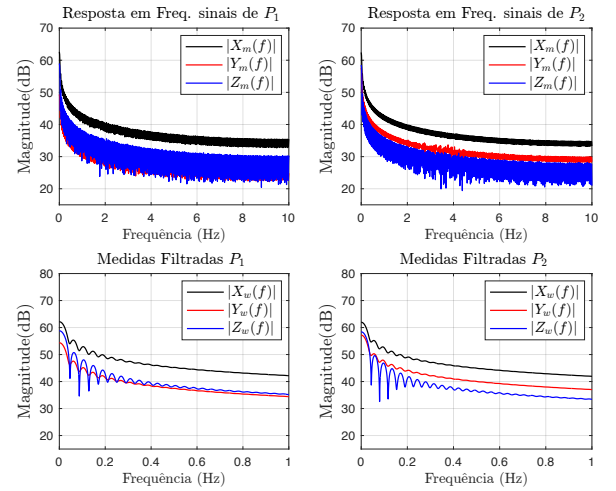


Fig. 6. Resposta em frequência (magnitude) antes e após a filtragem passa-baixa.

V. METODOLOGIA

O sistema da Eq. (2) não pode ser integrado analiticamente, mas podemos recorrer a uma integração numérica [13]. Filtradas as medidas radar, adotando $d(\cdot)/dt \approx \Delta(\cdot)/\Delta t$, tal que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Delta x / \Delta t \\ \Delta y / \Delta t \\ \Delta z / \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x(n+1) - x(n))/T \\ (y(n+1) - y(n))/T \\ (z(n+1) - z(n))/T \end{bmatrix} \quad (5)$$

e

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} / \Delta t \\ \Delta \dot{y} / \Delta t \\ \Delta \dot{z} / \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{x}(n+1) - \dot{x}(n))/T \\ (\dot{y}(n+1) - \dot{y}(n))/T \\ (\dot{z}(n+1) - \dot{z}(n))/T \end{bmatrix}, \quad (6)$$

onde $T = 1/f_s$ corresponde ao período de amostragem. Conforme demonstrado em [4], pode-se aproximar o coeficiente de arrasto C_D^* utilizando as características da trajetória balística, como segue.

$$\begin{cases} \hat{C}_{D_x}^* \simeq -\ddot{x}/\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ \hat{C}_{D_y}^* \simeq -\ddot{y}/\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ \hat{C}_{D_z}^* \simeq -(\ddot{z} + g)/\dot{z}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \end{cases} \quad (7)$$

A Figura 7 mostra a estimativa de C_D , utilizando a Eq. (7), com duração de 17,05 segundos para P_1 e 20,8 segundos

para P_2 , representada pelo sinal em cinza e calculada por meio de \hat{C}_{D_x} , sendo o mesmo aplicado as outras componentes y e z [4]. As relações sinal-ruído (SNRs) das medidas são, aproximadamente, 20, 1 dB e 40, 6 dB, respectivamente. Como a potência do ruído é maior nas medidas de P_1 , percebemos maiores oscilações em sua estimativa de arrasto. Para suavizar a estimativa, foi utilizado um filtro Butterworth de 4ª Ordem, representado pelo traçado preto da imagem.

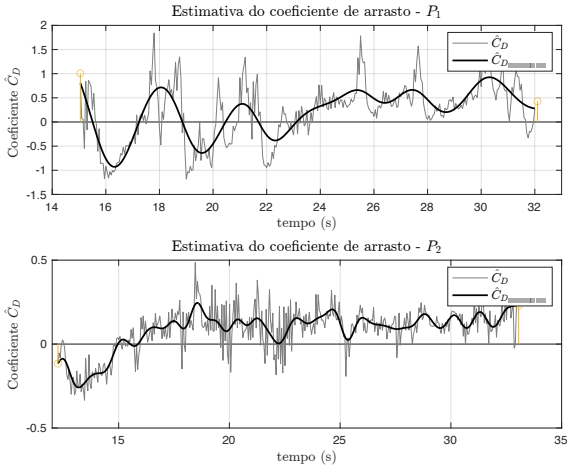


Fig. 7. Estimativa dos coeficientes de arrasto dos dois projéteis.

O algoritmo utilizado para validar as estimativas do coeficiente de arrasto dos projéteis está representado pela Eq. (8). Trata-se do método de integração numérica *Runge–Kutta* de 4ª Ordem [1], usado para obter as posições x , y e z com base na estimativa de C_D e nos cálculos realizados nas Eqs. (5) e (6). O passo h do algoritmo equivale ao período de amostragem T das medidas.

$$\begin{cases} k_1 = f(\lambda(n)) \\ k_2 = f(\lambda(n) + \frac{T}{2}k_1) \\ k_3 = f(\lambda(n) + \frac{T}{4}(k_1 + k_2)) \\ k_4 = f(\lambda(n) - T(k_2 + 2k_3)) \\ \lambda(n+1) = \lambda(n) + \frac{1}{6}T(k_1 + 4k_3 + k_4) \end{cases} \quad (8)$$

A Figura 8 representa a validação do modelo e da estimativa dos coeficientes de arrasto dos dois projéteis.

Os erros de estimativa mostrados na Figura 9, foram calculados para cada componente da trajetória de P_1 e P_2 como

$$e(\%) = \left| \frac{\text{valor}_{\text{previsto}} - \text{valor}_{\text{estimado}}}{\text{valor}_{\text{previsto}}} \right| \times 100, \quad (9)$$

onde os valores previstos correspondem as medidas filtradas e os valores estimados foram obtidos da Eq. (8), após os cálculos de \hat{C}_D realizados pela Eq. (7).

Foram simulados alguns métodos de modelagem de coeficiente de arrasto apresentados na literatura, métodos I e II, bem como o proposto neste trabalho, método III.

A. Método I - Processo de Wiener [4]

Neste método o coeficiente de arrasto é modelado como $C_D(t)$ sendo um processo estocástico de Wiener. O coeficiente

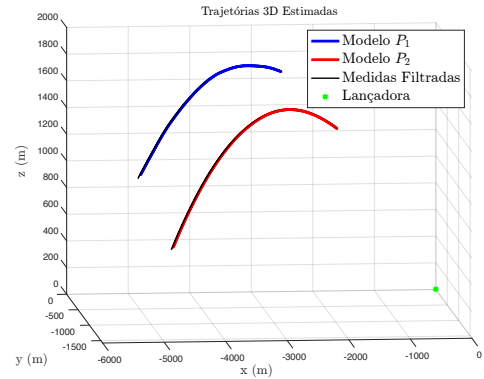


Fig. 8. Modelos utilizando \hat{C}_D estimados durante todo o intervalo de rastreamento.

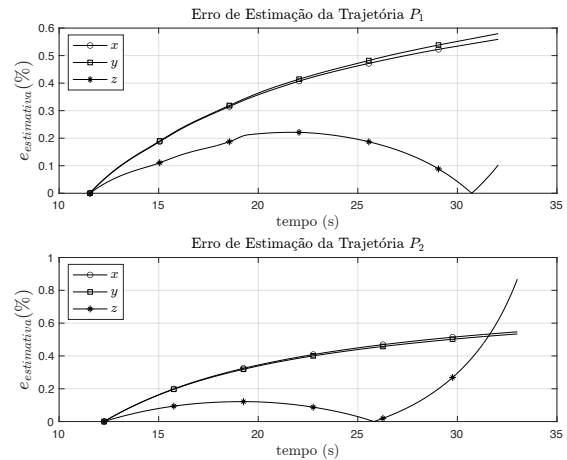


Fig. 9. Erro do modelo utilizado na trajetória da Figura 8.

é caracterizado por uma variável aleatória (V.A.) Gaussiana, com média zero e variância αt [14]. Sendo α uma constante, ou seja, uma V.A. com variância que se altera linearmente com o tempo t . Esse modelo pode ser considerado o mais simples e serve como referência ao ser comparado com métodos mais precisos.

B. Método II - Conhecimento *a priori* de C_D [14]

Toma como base o conhecimento prévio do parâmetro de arrasto, seu desvio a partir de um valor nominal conhecido \bar{C}_D , em termos da proporção C_D/\bar{C}_D . Seja seu logaritmo $\delta \triangleq \ln(C_D/\bar{C}_D)$ constante, ou seja, $C_D = \bar{C}_D e^{\delta(t)}$, onde $\delta(t)$ é modelado como um processo Markoviano de primeira ordem [15]. Para este trabalho, \bar{C}_D foi escolhido como sendo uma média dos valores de \hat{C}_D da Eq.(7).

C. Método III - Modelo Gaussiano com média não nula (proposto neste trabalho)

É utilizado um modelo Gaussiano $N(\mu_n, \sigma_n^2)$, onde seus parâmetros, média e variância, são calculados após a utilização da Eq. (7). Assim, obtendo os valores de \hat{C}_D^* por meio das n amostras do radar, o modelo apresenta média $\mu_n = E[\hat{C}_D^*(n)]$ e $\sigma_n^2 = E[(\hat{C}_D^*(n) - \mu_n)^2]$, onde μ_n é a média de $\hat{C}_D(n)$ obtido pelas n medidas do radar e σ_n^2 a respectiva variância.

VI. RESULTADOS

A Figura 10 mostra o comportamento do erro ao longo do tempo para os três métodos, aplicados ao projétil P_1 . Foram comparados por meio de simulações de Monte Carlo, onde consideramos um *ensemble* de 50 rodadas independentes. O conhecimento *a priori* do arrasto ajuda a reduzir o erro de estimação, mostrando que a estimativa inicial é importante para a acurácia do modelo.

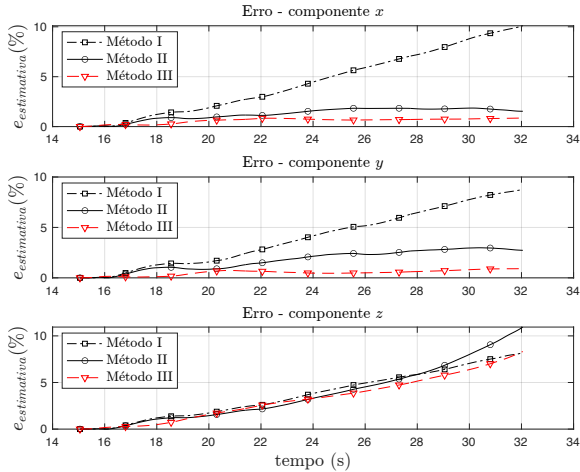


Fig. 10. Medida do erro dos três métodos (projétil P_1).

O Método III apresentado no trabalho e representado na Figura 10, apresentou os melhores resultados, pode ser utilizado em aplicações onde tenhamos conhecimento das medidas iniciais da posição de projéteis balísticos. Assim, com a intenção de conhecer o tempo de rastreo mínimo para uma boa estimativa de C_D , de baixo erro, alguns intervalos de tempo Δt foram testados neste modelo: 3, 4 e 5 segundos.

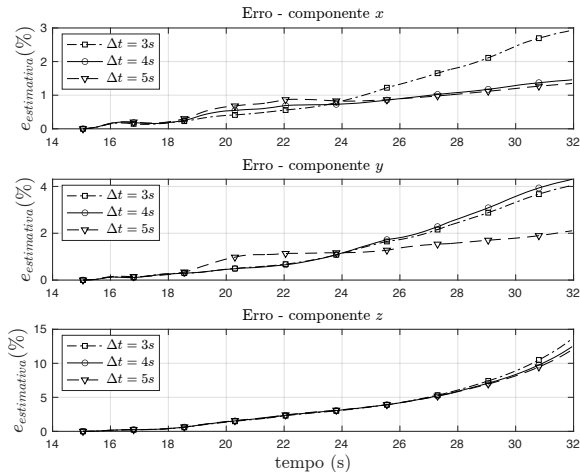


Fig. 11. Erro do Método III proposto para intervalos de tempo curtos.

A Figura 11 mostra os resultados da simulação, para instantes de tempo pequenos como 3 e 4 segundos, os erros percentuais de estimação são mais altos, principalmente nas componentes x e y da trajetória. O erro para a componente z foi maior, mesmo com $\Delta t = 5$ segundos, comparado ao terceiro gráfico da Figura 10 (Método III) devido ao intervalo de tempo Δt ser restrito a até 5 segundos.

VII. CONCLUSÕES

Este trabalho utilizou um método para estimar o coeficiente de arrasto de projéteis balísticos por meio de medidas radar e propôs o

uso de um modelo Gaussiano para a estimativa deste coeficiente. O método proposto apresentou compatibilidade com os outros métodos, com a vantagem de se ter o conhecimento *a priori* das estimativas iniciais de C_D , o que mostrou uma redução no erro de estimativa da trajetória, quando comparado com os métodos já existentes na literatura. A acurácia na estimativa do parâmetro de arrasto é melhor conforme o aumento do número de amostras das medidas radar. Para as medições do Radar Banda C, intervalos de tempo de 5 segundos, resultaram em estimativas das trajetórias balísticas com erro percentual de até 2% para x e y , alcançando um máximo de 10% para a coordenada z , ao final da trajetória.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Ramezani e H. Rothe, “Simulation-Based Early Prediction of Rocket, Artillery, and Mortar Trajectories and Real-Time Optimization for Counter-RAM Systems,” *Mathematical Problems in Engineering*, 2017.
- [2] P. Dodin, P. Minvielle e J. Cadre, “Estimating the Ballistic Coefficient of a Re-Entry Vehicle,” *Radar, Sonar & Navigation, IET*, 2007.
- [3] F. Reali, G. Palmerini, A. Farina, A. Graziano, S. Giompapa e B. Parisi, “Initialization of ballistic targets tracking filters with detection probability lower than unity,” 2010.
- [4] V. C. Ravindra, Y. Bar-Shalom e P. Willett, “Projectile Identification and Impact Point Prediction,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, pp. 2004–2021, 2010.
- [5] F. Reali, G. Palmerini, A. Farina, A. Graziano e L. Timmoneri, “Tracking a ballistic target by multiple model approach,” em *2009 IEEE Aerospace conference*, 2009.
- [6] D. F. Hardiman, J. C. Kerce e G. C. Brown, “Nonlinear estimation techniques for impact point prediction of ballistic targets,” em *Signal and Data Processing of Small Targets*, O. E. Drummond, ed., SPIE, 2006.
- [7] S. S. J. Donald E. Carlucci, *Ballistics Theory and Design of Guns and Ammunition*, 3rd ed. CRC Press, 2017.
- [8] R. L. McCoy, *Modern Exterior Ballistics The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*, 1st ed. Atglen, PA: Schiffer Publishing, 1999.
- [9] J. Eaves e E. Reedy, *Principles of Modern Radar*, 1th ed. Springer US, 2012.
- [10] A. V. S. W. Oppenheim, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. Pearson, 2014.
- [11] A. T. S. Products, *Projectile Rocket Ordnance Design and Analysis System PRODAS V. 3.5*, 2013.
- [12] P. S. R. Diniz, E. A. B. da Silva e S. L. Netto, *Digital Signal Processing: System Analysis and Design*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2010.
- [13] C. F. Gerald e P. O. Wheatley, *Applied Numerical Analysis*, 7th ed. Pearson, 2014.
- [14] X. R. Li e V. P. Jilkov, “Survey of Maneuvering Target Tracking. Part II,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010.
- [15] A. G. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, 3rd ed. Pearson Prentice Hall, 2008.