

Avaliação Comparativa de Métodos de Reconstrução Inversa

Allan de Oliveira Fontes e Lisandro Lovisolo

Resumo—Este trabalho propõe um método para análise comparativa de técnicas de reconstrução tomográfica, tendo um Índice de Qualidade Agregado como elemento principal. Aplicamos o método na análise de dezesseis algoritmos de reconstrução recorrentes na bibliografia, advindos de cinco classes: Fourier, Algébricos, Estimação de Máxima Verossimilhança, Regularização e Gradiente Descendente. Analisamos reconstruções de imagens contendo objetos de três campos de aplicação distintos, sob diferentes níveis de corrupção por ruído. Os resultados indicam que os métodos baseados em estimação de máxima verossimilhança provêm o melhor compromisso entre custo computacional e qualidade da imagem reconstruída.

Palavras-Chave—Tomografia, Reconstrução, Comparação

Abstract—This work proposes a method for comparative analysis of tomographic reconstruction techniques, having an Aggregate Quality Index as the main element. We apply the method in analyzing sixteen recurrent reconstruction algorithms in the bibliography, grouped in five classes: Fourier, Algebraic, Maximum Likelihood Estimation, Regularization, and Gradient Descent. We analyzed image reconstructions containing objects from three different fields of application, under different levels of noise corruption. The results indicate that methods based on maximum likelihood estimation provide the best compromise between computational cost and reconstructed image quality.

Keywords—Tomography, Reconstruction, Comparison

I. INTRODUÇÃO

A Tomografia consiste na obtenção de uma imagem da seção-reta de um *objeto* por meio de um conjunto de medições *não-invasivas*. Cada medida, obtida pela interação entre um *feixe de sondagem* e o objeto, fornece um *ponto de projeção*. O total de pontos de projeção do objeto perfaz o *sinograma*. Consideramos o *processo de aquisição* dos pontos de projeção com arranjo de *feixes paralelos* [13]. A partir do sinograma, reconstrói-se a seção-reta do objeto. A *reconstrução* é um problema inverso mal-condicionado para o qual diferentes algoritmos foram propostos [2], [14], visando acomodar diferentes técnicas de sondagem e contornar dificuldades do processo de reconstrução.

Consideramos um conjunto de sinogramas comum, relativo a objetos, em escala de intensidade luminosa, de três áreas de aplicação distintas. Elas são: exames por imagem (saúde), reconstrução de plantas (engenharia civil e salvamento) e monitoramento de qualidade de peças (indústria). Simulam-se diferentes níveis de degradações progressivas por meio da adição ruído, num total de trinta casos. O ruído gaussiano adicionado ao sinograma é calibrado a partir do *Peak Signal to Noise Ratio* (PSNR) diretamente no sinograma.

Os resultados da aplicação de dezesseis (16) algoritmos de reconstrução inversa foram obtidos e avaliados pelo método proposto, isso pode permitir direcionar a escolha do algoritmo de reconstrução para uma aplicação específica.

A parte quantitativa do método proposto tem como elemento principal a aplicação de um *Índice de Qualidade*

Agregado. Ele permite analisar a estabilidade do desempenho e da qualidade das reconstruções dos algoritmos. Este índice é baseado no *Mean Structural Similarity Index* (MSSIM) [21]. Quando o algoritmo é iterativo, usam-se até 50 iterações na avaliação. Avaliamos ainda o tempo de processamento da primeira iteração de cada um dos dezesseis algoritmos para acessar o custo computacional da reconstrução. Como resultado desse procedimento, por exemplo, observou-se que os algoritmos baseados em *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) oferecem o melhor compromisso entre custo computacional e qualidade da reconstrução.

A Seção II traz alguns pontos sobre o problema da reconstrução a partir de projeções (Tomografia). Na Seção III, apresentamos a metodologia de avaliação aplicada aos métodos de reconstrução. A Seção IV apresenta uma síntese dos resultados obtidos e suas análises. A Seção V apresenta nossas conclusões.

II. RECONSTRUÇÃO A PARTIR DE PROJEÇÕES (TOMOGRAFIA)

O *feixe de sondagem* pode ser interpretado como uma linha, uma faixa, ou um setor circular. A disposição dos feixes (geometria) pode ser de feixes paralelos ou oblíquos [13]. A geometria de feixes paralelos (*Parallel Beam Geometry* - PBG) é ilustrada na Figura 1. A área é sondada por K grupos de J feixes paralelos, cada grupo é definido por uma reta de referência com ângulo α sobre a qual ρ define a posição do feixe. Esse foi o primeiro método de aquisição e ainda é utilizado em muitas aplicações [3], [13]; assim, o consideramos neste trabalho. A transformada de Radon [17] fornece a expressão geral dos *pontos de projeção* da aquisição PBG na área de sondagem $f(x, y)$, de dimensões $X \times Y$,

$$p(\alpha, \rho) = \sum_{x=1}^X \sum_{y=1}^Y f(x, y) \delta(x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho), \quad (1)$$

onde $p(\alpha, \rho)$ representa a interação entre um feixe e o objeto. Para um ângulo α_k fixo, $p(\alpha_k, \rho)$ fornece a expressão geral dos pontos de projeção do grupo ou *projeção* (k). O conjunto de K *projeções*, cada uma com J *pontos de projeção*, fornece um *sinograma* \mathbf{p} , com dimensões $J \times K$. A *reconstrução* parte do sinograma para obter a seção-reta (corte) do objeto-alvo varrida pelos feixes co-planares [13], [17] – uma imagem.

Seguindo para uma modelagem algébrica, podemos representar o corte desejado como uma matriz (imagem); cada elemento dessa matriz irá depender de suas interações com todos os feixes de sondagem que o atravessam [13]. Dessa forma, temos o sistema de equações lineares (SEL).

$$p_i = \sum_{j=1}^J a_{ij} \theta_j \quad \rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta}^T, \quad (2)$$

onde, p_i é o ponto de projeção (medida) correspondente ao feixe de sondagem i , θ_j é o pixel j da imagem, $\boldsymbol{\theta} =$

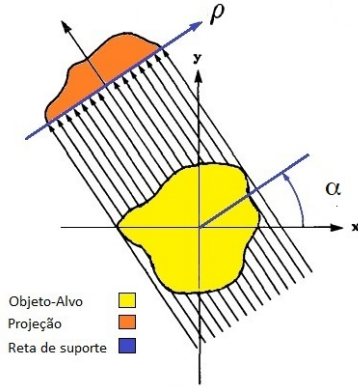


Fig. 1: Geometria de feixes paralelos - PBG.

$[\theta_1, \dots, \theta_J]$ é o vetor imagem e a_{ij} representa o coeficiente de interação entre o raio de sondagem i e o pixel j na área sondada (\mathbf{A} é o operador aquisição) [13].

A reconstrução a partir de projeções é um problema *inverso*. A reconstrução do corte do objeto, idealmente, é igual à região sondada $f(x, y)$ e, caso exista, estará contida no conjunto solução do SEL (2). Ao mesmo tempo que o problema é *mal-condicionado*, \mathbf{A} é significativamente esparsa e de grandes dimensões. Diferentes métodos de reconstrução surgiram propondo diferentes modelos, contornando diferentes dificuldades e advogando diferentes vantagens [2], [13], [14].

Os algoritmos de reconstrução baseados no *Teorema da Fatia de Fourier*, como o *Filtered Back-Projection* (FBP) [18] e *Fourier Grid Reconstruction Algorithm* (GRIDREC) consideram pontos de projeção circularmente distribuídos no domínio de Fourier e obtêm soluções em um único passo. [7], [8], [13], [16], [18]. O FBP advém de exames de imageamento por raios-X [18]. É derivado do teorema da fatia ao adicionar uma filtragem no domínio da frequência para cada projeção [13]. O GRIDREC advém da radioastronomia. É derivado do FBP ao adicionar uma conversão do diagrama espectral, do formato de grade polar para o cartesiano. Utilizamos a implementação FBP da biblioteca ASTRA [19], e GRIDREC, da Python TomoPy [10].

O ART foi desenvolvido para aplicações da microscopia eletrônica e imageamento por raios-X [9]. Considera o feixe uma faixa, cujas interações (superposições) com os pixels em seu trajeto geram o ponto de projeção; o que é modelado por uma equação linear que gera um hiperplano. Se o feixe intercepta o centro do pixel, ele afeta o ponto de projeção [13]. A aquisição é modelada binariamente, i.e., codifica-se a interceptação ou não do centro da célula pelo raio, simplificando o algoritmo. A cada iteração, a solução anterior é vetorialmente projetada no hiperplano atual, aprimorando assim a solução. [8], [13], [16]. No SIRT, todos os pontos de projeção de uma interação são considerados para uma correção média para a solução [13]. Isso reduz a manifestação de erros inatos da aproximação binária [13]. O SART emprega elementos bilineares (em vez de pixels isolados) na reconstrução [1]. Assim, requer poucas iterações para obter uma solução satisfatória, perdendo qualidade com o aumento das iterações [13]. O BART processa subgrupos, blocos, ou regiões da área de sondagem em vez de toda a área, visando processamento fracionado e paralelo. Cada bloco é processado usando o ART ou SIRT. O processamento de todos os blocos da área de sondagem,

independentemente, compõe uma iteração do algoritmo BART para a área total. Utilizamos as implementações ART, SIRT e BART da biblioteca Python TomoPy [10], já a SIRT advém da Python Sci-Image [20].

Alguns algoritmos de reconstrução adotam o princípio de *Maximum Likelihood Estimation*, como o *Maximum-Likelihood Expectation Maximization* (MLEM) [6], o *Ordered-Subset Expectation Maximization Algorithm* (OSEM) [12], e o *Penalized maximum likelihood* (PML) [5]. Essas técnicas foram desenvolvidas para atender aplicações de tomografia por emissão de pósitrons (PET), na qual o objeto-alvo (paciente) se torna um emissor de radiação (pósitrons). Consequentemente, por segurança, as medidas (pontos de projeção) passam a ser muito baixas. Assume-se um paradigma probabilístico (com uma distribuição de Poisson) com múltiplas aquisições de cada ponto de projeção e aplica-se o EM (*Expectation Maximization*) para encontrar o máximo da função de máxima verossimilhança [6].

Considera-se que as observações $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ são produzidas por um processo com distribuição de probabilidades (conjunta) desconhecida que pode ser modelada usando um vetor de parâmetros $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_K]$. Métodos MLE visam encontrar o vetor de parâmetros que maximiza a função de verossimilhança (*likelihood*) $\mathbf{f}_n(\mathbf{y}, \phi)$. Na prática, emprega-se o logaritmo da mesma devido a vantagens de cálculo e de implementação. Aqui, cada ponto do sinograma é considerado como o valor médio que resultaria das múltiplas medidas do feixe correspondente.

O MLEM emprega EM para obter a solução MLE iterativamente [6]. O OSEM deriva do MLEM com o ordenamento de subconjuntos de amostras (OS, *Ordered Subset*), visando a redução do tempo de convergência [12]. Enquanto o MLEM processa as projeções adquiridas de forma conjunta. O OS aplica uma sequência de reconstruções usando subgrupos ordenados de medidas por iteração. A reconstrução obtida com um subgrupo é o ponto partida para a reconstrução com o subgrupo seguinte [12]. Os métodos PML (*Penalized maximum likelihood*) inserem penalidades à solução MLE. O PML-Q (*PML with Quadratic penalty*) aplica uma penalidade quadrática [8] e o PML-H (*PML with weighted Linear and Quadratic penalties*), adiciona ao PML-Q uma penalidade linear (o H se refere a "Híbrido") que melhora a estabilidade e a qualidade das reconstruções às custas de um esforço computacional extra [5], [8]. As variantes OSPML-Q (*OSPML with Quadratic penalties*) e OSPML-H (*Ordered Subset PML with Weighted Linear and Quadratic penalties*) incluem a OS ao PML-Q e PML-H, visando a redução do tempo de convergência [5], [8]. Nos testes apresentados, usou-se implementações dos métodos MLEM, OSEM e as variantes PML da biblioteca Python TomoPy [10].

Encontramos ainda algoritmos baseados em gradiente, como o *Gradient Descent* (GRAD) [2] e o *Conjugate Gradient Least Squares* (CGLS) [11]. O GRAD utiliza o gradiente descendente para encontrar a solução do problema inverso (a imagem da seção-reta do objeto-alvo) [15]. Computam-se as derivadas parciais do erro médio quadrático entre a projeção provida do processo de aquisição e a projeção com base na imagem reconstruída para obter uma correção que aprimora o resultado. Esse processo é iterado até alcançar um erro mínimo ou uma quantidade pré-definida de iterações [2]. O CGLS emprega o gradiente conjugado *Conjugate Gradient* (CG), adequado para oti-

mizar problemas de mínimos quadrados [2]. O CG aplica o gradiente descendente num espaço ortogonal [2]. Usamos a implementação GRAD da biblioteca Python TomoPy [10] e a CGLS da biblioteca ASTRA Toolbox [19].

Há ainda métodos para a resolução do SEL de aquisição usando regularização de Tikhonov (TIKH) [22] ou *Total Variation* (TV) [4]. A regularização Tikhonov visa corrigir instabilidades na solução iterativa do SEL mal-condicionado, como os de natureza inversa [2]; reduz-se o espaço de soluções usando informação a priori sobre elas [2]. Essa informação é adicionada à função de custo mínimo quadrático e a solução é, em geral, obtida usando decomposição em valores singulares. Isso impõe um compromisso entre o erro de reconstrução e os componentes de alta frequência, com redução de definição de bordas, cujo balanceamento depende da força da regularização [14], [22]. A TV mede a variabilidade da imagem, i.e., totalizando as diferenças em adjacências [2], [4]. Com a TV reconstrói-se melhor as bordas [4] pois, apesar de que em bordas o termo regularizador (gradiente) ser localmente acentuado, penaliza-se o somatório dos gradientes, preservando as arestas. Alguns, sugerem que a TV é fortemente adequada para problemas de reconstrução de imagens [2], [4]. As implementações do TIKH e do TV utilizadas nos testes advêm da biblioteca TomoPy [10].

III. METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO

A. Implementação do Método de Aquisição PBG

Simulamos o processo de aquisição via software. A implementação em Python (versão 3.10.0) utiliza funções da biblioteca TomoPy [10]. O processo de aquisição é bidimensional visando a obtenção de um corte. O comprimento da aresta dos pixels define também a largura do feixe de sondagem. Emprega-se 360 ângulos de projeção uniformemente espaçados. Cada ângulo define uma reta auxiliar ρ , na qual são dispostos 128 feixes paralelos entre si uniformemente espaçados. As projeções resultantes são normalizadas entre 0 e 1.

1) *Objetos-Alvo*: Foram escolhidos os objetos-alvo advindos de monitoramento de qualidade de peças (Engrenagem), reconstrução de plantas (Horus), e exames médicos (Phantom). Eles são apresentados na Figura 2.

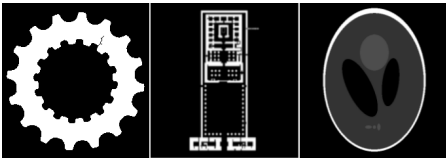


Fig. 2: Objetos-alvo Engrenagem, Horus e Phantom

2) *Sinogramas*: Para cada objeto-alvo, a simulação da aquisição produz o sinograma íntegro que podem ser vistos na Figura 3; na qual, na primeira coluna, de cima para baixo, temos os sinogramas de Engrenagem, Horus e Phantom.

3) *Reconstruções*: Ilustramos as reconstruções obtidas por cada um dos métodos discutidos a partir do sinograma original do objeto-alvo Horus na Figura 4. Quaisquer diferenças de qualidade observadas advêm exclusivamente de aspectos próprios dos algoritmos de reconstrução. Destacam-se dois defeitos: a perda de definição nas bordas (*blurring*) e a formação de uma região circular causada pela diferença radial da densidade de feixes por pixel.

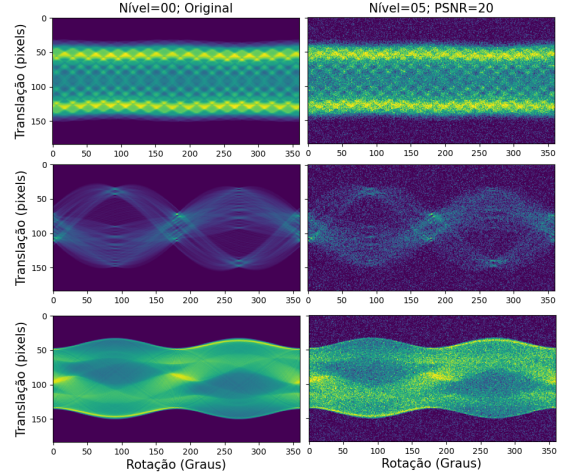


Fig. 3: Na esquerda, temos os sinogramas íntegros dos objetos-alvo Engrenagem, Horus e Phantom e, na direita, os corrompidos por erro nível 5 (Tabela I).

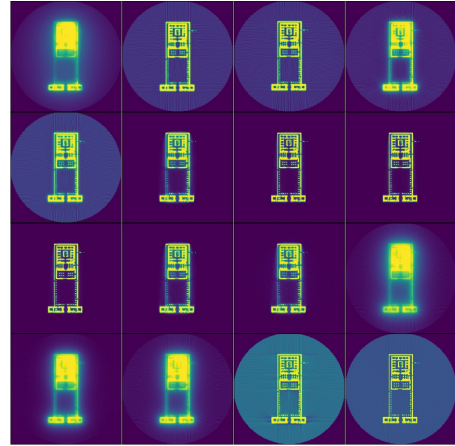


Fig. 4: Reconstruções do sinograma íntegro do objeto-alvo Horus com os 16 algoritmos avaliados. Por ordem de escrita: CGLS (01 iteração); FBP e GRIDREC (não iterativos); SIRT, BART, MLEM, OSEM, TV, OSPML-H, OSPML-Q, PML-H, PML-Q, TIKH, GRAD, SART e ART (todos com 25 iterações)

4) *Modelagem da Corrupção na Aquisição*: Neste trabalho, interpreta-se o ruído como incidente no ato de medida em si; ele corrompe o sinograma. Cada sinograma original é corrompido usando ruído branco Gaussiano de média zero com diferentes potências de forma a variar a PSNR (razão sinal de ruído de pico). Ajusta-se o PSNR a partir do desvio padrão do ruído. Usamos um espaçamento de 4dB entre os níveis de ruído – o espaçamento foi estabelecido a partir da capacidade de identificação visual de diferenças entre os sinogramas originais e os corrompidos, eles são apresentados na Tabela I. Posteriormente, exemplificaremos o processo para obter as curvas de análise de qualidade do MSSIM para o quinto nível de corrupção.

TABELA I: Níveis de corrupção dos sinogramas.

Nível	Desv. pad.	PSNR (dB)	Nível	Desv. pad.	PSNR (dB)
1	0.0224	36	2	0.0352	32
3	0.056	28	4	0.089	24
5	0.16	20	6	0.22	16
7	0.355	12	8	0.62	8
9	1.0	4			

B. Avaliação da Qualidade das Reconstruções:

1) *SSIM*: O *Structural Similarity Index*, é uma métrica de avaliação da qualidade de imagens que emprega características estruturais e apresenta alta correlação com a percepção da qualidade subjetiva (por pessoas) [21].

Decompõem-se as imagens em luminância, contraste e estrutura. A diferença de luminância é avaliada por meio das médias (μ_I e $\mu_{\hat{I}}$) dos pixels das imagens comparadas (I e \hat{I}). Similarmente, a diferença de contraste é obtida comparando os desvios padrão das imagens (σ_I e $\sigma_{\hat{I}}$). Já a diferença estrutural é avaliada usando o produto interno entre as duas imagens. Assim, obtém-se [21]

$$\text{SSIM}(I, \hat{I}) = \frac{(2\mu_I\mu_{\hat{I}} + C_1)(2\sigma_{I\hat{I}} + C_2)}{(\mu_I^2 + \mu_{\hat{I}}^2 + C_1)(\sigma_I^2 + \sigma_{\hat{I}}^2 + C_2)}, \quad (3)$$

onde $\sigma_{I\hat{I}}$ é a covariância entre as imagens e $0 < C_1 \ll 1$ e $0 < C_2 \ll 1$ são constantes de regularização. É usual computar o SSIM médio (MSSIM – Mean SSIM) visando obter um indicador que concentre toda a informação de similaridade estrutural da comparação executada. O MSSIM foi escolhido por apresentar maior oscilação (diferenças) quando se comparam os algoritmos de reconstrução que as demais métricas (PSNR, médio erro quadrático, ou a média das diferenças absolutas).

2) *Índice de Qualidade Agregado*: As referências sobre métodos de reconstrução tomográfica apresentam três critérios para escolher o método: a qualidade das reconstruções, a velocidade de convergência e a estabilidade. Assim, propõe-se um índice que permita agregar esses três fatores graficamente para cada técnica de reconstrução. Definimos

$$D_{q,e} = \sum_{k=1}^K \text{MSSIM}_{q,e,k} = \sum_{k=1}^K \text{MSSIM}(I, \hat{I}_{q,e,k}), \quad (4)$$

na qual, $\hat{I}_{q,e,k}$ é a imagem reconstruída a partir do sinograma com nível e de corrupção (Tabela I) usando o algoritmo q com k iterações. Assim, $D_{q,e}$ agrega as qualidades das reconstruções ao longo das iterações e a velocidade de convergência. Em adição, se o algoritmo q é estável na qualidade, a sequência $D_{q,e}$, $e = 1 \dots E$ dever ser decrescente, i.e., se o ruído aumenta, a qualidade decresce (ou se mantém).

IV. RESULTADOS

A. Curvas de Qualidade (SSIM)

As curvas MSSIM para os dez níveis de corrupção, por 50 iterações de cada algoritmo, são usadas para gerar os índices de qualidade agregados, a Figura 5 ilustra a curva de MSSIM (seu logaritmo) para a corrupção nível 5 (Tabela I).

B. Índice de Qualidade Agregado

Os Índices de Qualidade Agregados para os três objetos-alvo podem ser observados na Figura 6.

C. Tempo de Processamento de uma iteração

A Figura 7 traz os tempos de execução da primeira iteração de cada um dos algoritmos testados.

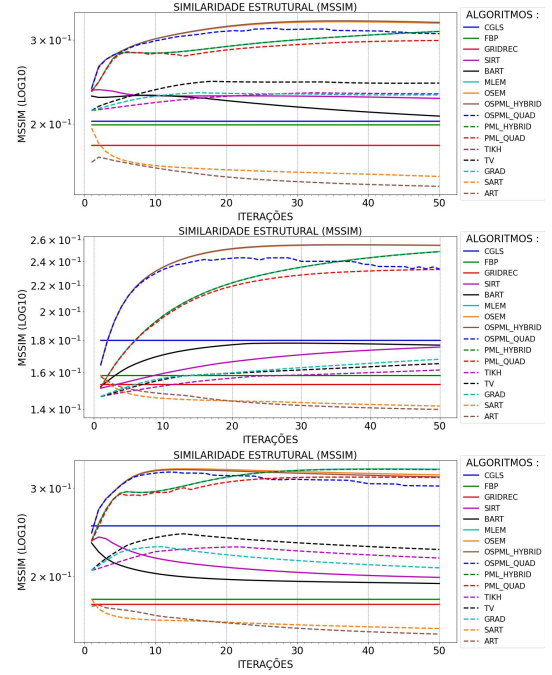


Fig. 5: MSSIM das reconstruções com corrupção de nível 5 dos sinogramas; do topo para baixo: temos os MSSIM das reconstruções para Engrenagem, Horus e Phantom.

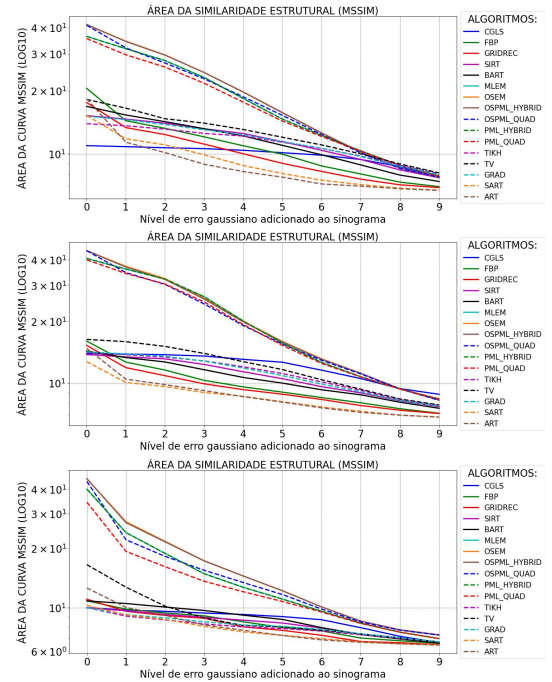


Fig. 6: Índices de Qualidade Agregados, de cima para baixo: Engrenagem, Phantom e Horus.

D. Análise

Os resultados na Figura 7 indicam que os algoritmos baseado em Fourier apresentaram o menor custo computacional, por larga vantagem. O GRIDREC requereu recursos computacionais duas ordens de grandeza menor que a média dos demais algoritmos. Entretanto, o MSSIM

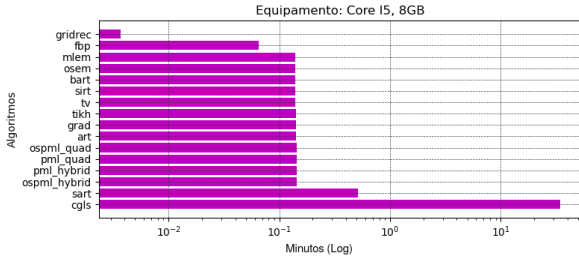


Fig. 7: Tempo de processamento da primeira iteração.

atingido pelo FBP e GRIDREC fica muito aquém do produzido por outros métodos, como podemos ver na Figura 5, para os três objetos-alvo considerados. Conforme os resultados na Figura 5, o SART e o ART apresentam índice de qualidade decrescente conforme as iterações aumentam, já as variantes de métodos algébricos SIRT e BART apresentam MSSIM decrescentes com as iterações para dois objetos-alvo, crescendo somente para o objeto Horus conforme as iterações aumentam. Ainda na Figura 5, vemos que os algoritmos OSEM, OSPML-Q e OSPML-H obtêm os melhores índices de qualidade para poucas iterações e são superados conforme a quantidade de iterações aumenta apenas no objeto Phantom, pelo algoritmo PML-H e MLEM. Vemos na figura 6 que o grupo de algoritmos baseado em MLEM apresentou perda de qualidade significativa em função do nível de corrupção, mesmo assim preservando larga vantagem frente os demais algoritmos. Essa vantagem foi observada em todos os níveis de corrupção no sinograma Horus e para $e < 7$ nos sinogramas Engrenagem e Phantom. OSEM e OSPML-H apresentaram os melhores resultados do grupo MLE. Observa-se, na Figura 7, que o OSPML-H possui custo computacional 5,0% menor que o OSEM. Assim, sugere-se que a abordagem probabilística no problema tomográfico apresenta potencial significativo em um conjunto amplo de aplicações com aquisições de uma única medida por ponto de projeção, especialmente TWM. Nos testes, observamos que o OSPML-Q apresentou instabilidade (no MSSIM) da reconstrução de Phantom em baixos níveis de corrupção, fato que pode decorrer da implementação empregada ou da concentração de informação significativa em múltiplos níveis de intensidade dos pixels, comum em aplicações na área de saúde; tais fatos sugerem cautela na utilização desse algoritmo. Os algoritmos das classes que empregam métodos de gradiente e de regularização apresentam MSSIM intermediários entre os algoritmos das classes MLEM e algébricos.

As curvas de índices agregados na Figura 6 indicam perda de qualidade com o aumento do ruído no sinograma. Vemos ainda que os métodos baseados em MLE além do melhor desempenho, são estáveis. A exceção reside na reconstrução do objeto-alvo Phantom usando o OSPLM-Q. Porém, para $e \geq 8$ (PSNR ≤ 8 dB) outros métodos tornam-se competitivos: o CGLS torna-se competitivo para a imagem Phantom e os métodos baseados em regularização tornam-se competitivos para Phantom e Engrenagem.

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, um método foi proposto e aplicado para avaliar algoritmos de reconstrução inversa para aplicações tomográficas em diferentes áreas. Dentre os 16 métodos avaliados, foi observado que aqueles baseados em estimativa de verossimilhança máxima (MLE) provêm o melhor

compromisso entre custo computacional e qualidade de reconstrução. O modelo probabilístico subjacente aos métodos MLE não leva em consideração as especificidades do processo de aquisição de cada área de aplicação considerada. Dessa forma, o uso de um paradigma probabilístico específico para cada aplicação pode ser uma oportunidade de aprimoramento.

REFERÊNCIAS

- [1] Anders H Andersen and Avinash C Kak. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm. *Ultrasonic imaging*, 6(1):81–94, 1984.
- [2] Richard C. Aster, Brian Borchers, and Clifford H. Thurber. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier, 2019.
- [3] Rafael Saraiva Campos, Lisandro Lovisollo, and Marcello Luiz R de Campos. Assessing multisensor radiofrequency-based through-the-wall mapping systemic parameters using a finite-element method framework. *Journal of Applied Remote Sensing*, 12(2):026025–026025, 2018.
- [4] Antonin Chambolle and Thomas Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of mathematical imaging and vision*, 40:120–145, 2011.
- [5] Ji-Ho Chang, John MM Anderson, and John R Votaw. Regularized image reconstruction algorithms for positron emission tomography. *IEEE transactions on medical imaging*, 23(9):1165–1175, 2004.
- [6] Arthur P Dempster, Nan M Laird, and Donald B Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the royal statistical society: series B (methodological)*, 39(1):1–22, 1977.
- [7] Betsy A Dowd, Graham H Campbell, Robert B Marr, Vivek V Nagarkar, Sameer V Tipnis, Lisa Axe, and D Peter Siddons. Developments in synchrotron x-ray computed microtomography at the national synchrotron light source. 3772:224–236, 1999.
- [8] Herman T. Gabor. *Fundamentals of Computerized Tomography: Image reconstruction from projections*. Springer, 2009.
- [9] Richard Gordon, Robert Bender, and Gabor T Herman. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of theoretical Biology*, 29(3):471–481, 1970.
- [10] Doga Gürsoy, Francesco De Carlo, Xianghui Xiao, and Chris Jacobsen. Tomopy: a framework for the analysis of synchrotron tomographic data. *Journal of synchrotron radiation*, 21(5):1188–1193, 2014.
- [11] Magnus R Hestenes, Eduard Stiefel, et al. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of research of the National Bureau of Standards*, 49(6):409–436, 1952.
- [12] H Malcolm Hudson and Richard S Larkin. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE transactions on medical imaging*, 13(4):601–609, 1994.
- [13] Avinash C. Kak and Malcolm Slaney. *Principles of computerized tomographic imaging*. IEEE Press, 1988.
- [14] Andreas Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Springer, 2021.
- [15] David G Luenberger, Yinyu Ye, et al. *Linear and nonlinear programming*, volume 2. Springer, 1984.
- [16] Frank Natterer. *The mathematics of Computerized Tomography*. SIAM, 2001.
- [17] J Radon. On the determination of functions from their integrals along certain manifolds. *Mathematisch-Physische Klasse*, 69:262–277, 1917.
- [18] Lawrence A Shepp and Benjamin F Logan. The fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on nuclear science*, 21(3):21–43, 1974.
- [19] Wim Van Aarle, Willem Jan Palenstijn, Jeroen Cant, Eline Janssens, Folkert Bleichrodt, Andrei Dabrovolski, Jan De Beehouwer, K Joost Batenburg, and Jan Sijbers. Fast and flexible x-ray tomography using the ASTRA toolbox. *Optics express*, 24(22):25129–25147, 2016.
- [20] Stefan Van der Walt, Johannes L Schönberger, Juan Nunez-Iglesias, François Boulogne, Joshua D Warner, Neil Yager, Emmanuelle Gouillart, and Tony Yu. scikit-image: image processing in python. *PeerJ*, 2:e453, 2014.
- [21] Zhou Wang, Alan C Bovik, Hamid R Sheikh, and Eero P Simoncelli. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE transactions on image processing*, 13(4):600–612, 2004.
- [22] Leslie Ying, Dan Xu, and Z-P Liang. On tikhonov regularization for image reconstruction in parallel MRI. 1:1056–1059, 2004.