

Sistema de Controle de Atitude de Satélites Utilizando Dispositivos de Troca de Momento Angular

Álvaro R. G. Oliveira, Cláriton R. Bernadelli

Resumo — Neste trabalho é realizado o controle não linear de atitude em um satélite *CubeSat 1U* a partir do uso de dispositivos de troca de momento angular. A metodologia considera dois eixos de rotação por atuador, sendo eles o principal e o gimbal. O sistema baseado em controle de velocidade obedece às condições de estabilidade de Lyapunov e seu comportamento é avaliado sob manobra e perturbações, obtendo respectivamente um tempo de acomodação de 0,38% do período orbital e uma variação máxima de 0,032% em relação aos quatérnios desejados sob a aplicação do torque máximo suportado antes da saturação dos atuadores.

Palavras-Chave — *CubeSat, Dispositivos de Troca de Momento Angular, Quatérnios, Satélites, Sistema de Controle de Atitude.*

Abstract — In this work, the attitude control system on a 1U *CubeSat* is performed using a non-linear system, developed from the use of momentum exchange devices. The methodology considers two axes of rotation per actuator, being them the main and gimbal axis. The system based on speed control obeys the Lyapunov stability conditions and its behavior is evaluated under maneuver and perturbations, obtaining an accommodation time of 0.38% of the orbital period and a maximum variation of 0.032% in relation to the desired quaternions under the application of the maximum supported torque before the saturation of the actuators.

Keywords — *Angular Momentum Exchange Devices, Attitude Control System, CubeSat, Quaternions, Satellites.*

I. INTRODUÇÃO

Sistema de controle de atitude (*ACS*) é um subsistema do satélite cuja função é determinar com precisão a orientação do conjunto em relação a um sistema de referência. O movimento de um objeto no espaço é definido por sua posição, velocidade, atitude e movimento de atitude. Posição e velocidade descrevem movimentos de translação do centro de massa do satélite, enquanto atitude e movimento de atitude representam movimentações rotacionais do centro de massa.

De modo geral, a análise de atitude pode ser dividida em determinação, predição e controle. Controle de atitude, o foco do trabalho, é o processo de orientar o satélite na direção especificada, podendo ter caráter de estabilização ou de manobra [1]. Existem diversos tipos de atuadores ativos de um satélite, sendo um deles os dispositivos de troca de momento angular, como rodas de reação ou giroscópios de controle de momento. O modelo principal adotado para estudo foram os giroscópios de controle de momento em velocidade variável (*VSCMG*), visto que o equacionamento da dinâmica de atitude pode ser facilmente adaptado para o uso em rodas de reação e em giroscópios de controle de momento (*CMG*), agregando generalidade ao trabalho.

O trabalho tem como objetivo geral o estudo e modelagem computacional de um *ACS* aplicado aos dispositivos *VSCMG* no contexto de utilização de parâmetros para um *Cubesat 1U*, visto

que atualmente a aplicação deste atuador é considerada limitada devido às suas restrições de dimensão, simulando e avaliando seu comportamento em situações de manobra de estabilização e perturbações externas.

II. METODOLOGIA

A metodologia será descrita conforme o sistema da Figura 1, elaborado em simulação computacional e idealizado para o controle de atitude a partir do movimento orbital pré-estabelecido, apresentando os vetores de atitude desejados de acordo com o sistema Vertical Local Horizontal Local (*LVLH*) com origem em seu centro de massa. A estabilização ativa será realizada através dos dispositivos *VSCMG*, com o satélite iniciando com uma velocidade angular diferente da desejada, simulando a manobra de estabilização. Os torques externos serão considerados em uma segunda etapa a fim de verificar seu comportamento sob influência de perturbações.

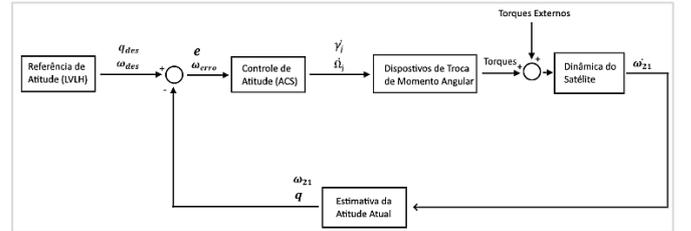


Fig. 1. Diagrama de blocos para o sistema de controle de atitude

A. Parâmetros Iniciais

Inicialmente, deve-se definir os parâmetros do satélite, de sua órbita e dos dispositivos de troca de momento angular. Para isto, supõe-se o uso de um satélite padrão *CubeSat* de dimensão 1U (10 x 10 x 10 cm) e massa 1,33kg. O tensor de inércia J_{sat} do satélite foi calculado considerando uma distribuição de massa homogênea.

Foram considerados os vetores posição \vec{r}_0 e velocidade \vec{v}_0 iniciais na base inercial centrada no centro de massa da Terra (*ECI*), representada pelo sistema \mathfrak{S}_{ECI} . O momento angular orbital \vec{h}_0 em (1) obedecerá a Segunda Lei de Kepler da conservação do momento angular, visto que não serão consideradas modificações orbitais. Ressalta-se que \vec{h}_0 é o momento angular por kg de um corpo em órbita.

$$\vec{h}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 \quad (1)$$

A órbita estabelecida apresenta uma excentricidade de 0,0473 e um período de 106 minutos. No momento de sua máxima aproximação o satélite atinge uma altitude aproximada de 707 km. A Figura 2 mostra uma ilustração da órbita.

A fim de estabelecer os valores iniciais para a atitude do satélite, define-se os ângulos de Euler (2) e quatérnios iniciais (3) no sistema centralizado no corpo do satélite $\mathfrak{S}_{sat_{fixo}}$.

$$EA_0 = [\phi, \theta, \psi] = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ] \quad (2)$$

Álvaro R. G. Oliveira, e-mail: alvaroribeiro_gomes@outlook.com;
Cláriton R. Bernadelli, e-mail: clariton.bernadelli@uftm.edu.br.
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba-MG

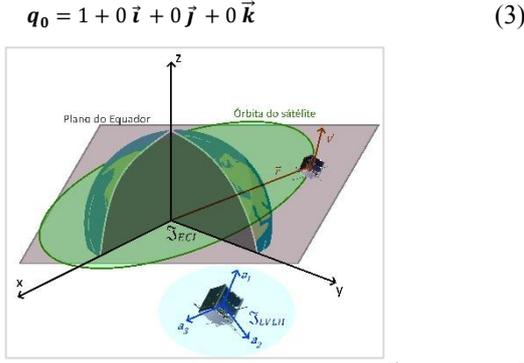


Fig. 2. Ilustração da órbita do satélite com os vetores posição \vec{r} e velocidade \vec{v} em um dado instante orbital.

Para a velocidade angular do satélite, o valor desejado será igual ao da órbita no tempo em questão, sincronizando os vetores de atitude do satélite conforme proposto pelo sistema *LVLH*. A fim de promover uma estabilização inicial por parte do *ACS*, será utilizado de forma arbitrária em (4) um valor inicial de 1000 vezes a velocidade angular orbital no instante inicial.

$$\vec{\omega}_0 = 10^3 \cdot \frac{\vec{r}_0 \times \vec{v}_0}{\|\vec{r}_0\|^2} = [-0,4634 \ 0 \ 0,9811] \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (4)$$

Tem-se os vetores de atitude iniciais desejados conforme propõe o sistema *LVLH*, representados na base \mathfrak{S}_{ECI} na Eq. (5).

$$\begin{aligned} \vec{a}_{3_0} &= -\frac{\vec{r}_0}{\|\vec{r}_0\|} = [-0,9042 \ 0 \ -0,4271] \\ \vec{a}_{2_0} &= -\frac{\vec{h}_0}{\|\vec{h}_0\|} = [0,4271 \ 0 \ -0,9042] \\ \vec{a}_{1_0} &= \vec{a}_{2_0} \times \vec{a}_{3_0} = [0 \ 1 \ 0] \end{aligned} \quad (5)$$

Considerando um vetor arbitrário \vec{r} na referência \mathfrak{S}_{ECI} , deseja-se obter em (6) uma matriz de rotação (*DCM*) que rotacione do sistema \mathfrak{S}_{ECI} para o sistema \mathfrak{S}_{LVLH} que tem como versores \vec{a}_1 , \vec{a}_2 e \vec{a}_3 .

$$\mathbf{C}_{LVLH-ECI} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{x}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{y}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{x}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{y}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{x}_1 & \vec{a}_3 \cdot \vec{y}_1 & \vec{a}_3 \cdot \vec{z}_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Utilizando em (6) os vetores \vec{a}_{1_0} , \vec{a}_{2_0} e \vec{a}_{3_0} calculados na Eq. (5) e tomando como eixos $\vec{x}_1 = [1 \ 0 \ 0]$, $\vec{y}_1 = [0 \ 1 \ 0]$ e $\vec{z}_1 = [0 \ 0 \ 1]$ do sistema \mathfrak{S}_{ECI} , tem-se (7) como matriz de rotação (*DCM*) no instante inicial e (8) como o quaternião inicial desejado.

$$\mathbf{C}_{LVLH-ECI_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,4271 & 0 & -0,9042 \\ 0,9042 & 0 & -0,4271 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{q}_{des_0} = [-0,3785 \ 0,5973 \ 0,5973 \ -0,3785] \quad (8)$$

São adotados três atuadores *VSCMG* no satélite, cada um apresentando seus próprios eixos, conforme a Figura 3. Define-se o posicionamento inicial dos *j*-ésimos elementos de troca de momento angular, expandidos nas Eq. (9-11).

$$\text{Para } j=1: \quad \hat{a}_{g1_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{a}_{s1_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{a}_{t1_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{Para } j=2: \quad \hat{a}_{g2_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{a}_{s2_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{a}_{t2_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\text{Para } j=3: \quad \hat{a}_{g3_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{a}_{s3_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{a}_{t3_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

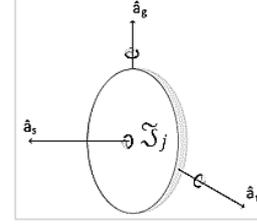


Fig. 3 Ilustração dos eixos de cada dispositivo de troca de momento angular nos sistemas \mathfrak{S}_j inerciais e centralizados no respectivo atuador.

O modelo de configuração (12) dos dispositivos *VSCMG* é proposto, com o eixo de rotação \hat{a}_g de cada atuador mantido constante [2].

$$\begin{cases} \hat{a}_{tj} = \cos \gamma_j \hat{a}_{tj_0} - \text{sen} \gamma_j \hat{a}_{sj_0} \\ \hat{a}_{sj} = \cos \gamma_j \hat{a}_{sj_0} + \text{sen} \gamma_j \hat{a}_{tj_0} \\ \hat{a}_{gj} = \hat{a}_{gj_0} \end{cases} \quad (12)$$

sendo γ_j o ângulo de rotação *gimbal* em torno de \hat{a}_{gj} .

Desta forma, tem-se em (13) a *DCM* que rotaciona do sistema \mathfrak{S}_j de cada dispositivo para o sistema $\mathfrak{S}_{sat_{fixo}}$.

$$\mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \hat{a}_{gj} & \vec{a}_1 \cdot \hat{a}_{sj} & \vec{a}_1 \cdot \hat{a}_{tj} \\ \vec{a}_2 \cdot \hat{a}_{gj} & \vec{a}_2 \cdot \hat{a}_{sj} & \vec{a}_2 \cdot \hat{a}_{tj} \\ \vec{a}_3 \cdot \hat{a}_{gj} & \vec{a}_3 \cdot \hat{a}_{sj} & \vec{a}_3 \cdot \hat{a}_{tj} \end{bmatrix} \quad (13)$$

No sistema de controle, define-se uma matriz \mathbf{K} de ganhos para o erro da velocidade angular do satélite, a qual será a diferença entre as velocidades angulares atual e desejada. Introduce-se o coeficiente de decaimento exponencial do ganho das rodas μ_r e os ganhos iniciais para as rotações em torno de \hat{a}_s e \hat{a}_g sendo respectivamente W_{s_0} e W_{g_0} .

Serão considerados inicialmente a velocidade angular Ω_{j_0} de rotação em torno do eixo principal \hat{a}_{sj} , os ângulos de rotação γ_{j_0} , o tensor de inércia dos atuadores \mathbf{Y}_j e o momento de inércia em torno do eixo de rotação principal I_s . A fim de simular o comportamento real dos atuadores, foram definidos alguns pontos de saturação, como a velocidade Ω_{max} e aceleração $\dot{\Omega}_{max}$ angulares máximas em torno do eixo de rotação principal, e a velocidade $\gamma_{j_{max}}$ e aceleração $\dot{\gamma}_{j_{max}}$ angulares máximas em torno do eixo de rotação *gimbal*. Os respectivos valores adotados estão dispostos na Tabela I, sendo similares aos encontrados nas principais bibliografias, manuais ou datasheets de dispositivos de dimensões compatíveis.

TABELA I. Parâmetros de Simulação

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE
\mathbf{J}_{sat}	$\begin{bmatrix} 0,002167 & 0 & 0 \\ 0 & 0,002167 & 0 \\ 0 & 0 & 0,002167 \end{bmatrix}$	kg. m ²
\vec{r}_0	[6400 0 3023]	km
\vec{v}_0	[0 7,6797 0]	km/s
\mathbf{Y}_j	$\begin{bmatrix} 0,00015 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0006 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0002 \end{bmatrix}$	kg. m ²
I_s	$5,7 \cdot 10^{-5}$	kg. m ²
Ω_{j_0}	500	rpm
γ_{j_0}	0	°
Ω_{max}	3800	rpm
$\dot{\gamma}_{j_{max}}$	16,7	rpm
$\dot{\Omega}_{max}$	12	rad/s ²
$\dot{\gamma}_{j_{max}}$	0,7	rad/s ²
\mathbf{K}	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	
W_{s_0}	100	
W_{g_0}	1	
μ_r	10^{-9}	

B. Atitude do Satélite

Para a estimativa computacional da atitude do satélite, em cada momento da execução, a aceleração angular ω_{21} gerada pela atuação dos dispositivos é integrada e transmitida para o cálculo em (14) da derivada do quatérnio atual \mathbf{q} . O sistema de referência utilizado será centralizado no corpo do satélite em $\mathfrak{S}_{satfixo}$, sendo a velocidade angular deste sistema medida em relação ao \mathfrak{S}_{ECI} [3].

$$\left[\begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{q}_0 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (q_0 \mathbf{I} + \mathbf{q}^{\times}) & \mathbf{q} \\ -\mathbf{q}^T & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\omega_{21}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

sendo o termo sobrescrito \times correspondente ao operador matriz de produto vetorial, cuja notação também é utilizada em [2][3][7].

C. Referência Orbital e Atitude Desejada

Nesta etapa, simula-se a órbita do satélite, gerando a atitude desejada com base em sua posição atual. Calcula-se em (15) o estado do satélite no sistema \mathfrak{S}_{ECI} .

$$\mathbf{estado}_{atual} = [\vec{r}_{atual} \quad \vec{v}_{atual}] \quad (15)$$

A cada iteração, o estado é atualizado, atribuindo a sua derivada como a velocidade atual e a aceleração gravitacional. Para a geração da atitude desejada com base no sistema $LVLH$, utiliza-se a Eq. (5) com os vetores de estado atualizados, ou seja, levando em conta \vec{r}_{atual} .

Utiliza-se (6) para o cálculo atualizado da matriz de rotação $\mathbf{C}_{LVLH-ECI}$. Esta matriz é convertida em seguida no quatérnio desejado \mathbf{q}_{des} . A velocidade angular desejada $\overline{\omega_{des}}$ é calculada em (16) no sistema \mathfrak{S}_{ECI} , visto que $\overline{\mathbf{a}}_2$ está expresso em ECI .

$$\overline{\omega_{des}} = \frac{\|\overline{\mathbf{a}}_0\|_{constante}}{\|\vec{r}_{atual}\|^2} \overline{\mathbf{a}}_2 \quad (16)$$

Assim, a fim de obter a velocidade angular desejada no sistema $\mathfrak{S}_{satfixo}$, aplica-se a matriz de rotação $\mathbf{C}_{satfixo-ECI}$. Tal matriz é obtida convertendo o quatérnio atual \mathbf{q} em uma matriz DCM . Tem-se então (17):

$$\overline{\omega_{des}}^{\mathfrak{S}_{satfixo}} = \mathbf{C}_{satfixo-ECI} \overline{\omega_{des}}^{\mathfrak{S}_{ECI}} \quad (17)$$

D. Dispositivos de Troca de Momento Angular e Equação Geral da Dinâmica de Atitude

Nesta etapa, determina-se a posição dos eixos de cada dispositivo $VSCMG$ e a aplica na equação geral da dinâmica de atitude a fim de calcular a aceleração angular $\overline{\omega_{21}}$ gerada no satélite. O sistema é realimentado pelas acelerações Ω_j e velocidades angulares γ_j dos atuadores providas do controle. Para cada valor de velocidade angular γ_j em torno de $\hat{\mathbf{a}}_{gj}$ dos dispositivos, uma integração é realizada a fim de obter a posição de seus eixos a partir de γ_{j0} . Para isto, atualiza-se os eixos utilizando (12). A partir dos vetores atualizados, obtém-se em (13) as matrizes de rotação \mathbf{C}_j , considerando $\overline{\mathbf{a}}_1 = [1 \ 0 \ 0]$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = [0 \ 1 \ 0]$ e $\overline{\mathbf{a}}_3 = [0 \ 0 \ 1]$ como versores referência no sistema $\mathfrak{S}_{satfixo}$.

Determinadas as matrizes \mathbf{C}_j as quais rotacionam do sistema de cada dispositivo de troca de momento angular para o sistema fixo ao satélite, calcula-se em (18) o tensor de inércia total \mathbf{J}_{total} do conjunto satélite e atuadores.

$$\mathbf{J}_{total} = \mathbf{J}_{sat} + \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T \quad (18)$$

Une-se em (19) as contribuições individuais de todos os elementos do conjunto no momento angular total \mathbf{h}_{CM} em torno do centro de massa do satélite, projetando os eixos dos dispositivos em $\mathfrak{S}_{satfixo}$, considerando ω_{21} como a velocidade angular do satélite no $\mathfrak{S}_{satfixo}$ em relação ao sistema \mathfrak{S}_{ECI} .

$$\mathbf{h}_{CM} = (\mathbf{J}_{sat} + \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T) \omega_{21} + \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_{gj} \dot{\gamma}_j \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \left(\sum_{j=1}^n I_{sj}^{roda} \Omega_j \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (19)$$

A derivada no tempo de (19) resulta no torque resultante \mathbf{T}_{CM} no centro de massa, aplicando o teorema do transporte, o qual permite o cálculo da taxa de variação de um vetor a partir de outro observador. Assim, (20) é obtida e denominada como a equação geral da dinâmica do satélite.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{h}_{CM}}{dt} + \omega_{21} \times \mathbf{h}_{CM} &= (\mathbf{J}_{sat} + \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T) \dot{\omega}_{21} + \\ & \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_{gj} \dot{\gamma}_j \mathbf{a}_{gj} \right) + \left(\sum_{j=1}^n I_{sj}^{roda} \dot{\Omega}_j \mathbf{a}_{sj} \right) + \\ & \left(\sum_{j=1}^n I_{sj}^{roda} \Omega_j \dot{\gamma}_j \mathbf{a}_{tj} \right) + \left[\sum_{j=1}^n \dot{\gamma}_j (\mathbf{Y}_{sj} - \mathbf{Y}_{tj}) (\mathbf{a}_{tj} \mathbf{a}_{sj}^T + \right. \\ & \left. \mathbf{a}_{sj} \mathbf{a}_{tj}^T) \omega_{21} \right] + \omega_{21} \times (\mathbf{J}_{sat} + \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T) \omega_{21} + \\ & \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_{gj} \dot{\gamma}_j \omega_{21} \times \mathbf{a}_{gj} \right) + \left(\sum_{j=1}^n I_{sj}^{roda} \Omega_j \omega_{21} \times \mathbf{a}_{sj} \right) = \mathbf{T}_{CM} \end{aligned} \quad (20)$$

E. Análise de Estabilidade

A fim de avaliar a estabilidade do sistema, utiliza-se o Teorema de Lyapunov nos dois estados das Eq. (21-22), sendo respectivamente o erro da velocidade angular ω_{erro} e o quatérnio do erro e .

$$\overline{\omega_{erro}} = \overline{\omega_{atual}} - \overline{\omega_{des}} = \overline{\omega_{21}} - \overline{\omega_{des}}^{\mathfrak{S}_{satfixo}} \quad (21)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_{erro} = -\mathbf{q}_{atual} * \mathbf{q}_{des} \quad (22)$$

sendo $*$ o conjugado do quatérnio.

Considera-se (23) como a candidata à função de Lyapunov. Destaca-se que a função representa a energia cinética rotacional do erro associada com o vetor de erro do quatérnio.

$$V(\omega_{erro}, e) = \frac{1}{2} \overline{\omega_{erro}}^T \mathbf{J}_{total} \overline{\omega_{erro}} + \vec{e}^T \vec{e} + (1 - e_0)^2 \quad (23)$$

sendo: e_0 – Parte escalar do quatérnio do erro

\vec{e} – Parte vetorial do quatérnio do erro

Sabe-se que (23) satisfaz as condições de candidata para estabilidade assintótica global, visto que é definida positiva em todo o espaço $V(\omega_{erro}, e) > 0$ para quaisquer valores de estados diferentes de zero, apresenta $V(\omega_{erro}, e) = 0$ para os estados $\omega_{erro} = e = 0$, é continuamente diferenciável em respeito aos seus estados e é radialmente ilimitada, visto que $V(\omega_{erro}, e) \rightarrow \infty$ quando a norma de seus estados tendem ao infinito.

A teoria da estabilidade indica que a derivada da função de Lyapunov no tempo deve ser menor que zero. Sugere-se em (24) a existência de uma derivada no tempo $\dot{V}(\omega_{erro})$ para a função candidata, sendo ela negativa semi-definida.

$$\dot{V} = -\overline{\omega_{erro}}^T \mathbf{K} \overline{\omega_{erro}} \quad (24)$$

sendo \mathbf{K} uma matriz positiva definida.

Desta forma, calcula-se em (26) a derivada no tempo da função candidata (23), utilizando a derivada do quatérnio do erro das Eq. (25) extraídas a partir da expressão matricial (14).

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_0 \mathbf{I} + \mathbf{e}^\times) \boldsymbol{\omega}_{21} \quad (25)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}_{21}$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}, \mathbf{e}) = \overline{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{J}_{\text{total}} \dot{\overline{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}} + \mathbf{J}_{\text{total}} \overline{\dot{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}} + \dot{\mathbf{e}} \right) \quad (26)$$

Igualando as expressões (26) e (24), obtém-se em (27) a condição de estabilidade.

$$-\mathbf{K} \overline{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}} = \frac{1}{2} \mathbf{J}_{\text{total}} \dot{\overline{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}} + \mathbf{J}_{\text{total}} \overline{\dot{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}} + \dot{\mathbf{e}} \quad (27)$$

Entretanto, para que seja provada a estabilidade assintótica global nos estados de equilíbrio, conforme o método direto de Lyapunov, $\dot{V}(\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}, \mathbf{e})$ deve ser globalmente negativa definida. A teoria de estabilidade desenvolvida por [4] será utilizada para concluir a estabilidade assintótica, conforme indica [5]. Tal teoria sugere que, para os pontos onde $\dot{V}(\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}, \mathbf{e}) = \mathbf{0}$, as suas derivadas sucessivas de ordem par e ímpar serão respectivamente zero e negativas definidas quando avaliadas nesses mesmos pontos.

Aplicando a solução $\overline{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}} = \mathbf{0}$ em (27), tem-se a condição (28) que garante que $\dot{V}(\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}, \mathbf{e}) = \mathbf{0}$.

$$\overline{\dot{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}} = -\mathbf{J}_{\text{total}}^{-1} \dot{\mathbf{e}} \quad (28)$$

Avalia-se então as derivadas sucessivas de (24).

$$\ddot{V}(\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}, \mathbf{e}) = -2 \overline{\dot{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}}^T \mathbf{K} \overline{\dot{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}} \quad (29)$$

$$\ddot{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}, \mathbf{e}) = -2 \overline{\dot{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}}^T \mathbf{K} \overline{\dot{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}} - 2 \overline{\dot{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}}^T \mathbf{K} \overline{\dot{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}} \quad (30)$$

Constata-se em (29) que a primeira derivada par de ordem maior resulta em zero quando $\overline{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}} = \mathbf{0}$. Aplicando em (30) a condição (28) de estabilidade quando $\overline{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}} = \mathbf{0}$, tem-se (31).

$$\ddot{\mathbf{V}}(\mathbf{0}, \mathbf{e}) = -2 \mathbf{e}^T (\mathbf{J}_{\text{total}}^{-1})^T \mathbf{K} (\mathbf{J}_{\text{total}}^{-1}) \mathbf{e} \quad (31)$$

Nota-se que a primeira derivada ímpar de ordem maior $\ddot{\mathbf{V}}(\mathbf{0}, \mathbf{e})$ é negativa definida em (31), sendo suficiente para a estabilidade assintótica conforme o teorema proposto em [4].

F. Controle de Atitude

Garantida a estabilidade do sistema, deseja-se utilizar a condição (28) na equação geral da dinâmica de atitude (20), considerando as Eq. (21-22) juntamente com (27). Após as manipulações, obtém-se a equação geral de estado (32).

$$\begin{aligned} & \mathbf{K} \overline{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}} - \mathbf{J}_{\text{total}} \overline{\dot{\boldsymbol{\omega}_{\text{erro}}}} + \dot{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\omega}_{21}^\times \mathbf{J}_{\text{total}} \boldsymbol{\omega}_{\text{atual}} - \\ & (\sum_{j=1}^n \mathbf{I}_{s_j} \text{roda} \Omega_j \boldsymbol{\omega}_{\text{atual}} \mathbf{a}_{s_j}) + \mathbf{T}_{CM} = \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (\mathbf{Y}_{s_j} - \right. \right. \\ & \left. \left. \mathbf{Y}_{t_j} \right) (\mathbf{a}_{t_j} \mathbf{a}_{s_j}^T + \mathbf{a}_{s_j} \mathbf{a}_{t_j}^T) \right] (\overline{\boldsymbol{\omega}_{\text{atual}}} + \overline{\boldsymbol{\omega}_{\text{des}}}) + \\ & (\sum_{j=1}^n \mathbf{I}_{s_j} \text{roda} \Omega_j \mathbf{a}_{t_j}) + (\sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_{g_j} \boldsymbol{\omega}_{\text{atual}} \mathbf{a}_{g_j}) \dot{\gamma}_j + \\ & (\sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_{g_j} \dot{\gamma}_j \mathbf{a}_{g_j}) + (\sum_{j=1}^n \mathbf{I}_{s_j} \text{roda} \dot{\Omega}_j \mathbf{a}_{s_j}) \end{aligned} \quad (32)$$

A fim de melhorar a visibilidade da equação geral de estado, propõe-se em (33) a disposição compacta dos termos [2] [6] [7].

$$\mathbf{B} \ddot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{M} \quad (33)$$

Considera-se o uso apenas de termos diferenciais de primeira ordem, visto que as contribuições de $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, são muito inferiores frente aos demais, além de causar, na prática, a amplificação de ruídos. Introduce-se em (34) o cálculo da solução para a equação geral de estado, a fim de obter o vetor de controle $\boldsymbol{\eta}$ com os n dispositivos.

$$\mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{M} \quad (34)$$

sendo: $\mathbf{Q} = [\mathbf{C} \ \mathbf{D}]$,

$$\boldsymbol{\eta} = [\dot{\Omega}_1 \ \dots \ \dot{\Omega}_n \ \dot{\gamma}_1 \ \dots \ \dot{\gamma}_n]^T$$

A solução será obtida através de um problema de otimização com restrição em um sistema de controle com a filosofia baseada em velocidade angular. Define-se então em (35) a matriz diagonal \mathbf{W} de ganhos para os atuadores.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{s_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_{s_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_{g_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{g_n} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Assim, preenche-se a matriz \mathbf{W} com os termos W_{s_j} conforme (36), considerando W_{g_0} e μ_r constantes.

$$W_{s_j} = W_{s_0} e^{-\mu_r \delta} \quad (36)$$

sendo: $\delta = \det[\mathbf{C} \ \mathbf{C}^t]$

O parâmetro δ tem um significado importante para os dispositivos *CMG*, indicando o nível de singularidade.

Assim, define-se a função $h(\boldsymbol{\eta})$ a ser minimizada:

$$h(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta} \quad (37)$$

sendo as restrições: $\begin{cases} \min[h(\boldsymbol{\eta})] \\ \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{M} \end{cases}$

Para tal minimização, deve-se introduzir os multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$, culminando em (38).

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{M}) \quad (38)$$

Resolve-se as derivadas parciais $\frac{dh}{d\boldsymbol{\eta}} = 0$ e $\frac{dh}{d\boldsymbol{\lambda}} = 0$ substituindo os multiplicadores de Lagrange, obtendo a solução final (39).

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{W} \mathbf{Q}^T (\mathbf{Q} \mathbf{W} \mathbf{Q}^T)^{-1} \mathbf{M} \quad (39)$$

III. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A. Resposta do Sistema sob Manobra

Os valores de inicialização foram aplicados no modelo computacional conforme a metodologia, com uma velocidade angular inicial do corpo do satélite em 1000 vezes a desejada, simulando o momento em que o satélite é lançado pelo dispensador. O tempo de acomodação obtido foi de aproximadamente 24,36 s, representando o momento cujas oscilações dos valores de quatérnios obtidos não ultrapassam 2% em relação aos quatérnios desejados, conforme a Figura 4. Tal tempo de acomodação corresponde à 0,38% do período orbital.

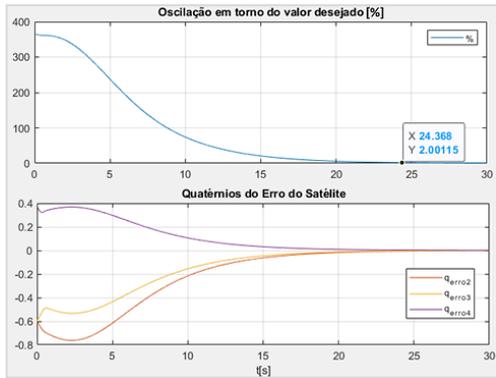


Fig. 4 Oscilação em torno do quaternião desejado e avaliação do tempo de acomodação da manobra de estabilização.

Foi possível perceber na Figura 5 a obtenção da máxima atuação dos dispositivos de troca de momento angular no segundo inicial, conforme os pontos de saturação estipulados. Além disso, constata-se na Figura 6 que a atitude se manteve controlada durante o período de simulação de duas órbitas.

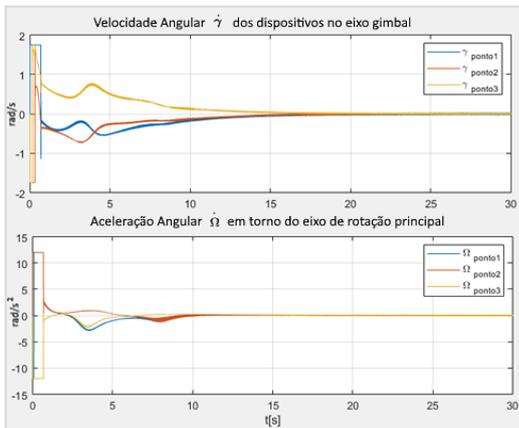


Fig. 5 Resposta dos dispositivos de troca de momento angular VSCMG.

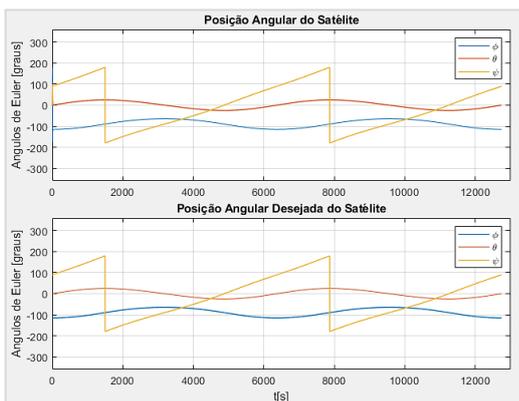


Fig. 6 Comparação entre os ângulos de Euler (sequência 3-2-1) dos quaterniões obtidos e desejados durante o período de duas órbitas completas.

B. Resposta do Sistema sob Perturbação

Nesta etapa foram aplicados torques externos no centro de massa do sistema realimentado, sem especificar sua natureza, a fim de avaliar a resposta da atitude. Tal perturbação foi acionada no tempo de simulação de 100 segundos, após a estabilização. O torque externo teve o formato degrau de $\|T_{CM}\| = 1,66 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$ com as três componentes vetoriais de mesmo valor. Para este caso, notou-se que o comportamento do sistema se manteve praticamente inalterado com um pico de variação de 0,032% em relação aos quaterniões desejados, conforme a Figura 7.



Fig. 7 Oscilação em torno do quaternião desejado.

Logicamente, foi possível constatar um aumento nas atuações dos dispositivos de troca de momento angular durante a inserção de torques externos com fins compensatórios. Torques maiores que $1,66 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$ levaram o sistema à instabilidade, visto que os dispositivos saturam e não são capazes de fornecer ao sistema os torques demandados.

IV. CONCLUSÕES

O sistema de controle de atitude proposto utilizando os dispositivos VSCMG apresentou resultados otimistas na estabilização do sistema, porém sua viabilidade deve ser estudada em termos de design e construção, visto que são atuadores complexos e normalmente grandes em relação às dimensões exigidas para um CubeSat.

Em contrapartida, estudos recentes procuram viabilizar este tipo de dispositivo em escala reduzida, podendo prover novas possibilidades para o controle de atitude e ao sistema de gerenciamento energético do satélite. A metodologia utilizada para projetar a simulação computacional seguida da análise dos resultados obtidos satisfaz os objetivos propostos, visto que foi possível realizar o controle de atitude diante de manobras de estabilização e de perturbações externas.

Finalmente, sugere-se como perspectivas futuras comparar os resultados obtidos com métodos de controle baseados em outras filosofias, como a utilização de controle de torque ou de aceleração, ou ainda confrontá-los com métodos lineares, como por exemplo o PID, ou com a utilização de rodas de reação. Propõe-se modelar a inserção de torques externos baseados em gradiente gravitacional, radiação solar, aerodinâmica ou magnetismo.

REFERÊNCIAS

- [1] WERTZ, James R. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. D. Reidel Publishing Company, v. 73, 1978.
- [2] BEVILACQUA, Riccardo. *Controllo non lineare dell'Assetto di Piattaforme Satellitari equipaggiate con V.S.C.M.G. (Variable Speed Control Moment Gyroscopes)*. Orientador: Chiara Valente. 179 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeroespacial) - Universidade de Roma, Roma, 2002.
- [3] RUITER, Anton J.J. *Spacecraft Dynamics and Control: An Introduction*. WILEY, 2013. 589 p. ISBN 978-1-118-34236-7.
- [4] MUKHERJEE, Ranjan; JUNKINS, John L. *Invariant Set Analysis of the Hub-Appendage Problem*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 16, pp. 1191-1193, 1993.
- [5] DANDO, Aaron J. *Robust adaptive control of rigid spacecraft attitude maneuvers*. 282 p. Queensland University of Technology, 2008.
- [6] SCHAUB, Hanspeter; VADALI, Srinivas R.; JUNKINS, John L. *Feedback Control Law for Variable Speed Control Moment Gyros*. The Journal of the Astronautical Sciences, v. 46, ed. 3, p. 307-328, 1998.
- [7] YOON, Hyungjoo; TSIOTRAS, Panagiotis. *Spacecraft Adaptive Attitude Control and Power Tracking with Single-Gimbal VSCMG and Wheel Speed Equalization*. Journal of Guidance Control and Dynamics, v. 25. p. 1081-1090, 2002.