

Análise de Compactação de Energia na Representação de Imagens por Decomposição em Sub-bandas

Rubem T. Bergamo¹, Felipe A. O. de Souza², Max H. M. Costa², João B. T. Yabu-Uti².

¹Escola Técnica Federal de Santa Catarina - UNED - SJ

Rua José Lino Kretzer, 608 - CEP 88103-902 - São José -SC

²Departamento de Comunicações - FEEC - UNICAMP

Caixa Postal 6101 - CEP 13083-970 - Campinas

rubem@etfsc-sj.rct-sc.br, faos@decom.fee.unicamp.br, max@decom.fee.unicamp.br,

yabuuti@decom.fee.unicamp.br.

RESUMO

Este trabalho avalia sistemas baseados em transformadas de multiresolução ou decomposição em sub-bandas na aplicação em codificação de sinais e imagens. Uma importante propriedade que estas formas de representação exibem é a compactação de energia no domínio dos coeficientes resultantes da transformada. Este artigo investiga esta propriedade através de uma medida empírica definida como ganho de compactação (GC). Em muitos casos esta medida é igual ao ganho de codificação em sub-bandas em relação à codificação PCM. A medida proposta apresenta a vantagem de poder ser calculada exclusivamente a partir das variâncias das sub-bandas geradas. Segundo esta medida, a eficiência de compactação de energia de diversos bancos de filtros lineares e não lineares é estudada para várias imagens de teste. Ademais, estimam-se as complexidades computacionais dos bancos de filtros.

1. INTRODUÇÃO

Análise de multiresolução ou decomposição em sub-bandas implementada através de bancos de filtros constitui uma poderosa ferramenta na codificação de sinais [1]. A idéia consiste em representar um sinal discreto através de uma série de sub-sinais, constituídos por um sinal de aproximação e uma série de sinais de detalhamento. Estes sinais possuem conteúdos em frequência aproximadamente disjuntos e por isso são chamados sinais de sub-bandas ou simplesmente sub-bandas do sinal original. Geram-se estes sinais através da passagem do sinal original por um banco ou árvore de filtros. Codificação eficiente é conseguida alocando-se resolução na representação ou quantização destas sub-bandas de acordo com parâmetros de importância exibidos por cada uma delas. Na ausência de quantização, uma condição desejável ao banco de filtros é que a síntese do sinal a partir das sub-bandas produza reconstrução perfeita. Com isso, a realização de uma quantização criteriosa sobre os coeficientes da decomposição provê mínima ou nenhuma distorção perceptível no sinal reconstruído.

Este trabalho define uma medida de mérito de decomposição com a qual analisa-se a eficiência da representação em sub-bandas de sinais bidimensionais ou imagens em termos de relações entre as variâncias (energias) dos coeficientes utilizados na representação e da imagem original. São estudados os casos

de bancos lineares e não lineares [2]. O artigo se divide da seguinte forma: a Seção 2 revê alguns conceitos relativos à decomposição em sub-bandas através de bancos de filtros lineares baseados na teoria de filtros QMF. A extensão para o caso bidimensional também é discutida. A Seção 3 discute a realização da decomposição em sub-bandas através de bancos de filtros não lineares, denominados filtros medianos. A Seção 4 discute a importância das estatísticas de cada sub-banda em relação à operação de quantização e define uma medida de compactação de energia relacionada à decomposição. Na Seção 5 exibem-se gráficos e tabelas comparativas baseados nesta medida para as diversas decomposições realizadas. A Seção 6 conclui o trabalho com uma discussão dos resultados.

2. DECOMPOSIÇÃO LINEAR EM SUB-BANDAS

A decomposição e síntese linear para o caso unidimensional se realizam, na sua forma mais simples, como no diagrama da Fig 1.

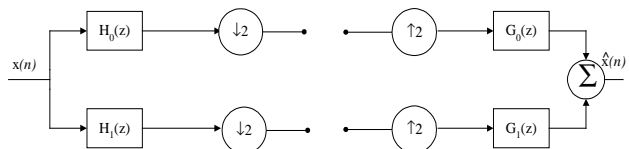


Figura 1. Estrutura de Banco de Filtros Lineares

A relação entre a entrada e a saída no domínio da transformada Z é dada por [1]

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} [X(z)T(z) + X(-z)A(z)], \quad (1)$$

onde

$$T(z) = H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) \quad (2)$$

e

$$A(z) = H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z). \quad (3)$$

Para haver reconstrução perfeita o primeiro termo de (1) deve ser exatamente igual a $X(z)$, a menos de um atraso puro na forma

$T(z) = z^{-D}$, onde D é este atraso. O segundo termo de (1) deve desaparecer para que o *aliasing* seja cancelado, ou seja $A(z)=0$. Para que isto ocorra os filtros de síntese devem satisfazer às seguintes relações [1]:

$$G_0(z) = H_1(-z) \quad ; \quad G_1(z) = -H_0(-z) \quad (4)$$

Sob estas condições a função transferência do filtro será

$$T(z) = F(z) - F(-z) \quad (5)$$

onde $F(z)$ é um produto dado por

$$F(z) = H_0(z)H_1(-z) \quad (6)$$

Caso certas restrições sejam satisfeitas [1] pelos filtros H_0 e H_1 , consegue-se

$$T(z) = z^{-D} \quad (7)$$

que leva a reconstrução perfeita.

O caso bidimensional é uma extensão direta do caso unidimensional. Cada estágio de decomposição bidimensional consiste em uma decomposição unidimensional, primeiramente nas linhas, e então nas colunas, conforme mostra a Fig. 2

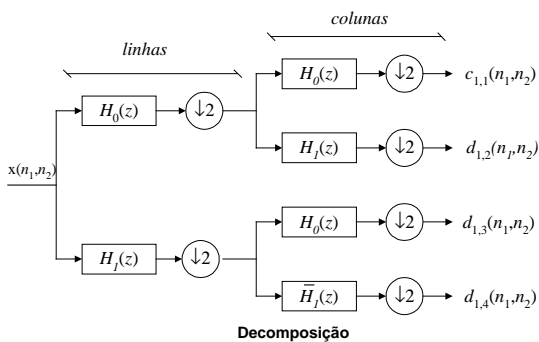


Figura 2. Decomposição bidimensional (primeiro estágio).

Múltiplos estágios desta decomposição geram sub-bandas com diferentes níveis de resolução. A quantidade de sub-bandas geradas é $3N+1$, onde N é o número de estágios. A decomposição segue sobre a aproximação gerada em baixas frequências, conforme mostrado na Fig. 3.

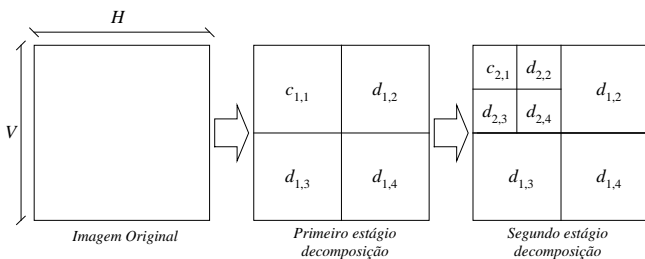


Figura 3. Decomposição linear para dois estágios

Cada estágio de reconstrução consiste primeiramente numa reconstrução unidimensional nas colunas, e em seguida, nas linhas, como mostrado na Fig. 4.

Consegue-se uma representação eficiente principalmente pela quantização apropriada das $3N$ sub-bandas de altas frequências (ou detalhamento), $d_{i,j}$, $1 \leq i \leq N$, $2 \leq j \leq 4$, visto que estas sub-bandas retêm a maior parte dos coeficientes da decomposição. Os coeficientes presentes nestas sub-bandas tendem a se distribuir em torno de zero seguindo uma distribuição gaussiana generalizada [3].

Os filtros lineares utilizados neste trabalho foram retirados de [4], onde o desempenho de diversos pares H_0 e H_1 relacionados à eficiência na compressão de imagens é analisado. Utilizaram-se os filtros 1 e 4 do referido trabalho denominados aqui QMF(9/7) e QMF(5/3).

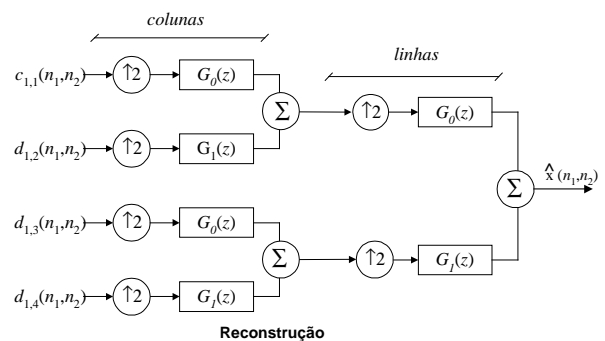


Figura 4. Último estágio da síntese bidimensional, correspondente ao primeiro estágio de decomposição.

3. DECOMPOSIÇÃO NÃO LINEAR EM SUB-BANDAS

A decomposição em sub-bandas gerando reconstrução perfeita pode, também, ser generalizada para bancos de filtros não lineares. A apresentação abaixo segue de perto o desenvolvimento em [2], onde uma decomposição em sub-bandas usando filtros morfológicos é proposta. Para se ter uma ferramenta que permita uma generalização de um banco linear para um não linear, utiliza-se o conceito de filtro *half-band*. A definição é a seguinte:

Definição 1: Um filtro linear é chamado *half-band*, se todas as amostras ímpares da resposta impulsiva $f(k)$ são zero, exceto a amostra $f(\delta)$, onde δ é uma constante, isto é,

$$f(2k+1) = \begin{cases} 1/2 & 2k+1 = \delta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{L-1}{2}$ e L é o comprimento do filtro $f(k)$.

Suponhamos agora que um sinal $x(n)$ é dizimado e interpolado por um fator de 2, para se obter $y(n)$, que é então filtrado por um filtro *half-band* com resposta impulsiva $f(n)$, tendo como saída $u(n)$, como mostra a Fig. 5.

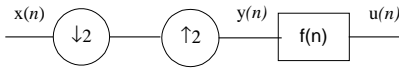


Figura 5. Um sinal é dizimado e sub-amostrado por um fator de 2, e depois filtrado por um filtro *half-band*.

Nesta figura, denota-se por $u(n)$ a convolução de $y(n)$ com $f(n)$:

$$u(n) = y(n) * f(n) \quad (9)$$

Então, toda amostra alternada de $u(n)$ é dada por

$$u(2n) = \frac{1}{2} x(2n - \delta) \quad (10)$$

isto é, a entrada é apenas atrasada de δ e atenuada por um fator 1/2 para estas amostras [2].

Note que (10) implica em (8). Desta forma pode-se generalizar o conceito de um filtro *half-band* para o caso não linear.

Definição 2: Um filtro não linear é chamado de filtro *half-band* se toda a amostra alternada do sinal $y(k)$ é igual a amostra correspondente do sinal original, a menos de uma constante multiplicativa.

Seja $Fy(k)$ a saída de um filtro não linear *half-band*. Assim

$$Fy(k) = c \cdot x(2k - \delta), \quad (11)$$

onde c é uma constante arbitrária.

Reconstrução perfeita é obtida com a estrutura de bancos de filtros da Fig. 1 se a convolução de $h_0(k)$ e $g_0(k)$ for um filtro *half-band* e os filtros respeitarem as condições expressas em (4). Agora suponhamos que $H_0(z) = 1$. Logo reconstrução perfeita é atingida se $G_1(z) = -1$, $G_0(-z)$ é um filtro *half-band* e $H_1(z) = G_0(-z)$. Este banco de filtros é mostrado na Fig.6.

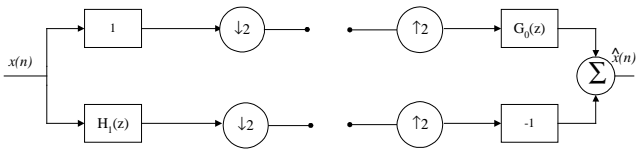


Figura 6. Estrutura de banco de filtros com reconstrução perfeita onde $G_0(z)$ é um filtro *half-band* e $H_1(z) = G_0(-z)$.

Considere-se a substituição do filtro $G_0(z)$ por um filtro generalizado *half-band* denotado por $F(\bullet)$. Não se pode descrever este filtro por sua transformada- z , visto que se trata de um filtro não linear. No entanto as condições (4) estabelecem que $H_1(z) = G_0(-z)$ para reconstrução perfeita. Deseja-se achar um filtro passa-alta de análise correspondente para o caso não linear. Este filtro pode ser obtido da seguinte forma [2]: Negando-se a variável z tem-se o seguinte efeito na resposta impulsiva.

$$Z^{-1}\{G(-z)\} = (-1)^k g(k). \quad (12)$$

Como toda amostra ímpar é zero, negando-se a variável z somente produzirá efeito na amostra central. Sendo assim, para um filtro de fase-zero tem-se

$$G(-z) = 1 - G(z). \quad (13)$$

Esta situação pode ser generalizada para o caso não linear. Denotando por $A(\bullet)$ o filtro não linear de análise, passa-alta, tem-se

$$A = I - F, \quad (14)$$

onde I é o operador identidade. Seguindo a mesma estrutura tem-se um banco de filtros não lineares que provê reconstrução perfeita como mostrado na Fig.7.

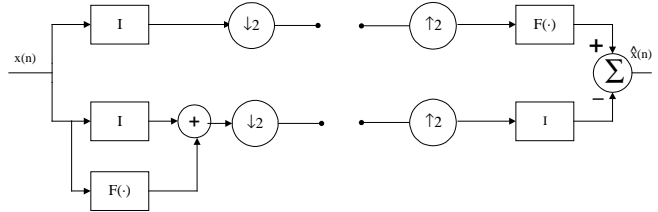


Figura 7. Banco de filtros não lineares com reconstrução perfeita.

Em [2] mostra-se que a decomposição não linear com reconstrução perfeita, pode ser realizada por bancos de filtros morfológicos. Os filtros estudados foram o filtro de dilatação, o filtro de fechamento (*closing*) e filtro de mediana. Segundo o estudo, os filtros de mediana obtiveram desempenho superior aos outros dois. Assim, este foi o filtro utilizado para a decomposição não linear neste trabalho. Utilizaram-se três filtros de mediana com regiões de suporte diferentes, mostrados na Fig. 8.

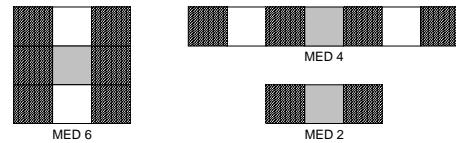


Figura 8. As amostras em preto são as entradas utilizadas pelo filtro, as amostras em branco são anuladas e a amostra em cinza é a amostra a ser reconstruída.

Dos três filtros apresentados o filtro MED 2 tem uma particularidade especial. Como a mediana de duas amostras é a média, isto faz com que este filtro seja linear.

A decomposição não linear é estendida ao caso bidimensional da mesma maneira que no caso linear, conforme o diagrama da Fig. 2.

4. ESTIMATIVA DE COMPACTAÇÃO DE ENERGIA

O objetivo principal deste trabalho é analisar a capacidade de compactação de energia obtida pela decomposição em sub-bandas através de uma medida da distribuição das variâncias correspondentes às várias sub-bandas geradas. A motivação deste estudo é encontrada em [5] e se deve ao fato de que o erro de quantização para cada sub-banda é proporcional à sua variância, isto é,

$$\sigma_{q,i,j}^2 = \epsilon^2 2^{-2R(i,j)} \sigma_{i,j}^2, \quad (15)$$

onde $\sigma_{q,i,j}^2$ é a variância do erro de quantização para a sub-banda $d_{i,j}$ (ou $c_{i,j}$), isto é, a sub-banda na posição j ($j \in \{1,2,3,4\}$) e profundidade i ($i \in \{1, \dots, N\}$), $\sigma_{i,j}^2$ é a variância da mesma sub-banda, $R(i,j)$ é o número de bits por amostra alocados para a quantização desta sub-banda e ε é a constante de desempenho do quantizador.

Para estimar esta capacidade de compactação, utiliza-se, neste trabalho, uma medida empírica. Esta medida, denominada de Ganho de Compactação para o N -ésimo estágio de decomposição (GC_N), é definida pela razão entre a média aritmética ponderada e a média geométrica ponderada das variâncias normalizadas das sub-bandas geradas, ou seja,

$$GC_N = \frac{MA(\sigma_{i,j}^2 B_{i,j}' / \alpha_{i,j})}{MG(\sigma_{i,j}^2 B_{i,j}' / \alpha_{i,j})}, \quad (16)$$

onde $\sigma_{i,j}^2$ denota a variância da sub-banda i,j , $B_{i,j}'$ é o fator de normalização dessas variâncias e $\alpha_{i,j}$ é o fator de sub-amostragem, que relaciona o número de coeficientes da banda i,j e o número total de coeficientes. Observa-se que $\alpha_{i,j}=1/4^i$, $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, 4$. (O índice j varia de 2 a 4 para valores de i entre 1 e $N-1$. Quando $i=N$, j assume valores de 1 a 4.) Os fatores $\alpha_{i,j}$ caracterizam uma distribuição de probabilidade, pois são não-negativos e têm soma igual a um. É em relação a esta distribuição que as médias aritmética (MA) e geométrica (MG) de (16) são calculadas. Portanto, estas médias podem ser expressas por

$$MA(\sigma_{i,j}^2 B_{i,j}' / \alpha_{i,j}) = \sum_{i,j} \sigma_{i,j}^2 B_{i,j}' \quad (17)$$

e

$$MG(\sigma_{i,j}^2 B_{i,j}' / \alpha_{i,j}) = \prod_{i,j} (\sigma_{i,j}^2 B_{i,j}' / \alpha_{i,j})^{\alpha_{i,j}} \quad (18)$$

Os fatores de normalização $B_{i,j}'$ são usados para ajustar as variâncias das sub-bandas de modo que a média aritmética expressa em (17) seja idêntica a σ_x^2 , a variância da imagem original. Por exemplo, para as sub-bandas produzidas no primeiro estágio, normalizam-se as variâncias $\sigma_{1,1}^2$, $\sigma_{1,2}^2$, $\sigma_{1,3}^2$ e $\sigma_{1,4}^2$ com $B_{i,j}' = \sigma_x^2 / (\sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,2}^2 + \sigma_{1,3}^2 + \sigma_{1,4}^2)$, $i=1, j=1, \dots, 4$, isto é, a razão entre a variância original e soma das variâncias das sub-bandas geradas. No segundo estágio, as variâncias correspondentes às sub-bandas de baixas frequências, $\sigma_{2,1}^2$, $\sigma_{2,2}^2$, $\sigma_{2,3}^2$ e $\sigma_{2,4}^2$, produzidas por duas etapas de filtragem, são normalizadas com $B_{i,j}' = B_{1,1}' \sigma_{1,1}^2 / (\sigma_{2,1}^2 + \sigma_{2,2}^2 + \sigma_{2,3}^2 + \sigma_{2,4}^2)$, $i=2, j=1, \dots, 4$, isto é, o produto do fator de normalização da sub-banda de baixas frequências (do primeiro estágio) pela razão entre a variância da sub-banda de baixas frequências (do primeiro estágio) e a soma das variâncias das sub-bandas descendentes. Este processo é repetido para cada estágio da decomposição, gerando uma seqüência normalizada de variâncias para todas as sub-bandas, de modo análogo às variâncias dos coeficientes de uma transformada unitária. Observa-se que o critério de escolha dos fatores de normalização descrito acima faz com que o

numerador de (16) seja, em todos os estágios, idêntico à variância da imagem original.

Esta medida de compactação é igual ao ganho de codificação de sub-banda, G_{SBC} , proposto por Katto e Yasuda [8], quando os fatores de normalização $B_{i,j}'$ introduzidos acima são idênticos aos coeficientes $B_{i,j}$ de [8], que relacionam as variâncias dos erros de quantização $\sigma_{q,i,j}^2$ dos coeficientes das sub-bandas i,j e a variância do erro de reconstrução da imagem, σ_r^2 , através da expressão

$$\sigma_r^2 = \sum_{i,j} \sigma_{i,j}^2 B_{i,j} \quad (19)$$

Estas condições são satisfeitas por bancos de filtros ortogonais com erros de quantização descorrelatados. Conjectura-se que estas condições sejam também satisfeitas em muitos casos de bancos de filtros não ortogonais. Esta relação entre a medida empírica expressa por (16) e a medida de Katto e Yasuda é importante pois pode-se mostrar que a medida de Katto e Yasuda corresponde ao ganho de codificação em sub-bandas em relação à codificação PCM quando os coeficientes das sub-bandas são submetidos à quantização fina com alocação de bits ótima [8].

A vantagem da utilização de (16) em relação à expressão de Katto e Yasuda deve-se a que esta última depende dos coeficientes dos filtros de síntese, e, portanto, não se aplica facilmente a bancos de filtros não lineares. Por outro lado, a expressão (16) depende exclusivamente das variâncias das sub-bandas geradas pela decomposição.

5. RESULTADOS E COMPARAÇÕES

Foram utilizadas 4 imagens de teste: *Lena*, *Salesman*, *Trees* e *Goldhill*, ilustradas na Fig. 9. As comparações foram feitas com cinco conjunto de filtros: QMF(9/7) e QMF(5/3) citados na Seção 2, e MED 2, MED 4 e MED 6, descritos na Seção 3. O número máximo de estágios foi feito igual a quatro, pois, a partir do quarto estágio, não se têm ganhos significativos de compactação de energia. Os filtros QMF's foram testados em duas situações. A primeira utilizando a convolução circular [6] e, em seguida, com o método da extensão simétrica [7]. O método da extensão simétrica tem um ligeiro ganho em relação a convolução circular, porém no caso da imagem *Trees* não se verificou aumento significativo. Esta imagem possui uma grande quantidade de bordas (componentes de altas frequências), e portanto, apresenta ganhos de compactação mais reduzidos.

Estão apresentados, nas Tabelas I, II, III e IV, os ganhos de compactação de cada imagem testada com os respectivos gráficos de ganho de compactação em função do número de estágios da decomposição.

Outra aspecto analisado foi a complexidade computacional das decomposições e reconstruções mostrados na Tabela V. O filtro MED 2 obteve um melhor desempenho de compactação em relação aos dois outros filtros medianos. Por isso, a análise de complexidade computacional é feita comparando-se o número de adições e multiplicações realizadas pelo filtro MED 2 em relação aos números referentes aos filtros QMF. Observa-se que os números de adições e multiplicações do MED 2 são significativamente menores.



(a)

(b)



(c)

(d)

Figura 9. Imagens originais. (a) "Lena" (512 x 512), (b) "Salesman" (288 x 352), (c) "Trees" (480 x 512), (d) "Goldhill" (512 x 512).

TABELA I

Ganho de compactação de cada filtro - Imagem: Lena

Filtro / Estágio	1	2	3	4
QMF(5/3)CIR	7.1156	9.0900	9.3650	9.4044
QMF(5/3)EXT SIM	7.5597	9.7102	10.004	10.0523
QMF(9/7)CIR	6.2149	8.2846	8.6876	8.7498
QMF(9/7)EXT SIM	6.7299	9.0546	9.4953	9.5714
MED 2	7.3173	9.4003	9.6682	9.6907
MED 4	4.4292	5.4133	5.5479	5.5693
MED 6	4.9973	6.2471	6.4223	6.4359

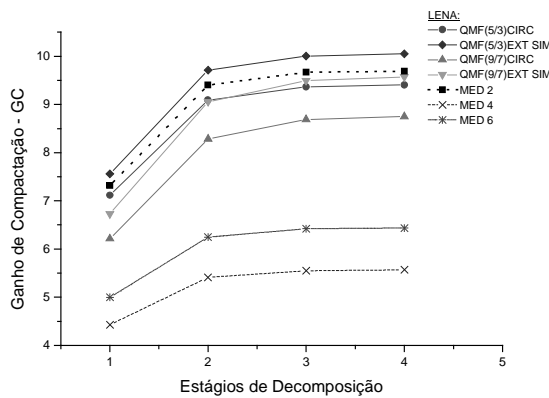


Figura 10. Gráfico de GC x Estágios de Decomposição para imagem *Lena*.

TABELA II

Ganho de compactação de cada filtro - Imagem: Salesman

Filtro / Estágio	1	2	3	4
QMF(5/3)CIR	3.8835	4.4507	4.5131	4.5200
QMF(5/3)EXT SIM	4.1311	4.7409	4.8085	4.8176
QMF(9/7)CIR	3.2075	3.7056	3.7950	3.8102
QMF(9/7)EXT SIM	3.4005	3.9505	4.0493	4.0645
MED 2	3.9001	4.4805	4.5509	4.5603
MED 4	2.6032	2.8953	2.9321	2.9345
MED 6	2.0819	2.2495	2.2761	2.2779

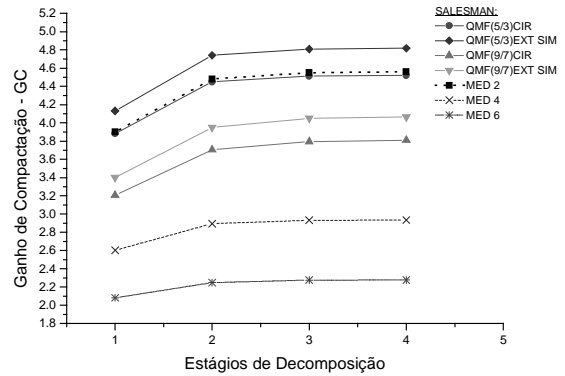


Figura 11. Gráfico de GC x Estágios de Decomposição para imagem *Salesman*.

TABELA III

Ganho de compactação de cada filtro - Imagem: Trees

Filtro / Estágio	1	2	3	4
QMF(5/3)CIR	2.4237	2.5517	2.5619	2.5650
QMF(5/3)EXT SIM	2.4455	2.5732	2.5842	2.5877
QMF(9/7)CIR	1.9311	2.0173	2.0320	2.0353
QMF(9/7)EXT SIM	1.9467	2.0369	2.0517	2.0556
MED 2	2.3489	2.4802	2.4854	2.4825
MED 4	1.5178	1.5647	1.5677	1.5680
MED 6	1.3849	1.4019	1.4019	1.4030

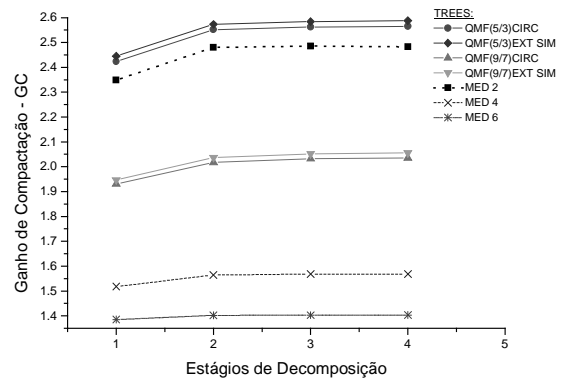


Figura 12. Gráfico de GC x Estágios de Decomposição para imagem *Trees*.

TABELA IV

Ganho de compactação de cada filtro - Imagem: Goldhill

Filtro / Estágio	1	2	3	4
QMF(5/3)CIR	4.6731	5.8862	6.0828	6.1096
QMF(5/3)EXT SIM	5.0240	6.3724	6.6129	6.6483
QMF(9/7)CIR	3.7923	4.8952	5.1544	5.1931
QMF(9/7)EXT SIM	4.1356	5.4516	5.7729	5.8295
MED 2	4.8935	6.1604	6.3588	6.3866
MED 4	3.6935	4.5138	4.6400	4.6607
MED 6	3.4706	4.1915	4.3040	4.3192

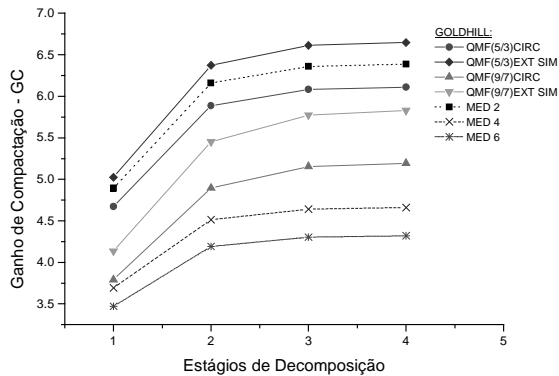


Figura 13. Gráfico de GC x Estágios de Decomposição para imagem Goldhill.

TABELA V

Tabela referente à porcentagem de operações de somas e multiplicações que o banco de filtros MED 2 realiza em relação aos bancos com filtros QMF.

	+ Análise	x Análise	+ Síntese	x Síntese
QMF(9/7)	14.3%	6.3%	4.4%	2.1%
QMF(5/3)	33.3%	12.5%	9.5%	4.2%

+ Análise = número de adições na análise (decomposição);

x Análise = número de multiplicações na análise;

+ Síntese = número de adições na síntese (reconstrução);

x Síntese = número de multiplicações na síntese.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho propõe-se uma medida empírica de compactação de energia dos coeficientes de decomposições em sub-bandas. Em muitos casos esta medida é igual à medida de Katto e Yasuda [8], que representa o ganho de codificação de sub-bandas em relação à codificação PCM. A medida empírica apresenta a vantagem de poder ser aplicada a bancos de filtros não lineares. Uma estrutura de decomposição e reconstrução perfeita com bancos de filtros lineares e não lineares [2] é utilizada. O banco de filtros MED 2, apesar de possuir características lineares, é uma extensão dos filtros não lineares MED 4 e MED 6. O banco MED 2 apresenta uma complexidade computacional muito menor que a dos filtros QMF, como ilustrou-se na Tabela V. Com relação ao ganho de compactação de energia, o banco de filtros QMF (5/3) com extensão simétrica apresentou os melhores resultados. Não obstante, o banco MED 2 apresenta ganhos muito próximos, em quase todos os estágios das imagens testadas, apesar de sua reduzida complexidade computacional.

Portanto, o filtro MED 2 demonstra ser uma ferramenta de grande potencial nas aplicações de compressão de imagens. Por fim, observa-se que os outros bancos de filtros de mediana utilizados, MED 4 e MED 6, não apresentaram desempenhos satisfatórios em comparação com os bancos de filtros QMF.

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] M. J. T. Smith e D. P. Barnwell, "Exact reconstruction for tree-structured subband coders", *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Proc.*, vol. ASSP-34, pp. 434-441, 1986.
- [2] O. Egger, W. Li e M. Kunt, "High compression image coding using an adaptive morphological subband decomposition", *Proceedings of the IEEE*, vol.83, pp.272-287, fevereiro 1995.
- [3] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu e I. Daubechies, "Image coding using wavelet transform", *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 1, pp. 205-220, abril 1992.
- [4] J. d. Villasenor, B. Belzer e J. Liao, "Wavelet filter evaluation for image compression", *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4, pp. 478-485, abril 1995.
- [5] N. S. Jayant e P. Noll, *Digital Coding of Waveforms*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.
- [6] Oppenheim, A. V. e Schafer, R. W., *Discrete-Time Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
- [7] M. J. T. Smith, "IIR Analysis/Synthesis Systems for Subband Image Coding, Capítulo 3", in *Subband Image Coding* (J. Woods, Ed.). Norwell, MA: Kluwer, 1991.
- [8] J. Katto e Y. Yasuda, "Performance evaluation of subband coding and optimization of its filter coefficients", *SPIE Proceedings of Visual Communications and Image Processing*, vol. 1605, pp. 95-106, novembro 1991.