

IMPLEMENTAÇÃO DE BANCOS DE FILTROS WAVELET COM BALANÇO DE ENERGIA PARA QUANTIZAÇÃO A/D DE SINAIS

ELEN M. LOBATO, SERGIO R. M. PENEDO E RUI SEARA

LINSE: Circuitos e Processamento de Sinais

Departamento de Engenharia Elétrica

Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Universitário, 88040-900 – Florianópolis – SC – Brasil

Tel: (0xx48) 331-9504, Fax: (0xx48) 331-9091, emlobato@linse.ufsc.br

RESUMO

Os métodos de quantização não-uniforme conhecidos, como o regido pela lei de compressão/expansão μ , apresentam melhor desempenho do que métodos de quantização uniforme (em termos de razão sinal-ruído (SNR)) para sinais de baixa amplitude. No entanto, esse bom desempenho não é estendido para valores maiores de amplitude relativa. Para solucionar tal problema, propõe-se um método de quantização não-uniforme baseado na decomposição *wavelet* do sinal a ser quantizado, que explora o balanço de energia entre as sub-bandas de frequência para comprimir/expandir de forma individual cada sub-banda. O método envolve o projeto de um banco de filtros *wavelet* com reconstrução perfeita, a partir da escolha adequada de raízes situadas no plano Z em $z = -1$, através da técnica de fatoração espectral. Dessa forma, obtém-se uma distribuição de energia entre as sub-bandas que possibilita um melhor aproveitamento da compressão logarítmica na quantização de sinais. O algoritmo apresenta melhora na SNR em relação a métodos de quantização uniforme e não-uniforme, para quaisquer faixas de amplitude, exibindo baixa complexidade computacional. Valores de SNR obtidos para um sinal de voz de teste são apresentados, ratificando a eficácia do método.

1. INTRODUÇÃO

Na conversão analógico - digital (A/D) de sinais, é sabido que, se o espaçamento entre os níveis de quantização é uniforme, a razão sinal-ruído (SNR) de quantização é proporcional à intensidade (potência) do sinal de entrada $m(t)$ [1]. Como a potência do sinal de voz pode variar cerca de 25 dB para um mesmo locutor ou até mesmo em 40 dB entre diferentes locutores, o espaçamento uniforme entre os níveis de quantização requer um número muito elevado de níveis para se obter um sistema com uma SNR aceitável. Assim, esquemas de quantização uniforme não são, de um modo geral, desejáveis em sistemas de comunicação que transportem sinais de voz ou outros sinais com grande variação de potência [1,2].

Para resolver tal problema, o espaçamento não-uniforme dos níveis de quantização é a alternativa mais natural: a separação entre os níveis de quantização é uma função da magnitude do sinal. Sinais de baixa amplitude são quantizados com níveis próximos, ao passo que, para sinais de maior amplitude, são usados níveis de quantização mais espaçados. Tal modificação do

processo de quantização faz com que o ruído de quantização seja uma função do espaçamento dos níveis de intensidade do sinal. Esse processo otimiza a SNR total do sistema, já que reduz o ruído para sinais de baixa amplitude, às custas da elevação do ruído em sinais de maior amplitude [1,2,3].

Na decomposição *wavelet* de um sinal, são obtidas sub-bandas de frequência com valores característicos de amplitude, o que pode ser explorado para a compressão logarítmica de sinais anterior à etapa de quantização. Uma vez que sinais de baixa amplitude são privilegiados pela quantização não-uniforme, torna-se interessante a partição de energia entre as diferentes sub-bandas de frequência, de forma a privilegiar a maior parcela possível de componentes de altas frequências, caracterizadas por possuir baixa amplitude (o que implica a utilização de filtros passa-altas associados a *wavelets* com vários momentos desvanescentes [4,5]), sem reduzir excessivamente a contribuição de componentes de baixas frequências, estes com maior amplitude (o que implica a utilização de filtros passa-baixas associados a *wavelets* com poucos momentos desvanescentes [4,5]).

Esta aparente contradição pode ser resolvida pela aplicação da técnica de *fatoração espectral* [5,6,7], que permite separar raízes polinomiais em duas seqüências correspondentes aos filtros passa-baixas de um banco de filtros *wavelet*, obedecendo a critérios de reconstrução perfeita [7]. O método de quantização de sinais proposto neste artigo busca projetar uma família de *wavelets* que decomponha o sinal a ser quantizado em sub-bandas ajustadas à quantização não-uniforme, obtendo melhores resultados quantitativamente, em termos da SNR, e apresentando baixa complexidade computacional.

A Seção 2 apresenta um dos métodos usuais de quantização não-uniforme (Lei μ), baseado na compressão logarítmica de sinais. Na Seção 3, é apresentada a teoria básica de projeto de bancos de filtros *wavelet* com reconstrução perfeita, enfatizando a importância da multiplicidade de raízes em $z = -1$. A Seção 4 introduz o esquema de quantização multi-resolução proposto, que associa a decomposição *wavelet* a leis de compressão logarítmica. Apresenta também uma metodologia para o projeto de uma família de *wavelets*, objetivando a quantização, baseada no algoritmo de fatoração espectral [4,7]. Na Seção 5, são apresentados resultados, em termos de SNR, para um sinal de voz de teste. Finalmente, na Seção 6, são apresentadas as conclusões obtidas da aplicação da técnica de quantização proposta.

2. QUANTIZAÇÃO NÃO-UNIFORME

Dentre os algoritmos de compressão existentes, destaca-se a Lei μ , padronizada nos Estados Unidos e no Japão [1,2]. A relação de compressão/expansão da Lei μ é dada pelas expressões recíprocas:

$$m_c(t) = \frac{\text{sgn}[m(t)]}{\ln(1+\mu)} \cdot \ln(1+\mu|m(t)|), \quad |m(t)| \leq 1 \quad (1)$$

$$m(t) = \frac{e^{|\ln(1+\mu)|} - 1}{\mu} \cdot \text{sgn}[m_c(t)] \quad (2)$$

onde $\text{sgn}[\cdot]$ representa a função sinal, $m_c(t)$ é a saída do compressor, $m(t)$ é o sinal de entrada e μ o parâmetro de compressão. Quando $\mu \rightarrow 0$, tem-se a quantização uniforme.

Um sistema sem compressão apresenta razão sinal-ruído diretamente proporcional à amplitude do sinal, já que o ruído de quantização permanece constante. Por outro lado, em um sistema com compressão logarítmica, o ruído de quantização é função da amplitude do sinal, apresentando melhor desempenho para sinais de baixa amplitude, quando comparado a um sistema descrito unicamente por uma etapa de quantização uniforme, como ilustrado na Fig. 1.

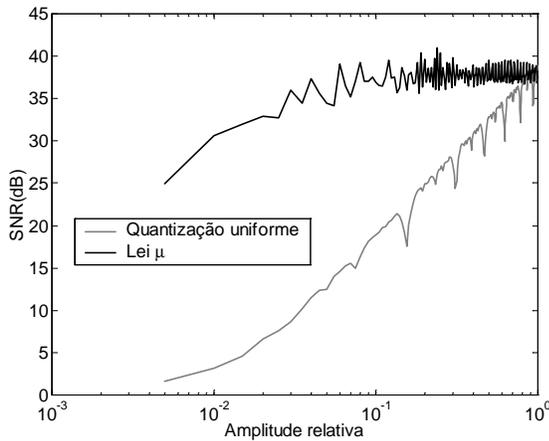


Fig. 1 - Razão sinal-ruído para os métodos de quantização uniforme e por Lei μ , para diferentes valores de amplitude relativa.

Como observado, a técnica de quantização uniforme apresenta melhor desempenho para valores mais altos de amplitude. Assim, é desejável um quantizador que apresente o desempenho da quantização uniforme em valores altos de amplitude e da quantização não-uniforme para valores baixos de amplitude, o que requer uma separação inversível de componentes com tais características. Nesse sentido, a transformada *wavelet* pode ser utilizada para selecionar amostras de cada classe de valores de amplitude, através da implementação de um banco de filtros que distribua as porções de baixa e alta amplitudes entre as sub-bandas de frequência, concentrando uma maior porção de energia na sub-banda relativa a altas frequências sem afetar a porção de energia dos componentes de baixas frequências.

Um algoritmo de projeto de bancos de filtros *wavelet* que pode ser usado nessa aplicação, através da manipulação de diversas configurações de raízes no domínio da transformada Z , é o denominado *fatoração espectral* [4,7], introduzido na seção seguinte.

3. BANCOS DE FILTROS WAVELET

Uma estrutura de bancos de filtros *wavelet* de dois canais envolve quatro filtros: a seção de análise possui um filtro passa-baixas $H_0(z)$ e um filtro passa-altas $H_1(z)$, ao passo que a seção de síntese é composta por um filtro passa-baixas $G_0(z)$ e por um filtro passa-altas $G_1(z)$, como ilustrado na Fig. 2. As saídas $y_0[n]$ e $y_1[n]$ desses filtros são dizimadas por um fator 2, conservando apenas os componentes de índice par:

$$y_0[n] = h_0[n] * x[n] \text{ e } v_0[n] = y_0[2n] \quad (3)$$

e

$$y_1[n] = h_1[n] * x[n] \text{ e } v_1[n] = y_1[2n], \quad (4)$$

onde $h_0[n]$ e $h_1[n]$ são as respostas ao impulso correspondentes, respectivamente, a $H_0(z)$ e $H_1(z)$, e '*' representa o operador de convolução.

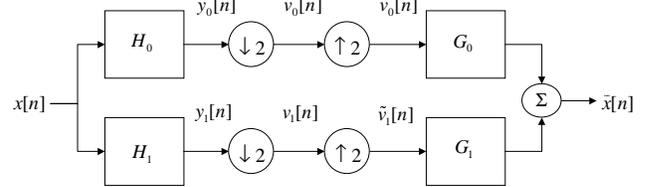


Fig. 2 - Banco de filtros de dois canais.

O vetor de entrada $x[n]$ de comprimento q produz dois vetores $v_0[n]$ e $v_1[n]$ de comprimento $q/2$. Este passo de análise é inverso para o passo de síntese: $v_0[n]$ e $v_1[n]$ são interpolados (fator 2) com zeros nas amostras de índice ímpar. Os resultados são filtrados por $G_0(z)$ e $G_1(z)$, e a sua soma compõe $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{x}[n] = g_0[n] * \tilde{v}_0[n] + g_1[n] * \tilde{v}_1[n], \quad (5)$$

onde

$$\tilde{v}_i[m] = \begin{cases} v_i[m/2] & , m \text{ par} \\ 0 & , m \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (6)$$

Se $\tilde{x}[n] \approx x[n-l]$, o banco de filtros possibilita reconstrução [6]. As condições para tal são obtidas através da análise do sinal ao longo do banco de filtros, no domínio da transformada Z . Uma análise da Fig. 2 conduz a

$$\begin{aligned} \tilde{X}(z) &= \frac{1}{2} G_0(z) \{H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)\} \\ &+ \frac{1}{2} G_1(z) \{H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)\} = z^{-l} X(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Para que não haja recobrimento de espectro na saída, são definidas as condições para reconstrução perfeita:

$$G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z) = 2z^{-l} \quad (8)$$

e

$$G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z) = 0. \quad (9)$$

A imposição da Eq. (9) determina a construção de sinais alternados [5], correspondendo, em termos polinomiais, a $H_1(z) = G_0(-z)$ e $G_1(z) = -H_0(-z)$. Desta forma, a Eq. (9) é satisfeita, e a Eq. (8) se reduz a uma equação do filtro produto $P_0(z) = G_0(z)H_0(z)$, tal que

$$P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-l}. \quad (10)$$

Esta é a equação para a reconstrução perfeita, na qual o termo à esquerda é uma função ímpar, de modo que l deve ser ímpar, ou seja, o único termo ímpar em $P_0(z)$ é igual a z^{-l} .

Pode-se separar o projeto de um banco de filtros de reconstrução perfeita em três passos:

- i) escolha de um polinômio $P_0(z)$ que satisfaça à Eq.(10);
- ii) fatoração do polinômio $P_0(z)$ em 2 polinômios $G_0(z)$ e $H_0(z)$;
- iii) determinação das respostas ao impulso dos filtros passa-baixas $h_0[n]$ e $g_0[n]$, bem como das respostas ao impulso dos filtros passa-altas $h_1[n] = (-1)^n g_0[n]$ e $g_1[n] = (-1)^{n+1} h_0[n]$ através da construção por sinais alternados [5,8].

Dada a simplicidade na formulação do projeto de filtros *wavelet* de reconstrução perfeita, não há indicação explícita do que torna um projeto melhor do que outro. Uma característica que fornece alguma informação acerca do desempenho dos filtros projetados está na multiplicidade de zeros em $z = -1$ [6].

3.1 Efeito da multiplicidade de zeros em $z = -1$

A resposta em magnitude $|H(\omega)|$ de um filtro passa-baixas deve se aproximar de zero em $\omega = \pi$. No plano Z , tal situação equivale à condição $z = e^{-i\pi} = -1$, assegurando que componentes de altas frequências do sinal de entrada sejam praticamente cancelados. Tal condição, $H(-1) = 0$, é fundamental na teoria *wavelet* [5,6,8].

Em um banco de filtros, uma raiz em $z = -1$ de multiplicidade p impõe uma importante propriedade: a função *wavelet* $\psi_{j,k}(x)$ associada possui p momentos desvanescentes [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi_{j,k}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^m 2^{j/2} \psi_{j,k}(2^j x - k) dx = 0, \quad m < p. \quad (11)$$

O valor de p assume, assim, importância fundamental no projeto de bancos de filtros *wavelet*, definindo a conformação da banda de transição dos filtros: um valor alto de p caracteriza filtros passa-baixas com maior banda passante e banda de transição estreita. Já uma função *wavelet* com um número pequeno de momentos desvanescentes gera filtros passa-baixas

com banda de transição mais larga e uma menor banda passante. A exploração dessa característica é útil à solução do problema da quantização não-uniforme, que apresenta desempenho condicionado à amplitude relativa do sinal.

Resaltada a importância das raízes em $z = -1$, é desenvolvido analiticamente o projeto do banco de filtros, através de fatoração espectral de um polinômio simétrico positivo de Daubechies [4]. A geração de um banco de filtros, conforme tal método, requer a computação das raízes do filtro produto

$$P_D(z) = (1 + z^{-1})^{2(D+1)} Q_D(z), \quad (12)$$

onde $Q_D(z)$ é um polinômio de Laurent de grau D com $2D$ raízes [9]. Através do mapeamento de variáveis complexas (x, y, z) e aplicação da mudança de variáveis $x = 1/(ky)$ [6,7,9] e $z + z^{-1} = 2 - 4y$ [4], pode-se, por aplicação da transformação de Joukowski [10], chegar à forma fatorada de $P_D(z)$:

$$P_D(z) = (1 + z^{-1})^{2(D+1)} U(z^{-1}; z_i) V(z^{-1}; r_j) \quad (13)$$

onde

$$U(z^{-1}; z_i) = \prod_{i=1}^{n^{cq}} (1 - z_i z^{-1})(1 - z_i^{-1} z^{-1})(1 - \bar{z}_i z^{-1})(1 - \bar{z}_i^{-1} z^{-1}) \quad (14)$$

e

$$V(z^{-1}; r_j) = \prod_{i=1}^{n^{rd}} (1 - r_j z^{-1})(1 - r_j^{-1} z^{-1}), \quad (15)$$

e n^{cq} , n^{rd} representam, respectivamente, o número de fatores complexos quádruplos e fatores reais duplos do polinômio $Q_D(z)$. Pode-se provar que $n^{cq} = D/2$ e $n^{rd} = D \bmod 2$ [7], onde 'mod' representa o operador módulo.

Para um polinômio arbitrário $F(z)$ com N coeficientes, há $N - 1$ raízes, das quais $0 \leq K \leq N - 1$ podem estar situadas em $z = -1$. Na fatoração espectral, o polinômio filtro produto $P_D(z)$ com $N_p = 4D + 3$ coeficientes e $K_p = 2D + 2$ raízes em $z = -1$ é fatorado em polinômios correspondentes aos filtros passa-baixas de análise, $H_0(z)$, e de síntese, $G_0(z)$, com N_h e N_g coeficientes, e K_h e K_g raízes em $z = -1$, respectivamente. Esta fatoração conduz às limitações sobre os comprimentos das respostas ao impulso e raízes em $z = -1$ dos três filtros:

$$N_p = N_h + N_g - 1 \quad (16)$$

e

$$K_p = K_h + K_g. \quad (17)$$

A família de *wavelets* escolhida e projetada é a biortogonal simétrica, o que requer [5,7]:

$$N_h = K_h + 4n_h^{cq} + 2n_h^{rd} + 1, \quad (18)$$

$$N_g = K_g + 4n_g^{cq} + 2n_g^{rd} + 1, \quad (19)$$

e

$$N_p = 2K_p - 1 \quad (20)$$

onde os subscritos h e g correspondem aos polinômios passa-baixas e passa-altas, respectivamente. Valores não-inteiros de n^{cq} e n^{rd} correspondem, respectivamente, a um par de raízes complexas e a uma única raiz real. Além disso, K_h e K_g devem ser simultaneamente pares ou ímpares, o que determina:

$$n_p^{cq} = n_h^{cq} + n_g^{cq} \quad (21)$$

e

$$n_p^{rd} = n_h^{rd} + n_g^{rd} = 1. \quad (22)$$

Definida a multiplicidade das raízes em $z = -1$ para as seções passa-baixas de análise e síntese, utilizam-se as Eqs. (18) e (19) para a determinação do número de coeficientes dos fatores do polinômio $Q_D(z)$. Finalmente, a aplicação das Eqs. (21) e (22) define a separação das raízes entre os polinômios $H_0(z)$ e $G_0(z)$, sendo obtidas as respostas ao impulso dos filtros passa-baixas $h_0[n]$ e $g_0[n]$ e, conseqüentemente, $h_1[n]$ e $g_1[n]$, através da construção por sinais alternados.

A seção seguinte apresenta o quantizador proposto, fazendo uso da seleção e distribuição de raízes em $z = -1$, de forma adaptada ao problema da quantização.

4. QUANTIZAÇÃO MULTI-RESOLUÇÃO

A estratégia de quantização proposta consiste na separação do sinal a ser quantizado em 2 sub-bandas resultantes de um nível de decomposição *wavelet*, com posterior compressão logarítmica por Lei μ e reconstrução *wavelet*, como ilustrado na Fig. 3. A aplicação da transformada *wavelet* realiza a separação do sinal em uma parcela de baixas freqüências, com valores de amplitude relativamente maiores, e uma parcela de altas freqüências, com valores de amplitude relativamente menores.

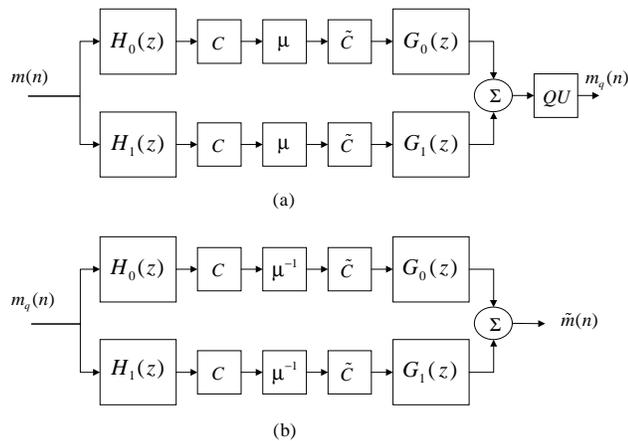


Fig. 3 - Diagramas em blocos: (a) do sistema compressor/quantizador; (b) do sistema expansor. A SNR é calculada entre $m(n)$ e $\tilde{m}(n)$, representações discretas de $m(t)$ e $\tilde{m}(t)$. QU está caracterizando o operador de quantização uniforme.

A proporção de energia distribuída entre as sub-bandas determina o desempenho da compressão logarítmica (e conseqüentemente da quantização). O passo seguinte na implementação do banco de filtros *wavelet*, que envolve o projeto de uma família de *wavelets*, define como é feita essa partição de energia:

- i) define-se a multiplicidade de raízes em $z = -1$ para as seções passa-baixas de análise e síntese (para os testes realizados, obtiveram melhor desempenho os filtros caracterizados por $K_h = 1$ e $K_g = 7$, o que corresponde a $D = 3$);
- ii) utilizam-se as Eqs. (18) e (19) para a determinação do número de coeficientes dos fatores do polinômio $Q_3(z)$, obtendo-se $N_g = 14$ e $N_h = 2$;
- iii) escolhendo-se uma única raiz em $z = -1$ para a seção passa-baixas de análise, obtêm-se as respostas ao impulso dos filtros passa-baixas $h_0[n]$ e $g_0[n]$ e, conseqüentemente, $h_1[n]$ e $g_1[n]$, através da construção por sinais alternados.

Os filtros passa-baixas de análise e de síntese obtidos após a etapa de projeto são definidos em termos de suas funções no domínio da transformada Z , respectivamente, por:

$$H_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} z^{-6} + \frac{\sqrt{2}}{2} z^{-7} = \frac{\sqrt{2}}{2} z^{-6} (1 + z^{-1}) \quad (23)$$

e

$$G_0(z) = -0,003452(1 - z^{-1} - 8,8z^{-2} + 8,8z^{-3} + 40,2z^{-4} - 40,2z^{-5} - 204,8z^{-6} - 204,8z^{-7} - 40,2z^{-8} + 40,2z^{-9} + 8,8z^{-10} - 8,8z^{-11} - z^{-12} + z^{-13}). \quad (24)$$

A Fig. 4 ilustra as funções escalamento $\phi(x)$ e *wavelet* $\psi(x)$ correspondentes ao banco de filtros projetado, comparativamente à família de Haar [8], que também possui uma única raiz em $z = -1$ na seção passa-baixas de análise. A Fig. 5 ilustra o mapa de zeros para os filtros passa-baixas projetados.

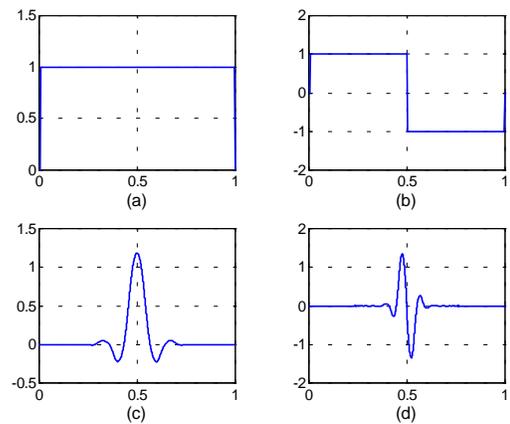


Fig. 4 - (a) Função escalamento de Haar; (b) função *wavelet* de Haar; (c) função escalamento projetada; (d) função *wavelet* projetada.

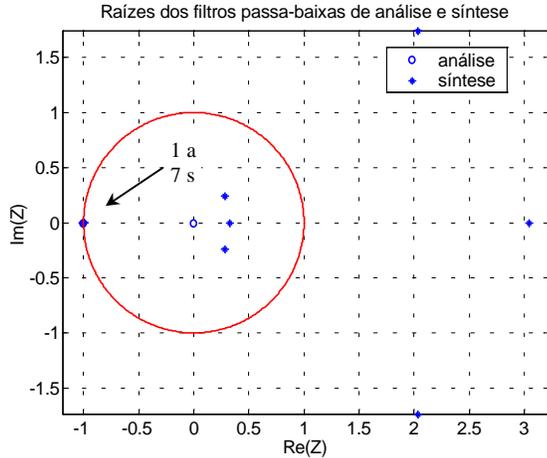


Fig. 5 - (a) Raízes dos filtros passa-baixas de análise e síntese projetados. A multiplicidade de raízes em $z = -1$ para os filtros de análise ('a') e síntese ('s') é indicada.

5. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Para simplificar a análise, a magnitude máxima permitida ao sinal de entrada $m(t)$ é igual à unidade. Para verificação do desempenho da técnica de quantização proposta, foram gerados 3 arquivos sonoros de curta duração (3 vocábulos pronunciados), amostrados a 11025 Hz, comprimidos segundo a técnica proposta (aqui identificada por Lei W-RSE) e quantizados, para cada técnica, com 8 bits/amostra. São ilustrados os resultados para um dos três sinais testados, em termos de SNR. Os resultados foram obtidos comparativamente aos métodos de quantização uniforme e não-uniforme com compressão por Lei μ , arbitrando-se o parâmetro de quantização μ igual a 255. Para o sinal de teste, foi variada a amplitude máxima relativa à unidade, extraíndo-se então a SNR. A Fig. 6 ilustra os valores de SNR obtidos, comparativamente às técnicas de quantização uniforme e não-uniforme, para diferentes valores de amplitude relativa.

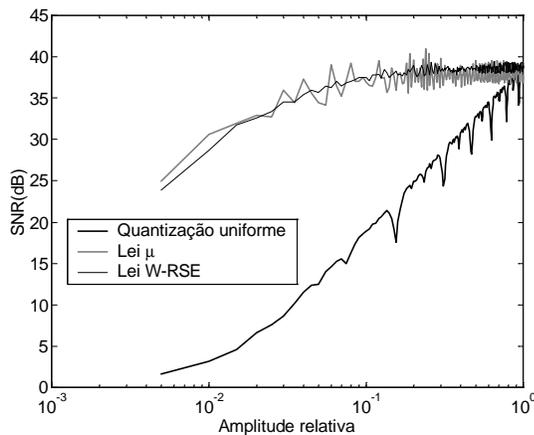


Fig. 6 - Valores de SNR para o método de quantização proposto, comparativamente aos métodos de quantização uniforme e não-uniforme (Lei μ).

Como observado, a SNR obtida para o algoritmo proposto apresenta uma melhora de cerca de 1,5 dB, em relação ao método baseado em quantização não-uniforme (Lei μ) para valores maiores de amplitude relativa. A utilização de blocos de ganho C (Fig. 3) menores do que a unidade conduz a melhores resultados, como ilustra a Fig. 7. Após a compressão logarítmica, o sinal é escalado em cada sub-banda por uma constante $\tilde{C} = \ln(1 + \mu) / \ln(1 + \mu / C)$, mantendo a amplitude máxima do sinal quantizado inferior à unidade. Todavia, se por um lado valores menores de C conduzem a uma maior SNR de quantização, por outro podem reduzir a SNR inerente ao sistema, devendo-se estabelecer um compromisso entre tais situações.

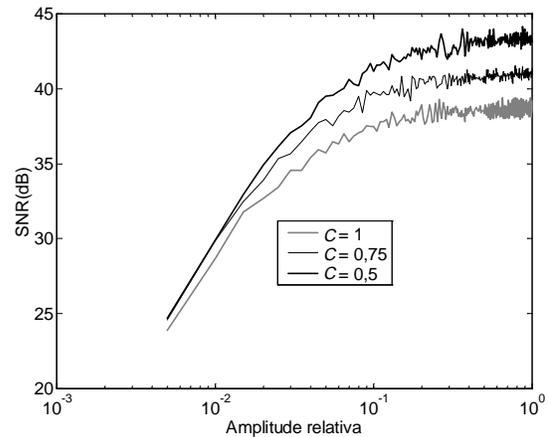


Fig. 7 - Valores de SNR do método de quantização proposto, para diferentes valores de ganho C .

Finalmente, o algoritmo é aplicado para diferentes famílias de *wavelets*, para ratificar a eficácia do projeto. A Fig. 8 ilustra os valores de SNR obtidos para o algoritmo de quantização proposto, utilizando diferentes famílias de *wavelets* conhecidas: a família de Haar, 'biortogonal 9-7' [11], e a nova família de *wavelets* proposta, para $C = 1$.

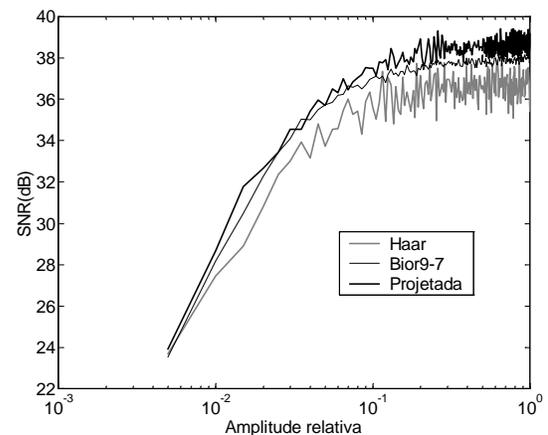


Fig. 8 - Valores de SNR do método de quantização proposto para a família de *wavelets* projetada, comparativamente à utilização de outras famílias de *wavelets*.

Como visto, o algoritmo proposto (Fig. 3) apresenta melhor desempenho do que outros métodos de quantização, desempenho este que é melhorado com a utilização da família de *wavelets* projetada. Tal melhora se faz sem aumento substancial de complexidade computacional, já que são inseridas apenas 4 seções de filtragem ao esquema tradicional de quantização não-uniforme. Diversas configurações de zeros para a fatoração do filtro produto foram testadas, sendo selecionada a que apresentou um melhor balanço de energia, com um reduzido número de coeficientes para os requeridos filtros.

6. CONCLUSÕES

A utilização de bancos de filtros *wavelet* na quantização não-uniforme de sinais de voz em sistemas de comunicação permite a obtenção de maiores valores de SNR, com baixa complexidade computacional. A separação de componentes de valores baixos e altos de amplitude é realizada através da distribuição de energia do sinal entre suas sub-bandas de frequência, de forma a se obter um melhor proveito da compressão logarítmica.

A implementação da técnica de fatoração espectral para o projeto de uma família de *wavelets* adequada à quantização não-uniforme possibilita a construção rápida e eficiente do quantizador proposto. A abordagem de projeto baseada na multiplicidade de raízes em $z = -1$ mostrou-se elegante e eficiente, aliando consistência matemática e bom desempenho, o que justifica sua utilização.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] T. F. Schubert Jr. "Simulation of the Effects of Companding on Quantization Noise in Digital Communication Systems," *IEEE Transactions on Education*, vol. 37, No. 1, February 1994, pp.47-50.
- [2] S. Haykin. "Digital Communications," John Wiley & Sons, 1988.
- [3] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky and I. T. Young. "Signals and Systems," Prentice-Hall, 1983.
- [4] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets, "Communications on Pure and Applied Mathematics," Vol. 41, pp. 909-996, 1988.
- [5] J. Shen and G. Strang. "The zeros of the Daubechies polynomials," *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 124, No. 12, pp. 3819-3833, 1996.
- [6] G. Strang. "Creating and Comparing Wavelets," Technical Paper, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, pp.1-10, 1994.
- [7] C. Taswell. "Constraint-Selected and Search-Optimized Families of Daubechies Wavelet Filters Computable by Spectral Factorization," Technical Paper, Computational Toolsmiths, Stanford, Ca, Feb. 2000.
- [8] I. Daubechies. "Ten Lectures on Wavelets," *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics (SIAM)*, Vol. 61, Philadelphia, PA, 1992.
- [9] T. N. T. Goodman, C. A. Micchelli, G. Rodriguez *et al.* "Spectral factorization of Laurent polynomials," *Advances in Computational Mathematics*, 1997.

- [10] A. I. Markushevich. "Theory of Functions of a Complex Variable," Chelsea Publishing Company, New York, 2nd edition, Vol. 1, pp.197-233, 1977.
- [11] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu and I. Daubechies. "Image Coding Using Wavelet Transform," *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 1, pp. 205-220, Apr. 1992.