

MODELO ANALÍTICO PARA OS MOMENTOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS DO ALGORITMO LEAKY FXLMS

ORLANDO J. TOBIAS E RUI SEARA

LINSE: Circuitos e Processamento de Sinais
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Universitário, 88040-900 - Florianópolis SC – Brasil
Tel: (0xx48) 331-9504, Fax: (0xx48) 331-9091, orlando@linse.ufsc.br

RESUMO

Este trabalho propõe uma modelagem analítica para descrever os momentos de primeira e segunda ordens dos coeficientes de um filtro adaptativo FIR, utilizando o algoritmo Leaky LMS filtrado. Esse algoritmo é usualmente utilizado para reduzir efeitos não desejáveis (instabilidade) provenientes da etapa de implementação, por exemplo, erros decorrentes das operações aritméticas com precisão finita, problemas de overflow, condicionamento do sinal de entrada, dentre outros. Tem-se demonstrado que a teoria da independência, extensivamente utilizada na análise de filtros FIR-LMS, não mais se aplica ao caso filtrado. Assim, neste trabalho, os modelos desenvolvidos não invocam tal teoria. Dessa forma, os modelos analíticos obtidos apresentam um excelente casamento com os resultados de simulações.

1. INTRODUÇÃO

O algoritmo LMS é amplamente utilizado na adaptação dos coeficientes de filtros FIR adaptativos, os quais podem ser encontrados nas mais diversas aplicações. O principal motivo da popularidade dessas estruturas decorre de sua simplicidade de implementação. No entanto, nessa fase é requerido tomar certos cuidados a fim de evitar alguns efeitos indesejáveis que podem levar à instabilidade do algoritmo. Como exemplo, pode-se citar os problemas decorrentes da aritmética finita utilizada pelos processadores. O conteúdo espectral insuficiente do sinal de entrada também pode causar problemas de convergência do algoritmo [1]. Esses problemas podem ser reduzidos pela utilização de um fator de perda (“leakage”) na expressão de atualização dos coeficientes do filtro adaptativo. Dessa forma, obtém-se uma variante do algoritmo LMS, chamado de *Leaky LMS* [2]. Em certas aplicações de controle ativo de ruído, para as quais utiliza-se o algoritmo LMS filtrado (FXLMS), problemas similares aos apresentados pelo LMS clássico podem ocorrer na fase de implementação. Além do mais, na aplicação de controle ativo de ruído acústico deve se evitar a sobrecarga da fonte secundária, mantendo, dessa forma, a operação na região mais linear possível do alto-falante

[3, pp. 77]. Esse problema pode ser abrandado através da limitação da potência de saída do filtro adaptativo pela modificação da função custo a ser minimizada. Isto leva a uma versão do algoritmo FXLMS com perda, denominada por *Leaky FXLMS*.

Em recentes análises do algoritmo FXLMS, tem-se demonstrado que a teoria da independência (TI), que é uma premissa considerada para simplificar a análise estatística do algoritmo LMS [4], não pode mais ser utilizada para o caso filtrado [5-7]. Isto se deve à presença das transferências em cascata com o filtro adaptativo [2], gerando, assim, correlações no vetor de entrada que não podem ser desconsideradas. A teoria da independência considera que os vetores de entrada são estatisticamente independentes.

Assim, neste trabalho são desenvolvidas expressões analíticas para modelar os momentos de primeira e segunda ordens do algoritmo *Leaky FXLMS*, sem utilizar tal teoria, resultando em modelos que apresentam um excelente casamento entre os resultados teóricos e de simulações.

2. ANÁLISE

2.1 Descrição do Problema

A Fig. 1 mostra o diagrama em blocos de um sistema de controle ativo que utiliza o algoritmo LMS filtrado. O bloco **S** agrupa as seguintes transferências: conversor D/A, amplificador de potência, alto-falante, microfone de erro e conversor A/D. A estimativa desse conjunto de transferências é denotada por \hat{S} [3]. A notação utilizada é a seguinte:

$\mathbf{W}(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{N-1}(n)]^T$: vetor de coeficientes
do filtro adaptativo

$\mathbf{S} = [s_0 \ s_1 \ \dots \ s_{M-1}]^T$: resposta ao impulso do caminho
secundário

$\hat{\mathbf{S}} = [\hat{s}_0 \hat{s}_1 \dots \hat{s}_{\hat{M}-1}]^T$: estimação da resposta ao impulso do caminho secundário

$\mathbf{X}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$: sinal de referência

$\mathbf{X}_f(n) = [x_f(n), x_f(n-1), \dots, x_f(n-N+1)]^T$: sinal de referência filtrado

$d(n)$: sinal primário - estacionário

$z(n)$: ruído branco estacionário, não correlacionado com qualquer outro sinal e com variância σ_z^2 .

Para a análise realizada, assume-se que $x(n)$ é um sinal gaussiano, estacionário com média zero e variância σ_x^2 . Os sinais da Fig. 1 podem ser descritos pelas seguintes expressões:

$$e(n) = d(n) - y_f(n) + z(n), \quad (1)$$

$$y_f(n) = \mathbf{X}^T(n) \mathbf{W}(n) = \mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n), \quad (2)$$

$$y_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{X}^T(n-i) \mathbf{W}(n-i), \quad (3)$$

$$x_f(n) = \sum_{i=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_i x(n-i) \quad (4)$$

e

$$\mathbf{X}_f(n) = \sum_{i=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_i \mathbf{X}(n-i). \quad (5)$$

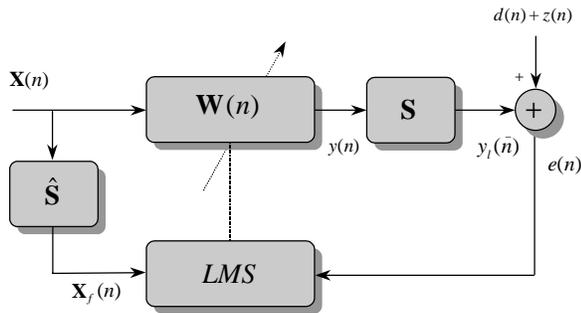


Fig. 1 - Diagrama em blocos do algoritmo LMS filtrado.

2.2 Vetor ótimo de coeficientes

Nesta seção é derivada uma expressão para o vetor ótimo de coeficientes, para o qual o vetor de pesos do filtro adaptativo deve convergir uma vez terminado o período de adaptação. Como já mencionado, os fatores de instabilidade do algoritmo podem ser reduzidos pela modificação da função custo da seguinte forma [2-3]:

$$J = E[e^2(n)] + \gamma \mathbf{W}^T \mathbf{W}. \quad (6)$$

Como se pode observar, a função custo clássica é penalizada através de um termo que é proporcional à norma do vetor de coeficientes \mathbf{W} . A constante γ é chamada de fator de perda, sendo seu valor positivo e menor do que 1. Da Fig. 2 obtemos o valor de $e(n)$, dado por:

$$e(n) = d(n) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{X}^T(n-i) \mathbf{W}. \quad (7)$$

Elevando (7) ao quadrado, calculando seu valor esperado e substituindo em (6), temos a expressão da função custo em função de \mathbf{W} . Se derivamos a função custo em relação à variável independente \mathbf{W} , e igualamos a zero, é fácil obter a expressão para os coeficientes ótimos, dada por:

$$\mathbf{W}_{ot} = (\tilde{\mathbf{R}}_{ss} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_s, \quad (8)$$

onde $\tilde{\mathbf{R}}_{ss} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} s_i s_j E[\mathbf{X}(n-j) \mathbf{X}^T(n-i)] = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} s_i s_j \mathbf{R}_{i-j}$,

$\tilde{\mathbf{P}}_s = \sum_{j=0}^{M-1} s_j E[d(n) \mathbf{X}^T(n-j)] = \sum_{j=0}^{M-1} s_j \mathbf{P}_j$, e \mathbf{I} é a matriz identidade. Note que os valores esperados nas expressões anteriores são determinados sem a utilização da teoria da independência.

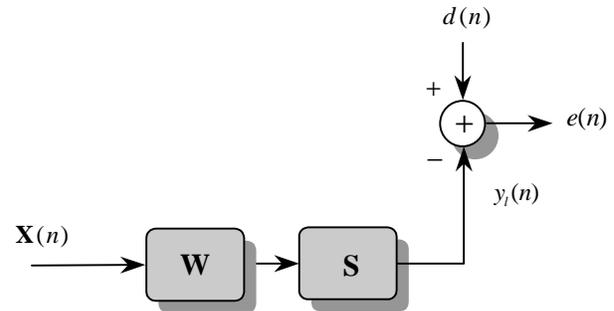


Fig. 2 - Diagrama em blocos para determinar o vetor ótimo de coeficientes.

2.3 Momento de primeira ordem

A função custo que o algoritmo *Leaky* FXLMS minimiza é a versão instantânea da expressão (6), dada por:

$$J(n) = e^2(n) + \gamma \mathbf{W}(n)^T \mathbf{W}(n). \quad (9)$$

Assim, a equação de atualização dos coeficientes pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial J(n)}{\partial \mathbf{W}(n)} \\ &= (1 - \mu\gamma) \mathbf{W}(n) + \mu e(n) \mathbf{X}_f(n). \end{aligned} \quad (10)$$

Utilizando as equações (1)-(5) em (10), e chamando $v = (1 - \mu\gamma)$, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) &= v\mathbf{W}(n) + \mu \sum_{i=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_i d(n) \mathbf{X}(n-i) \\ &\quad - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} s_i \hat{s}_j \mathbf{X}(n-j) \mathbf{X}^T(n-i) \mathbf{W}(n-i) \quad (11) \\ &\quad + \mu \sum_{i=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_i z(n) \mathbf{X}(n-i). \end{aligned}$$

A condição para o parâmetro v é $|v| < 1$. Desta forma, quando $e(n) \mathbf{X}_f(n) \approx 0$, $n > N$, na Eq. (10) pode-se observar que $\mathbf{W}(N+k) \approx v^k \mathbf{W}(N)$ tende a zero para $k \rightarrow \infty$. Calculando o valor esperado de (11), obtemos o momento de primeira ordem dos coeficientes do filtro adaptativo, dado por:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{W}(n+1)] &= vE[\mathbf{W}(n)] + \mu \sum_{i=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_i \mathbf{P}_{-i} \\ &\quad - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} s_i \hat{s}_j \mathbf{R}_{i-j} E[\mathbf{W}(n-i)]. \quad (12) \end{aligned}$$

Para obter (12) foram utilizadas as seguintes suposições:

- i) levar em conta as correlações entre os vetores de entrada, $\mathbf{X}(n-j)$ e $\mathbf{X}(n-i)$;
- ii) ignorar a correlação entre os vetores $\mathbf{W}(n-i)$ e $\mathbf{X}(n-j)$ ou $\mathbf{X}(n-i)$.

Estas conjecturas estão fundamentadas através de extensivas simulações em [7]. A partir de (12), pode ser determinado o valor em regime permanente para os coeficientes do filtro adaptativo fazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{W}(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{W}(n)] = \mathbf{W}_\infty$. Assim, obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{W}_\infty = (\tilde{\mathbf{R}}_{ss} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_s, \quad (13)$$

onde $\tilde{\mathbf{R}}_{ss} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} s_i \hat{s}_j E[\mathbf{X}(n-j) \mathbf{X}^T(n-i)] = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} s_i \hat{s}_j \mathbf{R}_{i-j}$ e

$\tilde{\mathbf{P}}_s = \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_j E[d(n) \mathbf{X}^T(n-j)] = \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_j \mathbf{P}_j$. Note que (13) é

idêntica à (8) quando $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$. Essa condição corresponde ao caso ideal de estimação perfeita do caminho secundário. Da mesma forma que em [7], as expressões para o momento de primeira e segunda ordens são substancialmente mais simples quando colocadas em função do vetor de erro nos coeficientes. Esse erro é definido por $\mathbf{V}(n) = \mathbf{W}(n) - \mathbf{W}_\infty$. Note que está sendo utilizando \mathbf{W}_∞ ao invés de \mathbf{W}_{ot} . Dessa forma, tem-se uma condição mais geral de análise. Assim, o momento de

primeira ordem em função de $\mathbf{V}(n)$, utilizando (13), assume a seguinte forma:

$$E[\mathbf{V}(n+1)] = vE[\mathbf{V}(n)] - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} s_i \hat{s}_j \mathbf{R}_{i-j} E[\mathbf{V}(n-i)]. \quad (14)$$

2.4 Expressão de $J(n)$ em função de $\mathbf{V}(n)$

Nesta seção, vamos representar a função custo instantânea, Eq. (9), em função do vetor de erro nos coeficientes. Assim, poderemos obter a forma da expressão do momento de segunda ordem para o vetor de erro. Então, a partir da expressão (9), (11) e da definição do vetor de erro, obtém-se:

$$\begin{aligned} J(n) &= E[d^2(n)] - 2 \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{P}_i^T E[\mathbf{V}(n-i)] - 2 \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{P}_i^T \mathbf{W}_\infty \\ &\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} s_i s_j \text{tr} \{ \mathbf{R}_{j-i} E[\mathbf{V}(n-j)] \mathbf{W}_\infty^T \} + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} s_i s_j \text{tr} \{ \mathbf{R}_{j-i} \mathbf{W}_\infty \mathbf{W}_\infty^T \} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} s_i s_j \text{tr} \{ \mathbf{R}_{j-i} \mathbf{W}_\infty E[\mathbf{V}^T(n-i)] \} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{\hat{M}-1} s_i s_j \text{tr} \{ \mathbf{R}_{j-i} E[\mathbf{V}(n-j) \mathbf{V}^T(n-i)] \} + \sigma_z^2 \\ &\quad + \gamma \text{tr} \{ E[\mathbf{V}(n) \mathbf{V}^T(n)] + E[\mathbf{V}(n)] \mathbf{W}_\infty^T + \mathbf{W}_\infty E[\mathbf{V}^T(n)] + \mathbf{W}_\infty \mathbf{W}_\infty^T \}. \quad (15) \end{aligned}$$

Da Eq. (15), pode-se observar que a função custo depende de termos contendo \mathbf{W}_∞ e $E[\mathbf{V}(n-i)]$, os quais são determinados pelas expressões (13) e (14), respectivamente. Também, é necessário conhecer o momento de segunda ordem, cuja expressão geral é $E[\mathbf{V}(n-j) \mathbf{V}^T(n-i)]$ para $i, j = 0, \dots, M-1$. A próxima seção tem por objetivo determinar tal valor esperado.

2.5. Momento de segunda ordem de $\mathbf{V}(n)$

Subtraindo \mathbf{W}_∞ de ambos membros da Eq. (11), e a partir da definição do vetor de erro nos coeficientes, a expressão para $\mathbf{V}(n-j)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(n-j) &= v\mathbf{V}(n-j-1) - \mu\gamma \mathbf{W}_\infty \\ &\quad + \mu \left(\sum_{k=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_k \mathbf{X}(n-k-j-1) d(n-j-1) \right. \\ &\quad - \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\hat{M}-1} s_k \hat{s}_l \mathbf{X}(n-l-j-1) \mathbf{X}^T(n-k-j-1) \mathbf{W}_\infty \\ &\quad - \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\hat{M}-1} s_k \hat{s}_l \mathbf{X}(n-l-j-1) \mathbf{X}^T(n-k-j-1) \mathbf{V}(n-k-j-1) \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\hat{M}-1} \hat{s}_i \mathbf{X}(n-l-j-1) z(n-j-1) \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Também determina-se o valor para $\mathbf{V}^T(n-i)$. Calculando-se o produto $\mathbf{V}(n-j) \mathbf{V}^T(n-i)$ e tomando o seu valor esperado, obtém-se a expressão geral para determinar

$E[\mathbf{V}(n-j)\mathbf{V}^T(n-i)] \quad \forall i, j$. Os momentos de quarta ordem da variável $\mathbf{X}(n)$ são obtidos pelo teorema de fatoração de momentos para variáveis gaussianas [8]. Pela utilização de (13) são cancelados os termos contendo \mathbf{W}_∞ e $E[\mathbf{V}(n)]$. Também, definindo a notação $\mathbf{K}_{j,i}(n) = E[\mathbf{V}(n-j)\mathbf{V}^T(n-i)]$, podemos obter uma expressão mais compacta para o momento de segunda ordem do vetor de erro nos coeficientes, dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{j,i}(n) = & \nu^2 \mathbf{K}_{j,i}(n-1) - \nu \mu \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\hat{M}-1} s_k \hat{\delta}_l \mathbf{K}_{j,k+i}(n-1) \mathbf{R}_{l-k} \\ & - \nu \mu \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\hat{M}-1} s_k \hat{\delta}_l \mathbf{R}_{k-l} \mathbf{K}_{k+j,i}(n-1) \\ & + \mu^2 \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\hat{M}-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{\hat{M}-1} s_k \hat{\delta}_l s_m \hat{\delta}_r \left(\mathbf{R}_{k-l} \mathbf{K}_{k+j,m+i}(n-1) \mathbf{R}_{r-m} \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{R}_{m+i-l-j} \mathbf{K}_{m+i,k+j}(n-1) \mathbf{R}_{r+i-k-j} \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{R}_{r+i-l-j} \text{tr} \{ \mathbf{K}_{m+i,k+j}(n-1) \mathbf{R}_{m+i-k-j} \} \right) \\ & + \mu^2 \sum_{k=0}^{\hat{M}-1} \sum_{l=0}^{\hat{M}-1} \hat{\delta}_k \hat{\delta}_l \mathbf{R}_{l+i-j-k} E[z(n-i-1)z(n-j-1)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Note-se que a Eq. (17) não depende apenas de termos do tipo $\mathbf{K}_{j,i}(n-1)$, ela também depende de termos do tipo $\mathbf{K}_{j,k+i}(n-1)$ ou $\mathbf{K}_{j+k,i}(n-1)$, onde $\mathbf{K}_{j+k,i}(n-1) = \mathbf{K}_{j,k+i}^T(n-1)$. Em [6], a Eq. (17) é também utilizada para a determinação desses últimos termos. Esse procedimento leva a uma expressão recursiva contendo infinitos termos, o que representa um inconveniente para esse modelo. Em [7] tal problema tem sido solucionado através do uso de uma equação associada para obter os termos $\mathbf{K}_{j,k+i}(n-1)$. Tal equação é obtida pós-multiplicando (16) por $\mathbf{V}^T(n-k-i)$ e tomando-se o seu valor esperado. Assim:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{V}(n-j)\mathbf{V}^T(n-k-i)] = & \nu E[\mathbf{V}(n-j-1)\mathbf{V}^T(n-k-i)] \\ & + \mu \sum_{m=0}^{\hat{M}-1} \hat{\delta}_m E[\mathbf{X}(n-m-j-1)d(n-j-1)E[\mathbf{V}^T(n-k-i)]] \\ & - \mu \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\hat{M}-1} s_m \hat{\delta}_l E[\mathbf{X}(n-l-j-1)\mathbf{X}^T(n-m-j-1)] E[\mathbf{V}(n-m-j-1)\mathbf{V}^T(n-k-i)] \\ & - \mu \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\hat{M}-1} s_m \hat{\delta}_l E[\mathbf{X}(n-l-j-1)\mathbf{X}^T(n-m-j-1)] \mathbf{W}_\infty E[\mathbf{V}^T(n-k-i)] \\ & + \mu \sum_{m=0}^{\hat{M}-1} \hat{\delta}_m E[\mathbf{X}(n-m-j-1)E[z(n-j-1)]] E[\mathbf{V}^T(n-k-i)] \\ & - \mu \gamma \mathbf{W}_\infty E[\mathbf{V}^T(n-k-i)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Utilizando a notação anteriormente proposta e a Eq. (13) pode-se reescrever (18), como segue:

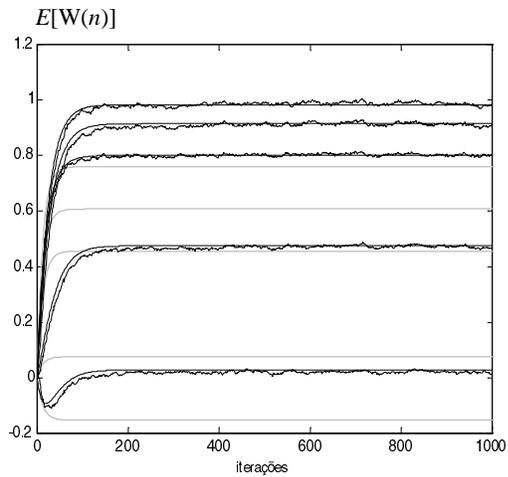
$$\mathbf{K}_{j,k+i}(n) = \nu \mathbf{K}_{j,k+i-1}(n-1) - \mu \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\hat{M}-1} s_m \hat{\delta}_l \mathbf{R}_{m-l} \mathbf{K}_{m+j,k+i-1}(n-1). \quad (19)$$

Desta forma, as equações (13), (14), (18) e (19) permitem determinar o comportamento da função custo (Eq. (15)) para o algoritmo *Leaky* FXLMS.

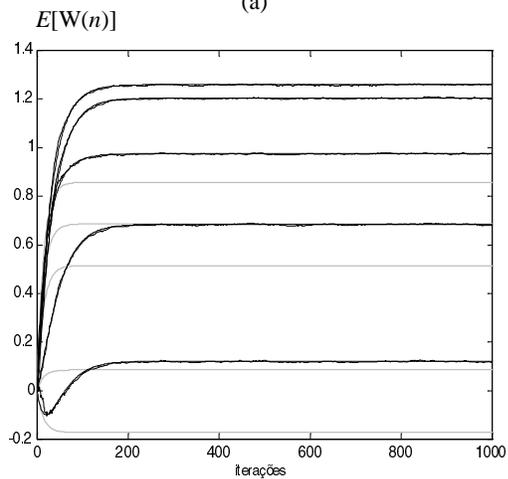
3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Dois exemplos de identificação de sistema foram usados para avaliar o modelo analítico proposto. Nestes exemplos são utilizados diferentes valores para o parâmetro γ , assim como diferentes sinais de entrada (ruídos branco e colorido gaussianos). Para todos os exemplos, o sinal de entrada possui variância unitária. O ruído de medição é branco com variância 0,0001.

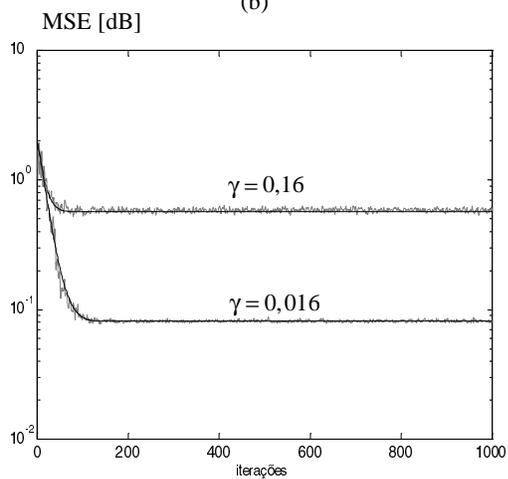
Exemplo 1: A planta utilizada é dada por $[1; 0,8; 0,6; 0,1; -0,2]$, o caminho secundário é $\mathbf{S} = [1; -0,5]$ e sua estimativa $\hat{\mathbf{S}} = [1; -0,3]$. O sinal de entrada é um ruído branco. O valor máximo da taxa de aprendizagem, determinado de forma experimental para a manutenção da estabilidade do algoritmo, é $\mu_{\max} = 0,1$. O valor utilizado neste exemplo é $0,5\mu_{\max}$. Para o parâmetro γ foram utilizados os seguintes valores: 0,16 e 0,016. Os resultados de simulações são apresentados na Fig. 3. As Figs. 3(a) e 3(b) mostram os resultados obtidos por simulações (média de 100 realizações), o modelo utilizando a TI e o modelo proposto (Eq. (12)). Nessas figuras pode-se verificar a predição do valor em regime permanente para os coeficientes do filtro adaptativo, dado pela Eq. (13), sendo $\mathbf{W}_\infty = [0,80; 0,98; 0,91; 0,47; 0,028]$ para $\gamma = 0,16$ e $\mathbf{W}_\infty = [0,98; 1,25; 1,20; 0,68; 0,12]$ para $\gamma = 0,016$, respectivamente. É interessante observar a mudança do valor de \mathbf{W}_∞ em função do fator de perda γ . Também, dessas figuras pode-se observar que o modelo que utiliza a TI não representa adequadamente o comportamento médio dos coeficientes, como já tinha sido demonstrado em [5-7]. Por outro lado, o casamento entre o modelo proposto, sem considerar a TI, e as simulações é muito bom. A Fig. 3(c) ilustra as curvas correspondentes ao erro médio quadrático obtido a partir das Eqs. (15), (13), (14), (18) e (19), e através de simulações para $\gamma = 0,16$ e $\gamma = 0,016$. Novamente, nota-se uma boa correspondência entre as simulações e o modelo proposto. Da Fig. 3(c), podemos observar o efeito que o fator de perda exerce sobre o erro mínimo. Na medida em que $\gamma \rightarrow 0$ o algoritmo *Leaky* FXLMS se aproxima do desempenho do FXLMS.



(a)

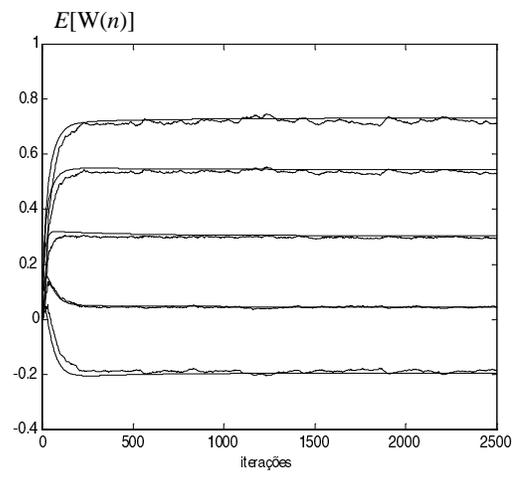


(b)

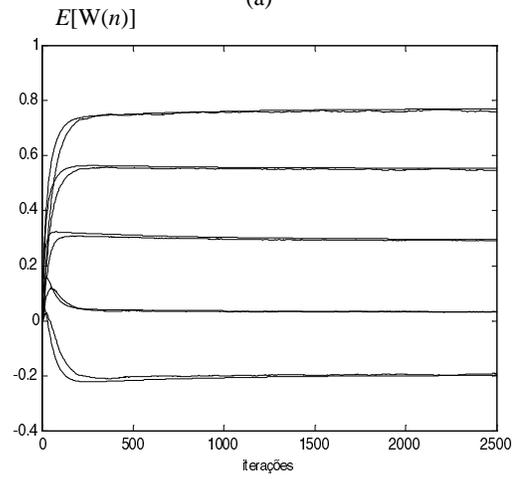


(c)

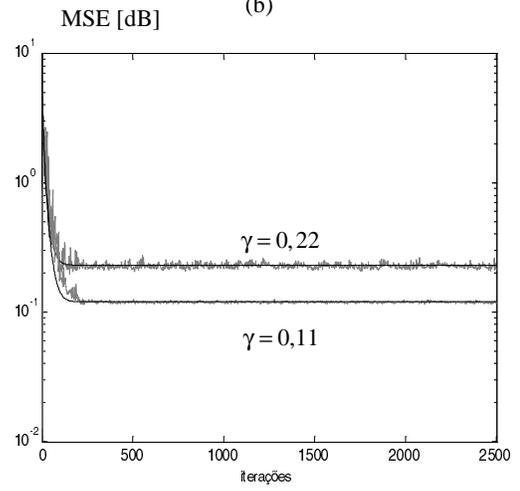
Fig. 3 - (a) e (b) Evolução de $E[\mathbf{W}(n)]$ para $\gamma=0,16$ e $\gamma=0,016$, respectivamente. Linha irregular: simulação (média de 100 realizações). Linha cinza clara: modelo usando a TI. Linha cheia: modelo proposto, Eq. (12). (c) Erro médio quadrático. Linha cinza irregular: simulação. Linha cheia: modelo proposto.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4 - (a) e (b) Evolução de $E[\mathbf{W}(n)]$ para $\gamma=0,22$ e $\gamma=0,11$, respectivamente. Linha irregular: simulação (média de 100 realizações). Linha cheia: modelo proposto, Eq. (12). (c) Erro médio quadrático. Linha cinza irregular: simulação. Linha cheia: modelo proposto.

Exemplo 2: Neste exemplo é utilizada a mesma planta do *Exemplo 1*. Agora, vamos assumir que $\hat{S} = S = [1; 0,5]$. O sinal de entrada é um ruído colorido gerado a partir de um processo AR de segunda ordem, dado por $x(n) = a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + u(n)$, onde $u(n)$ é um ruído branco com variância 0,0122. Os coeficientes do processo AR são: $a_1 = -1,8442$ e $a_2 = 0,95$; e a dispersão dos autovalores é de 30. Para este caso $\mu_{\max} = 0,09$ (determinado de forma experimental) sendo o valor utilizado igual a $0,1\mu_{\max}$. Os valores para γ são 0,22 e 0,11. As Figs. 4(a) e (b) mostram as curvas correspondentes à evolução temporal dos coeficientes do filtro adaptativo; onde a linha irregular corresponde aos resultados de simulações (média de 100 realizações) e a linha cheia o modelo proposto. A partir dessas figuras pode-se observar que o modelo proposto representa adequadamente o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo. A partir da Eq. (8), o valor em regime permanente é $\mathbf{W}_{or} = [0,73; 0,545; 0,30; 0,045; -0,194]$ para $\gamma = 0,22$ e $\mathbf{W}_{or} = [0,77; 0,55; 0,29; 0,033; -0,197]$ para $\gamma = 0,11$, respectivamente. Dos resultados apresentados, fica evidente que o modelo proposto fornece uma boa predição do comportamento do filtro adaptativo, permitindo estudar de forma confiável o desempenho do algoritmo *Leaky FXLMS* sob diferentes condições de operação.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, é apresentado um modelo analítico para descrever os momentos de primeira e segunda ordens do algoritmo *Leaky LMS* filtrado (*Leaky FXLMS*). O modelo proposto é derivado não considerando a teoria da independência, que é extensivamente utilizada na análise de estruturas FIR-LMS convencionais. A modelagem proposta apresenta uma boa concordância com os resultados obtidos por simulações tanto para sinais de entrada brancos quanto para coloridos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Sethares, W. A., Lawrence, D. A., Johnson, Jr., C. R., e Bitmead, R. R., "Parameter drift in LMS adaptive filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 868-879, Aug. 1986.
- [2] Mayyas, K., e Aboulnasr, T., "Leaky LMS algorithm: MSE analysis for gaussian data," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 45, pp. 927-934, April 1997.
- [3] Kuo, S., e Morgan, D. R., *Active Noise Control Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [4] Mazo, J. E., "On the independence theory of equalizer convergence," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, pp. 963-993, May 1979.
- [5] Tobias, O. J., Bermudez, J. C. M., Bershad, N. J., e Seara, R., "Mean weight behavior of the Filtered-X LMS algorithm", *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'98)*, Seattle, USA, pp. 3545-3548, May 1998.
- [6] Tobias, O. J., Bermudez, J. C. M., Bershad, N. J., e Seara, R., "Second moment analysis of the Filtered-X LMS algorithm", *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'99)*, Phoenix, Arizona, USA, pp. IV-1873 - IV-1876, March 1999.
- [7] Tobias, O. J., *Análise estatística do comportamento do algoritmo LMS filtrado*, Tese de doutorado, EEL-UFSC, Outubro 1999.
- [8] Haykin, S., *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, 1996.