

INTERPOLAÇÃO DE IMAGENS ATRAVÉS DA PROPRIEDADE DE REGULARIDADE E CORREÇÃO DE BORDAS EM MULTI-ESCALA

SERGIO R. M. PENEDO E RUI SEARA

LINSE: Circuitos e Processamento de Sinais

Departamento de Engenharia Elétrica

Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Universitário, 88040-900 – Florianópolis – SC – Brasil

Tel: (0xx48) 331-9504, Fax: (0xx48) 331-9091, penedo@linse.ufsc.br

RESUMO

Este artigo apresenta uma técnica de interpolação de imagens baseada na transformada *wavelet*. Métodos usuais de interpolação assumem que o sinal a ser interpolado é uma função contínua, possuindo uma ou mais derivadas. Tais considerações não são satisfeitas geralmente para imagens naturais, que apresentam variações bruscas de luminância nos limites entre os objetos: a suposição de continuidade da função de interpolação e suas derivadas produz imagens interpoladas com bordas excessivamente suavizadas. Para superar tal problema, introduz-se um método de interpolação baseado em *wavelets* que estima a regularidade das bordas (medindo a função de decaimento dos coeficientes *wavelet* nas diferentes escalas de decomposição), objetivando preservá-la na extrapolação de uma nova sub-banda a ser utilizada na reconstrução da imagem. O algoritmo produz bordas notadamente mais nítidas do que técnicas clássicas utilizadas, como a bilinear e a cúbica, bem como outras técnicas baseadas em *wavelets*, com sensível melhora da imagem interpolada tanto na razão sinal-ruído de pico (PSNR) quanto subjetivamente. Exemplos ilustram o desempenho e a eficiência do algoritmo.

1. INTRODUÇÃO

O processo de conversão de uma frequência de amostragem para uma frequência de amostragem maior é denominado *interpolação*, que corresponde à criação de novas amostras a partir de um conjunto inicial de amostras [1]. No caso particular de imagens, a interpolação tem diversas aplicações, especificamente na adequação de imagens a variados suportes.

Há vários métodos de interpolação usados para imagens, como interpolação bilinear, cúbica e *splines*. Contudo, tais técnicas, em sua maioria, operam no domínio espacial, o que torna seu desempenho totalmente dependente da imagem a ser interpolada. Além disso, tais métodos assumem a continuidade do sinal a ser interpolado e de suas derivadas. Tais considerações não são verdadeiras para imagens tomadas de cenas reais, que em sua maioria apresentam variações bruscas de luminância nos limites dos objetos. Imposições de continuidade na imagem e em suas derivadas produzem imagens interpoladas com bordas excessivamente suavizadas, pois tal suposição conduz a bordas e/ou texturas borradas, provocando certo desconforto visual.

A implementação da transformada discreta de Fourier (DFT) através de algoritmos computacionalmente eficientes, como a

transformada rápida de Fourier (FFT), sugere a utilização dessa poderosa ferramenta na aplicação de interpolação. Todavia, tal método introduz erros nos extremos da seqüência a ser interpolada, exigindo otimização nesse sentido [2].

Rabiner e Gold [2] consideraram a utilização da DFT (FFT) na interpolação de sinais. Fraser [3] sugeriu sutis modificações na interpolação através da FFT, em relação à linear e à cúbica, no tocante ao erro de interpolação. Além disso, verificou que o erro de interpolação é crescente do centro para os extremos da seqüência de amostras. Cardoso [4] propôs a utilização de algoritmos genéticos ao problema da otimização de filtros bidimensionais não-lineares, baseados em redes neurais artificiais, para interpolação de imagens. Tal técnica, porém, não apresenta desempenho ótimo no tratamento de bordas, sendo dependente da imagem a ser interpolada. Carey *et al.* [5] propuseram um método de interpolação baseado em *wavelets* que não impõe limitação de continuidade, medindo o decaimento dos coeficientes *wavelet* em múltiplas escalas e preservando a regularidade de tais coeficientes para a determinação de componentes utilizados na interpolação. Todavia, a técnica depende da existência de bordas horizontais e verticais bem definidas, o que nem sempre é verdadeiro, além de representar de forma pouco apropriada regiões correspondentes a bordas.

Este artigo apresenta um método de interpolação de imagens também baseado na estimação do decaimento dos coeficientes *wavelet*, que aproveita o potencial dessa transformação em representar um sinal em várias escalas e resoluções. O algoritmo produz bordas mais agudas do que outras técnicas baseadas em *wavelets*, pois preserva a regularidade de regiões bidimensionais de pontos de borda [6]: a caracterização de pontos de alta frequência é mais cuidadosa, o que produz melhora tanto na razão sinal-ruído de pico (PSNR) quanto em termos subjetivos.

A Seção 2 apresenta a transformada *wavelet* não-dizimada [7,8], usada no banco de filtros *wavelet* por se tratar de uma versão que mantém o suporte espacial do sinal de entrada. A Seção 3 apresenta o conceito de regularidade de Hölder, caso geral do conceito de continuidade de Lipschitz [9], e sua aplicação à transformada *wavelet* não-dizimada, explorando a correlação entre sub-bandas como motivação para a proposição do algoritmo de interpolação. A Seção 4 apresenta o algoritmo em etapas, construído segundo as propriedades apresentadas na Seção 3. A Seção 5 ilustra alguns resultados obtidos, comparativamente a métodos clássicos e ao método descrito em [5]. Por fim, a Seção 6 apresenta as conclusões deste artigo.

2. A TRANSFORMADA WAVELET NÃO-DIZIMADA

A transformada *wavelet* não-dizimada (TWND) [7] é útil na decomposição *wavelet* de sinais quando se deseja manter a escala. Sua implementação se faz pela utilização de filtros *wavelet* com intercalação de zeros, a cada nível, nos coeficientes das respostas ao impulso dos filtros, como ilustra a Fig. 1. $H(z)$ e $G(z)$ são, respectivamente, funções de transferência no domínio da transformada Z dos filtros passa-baixas e passa-altas.

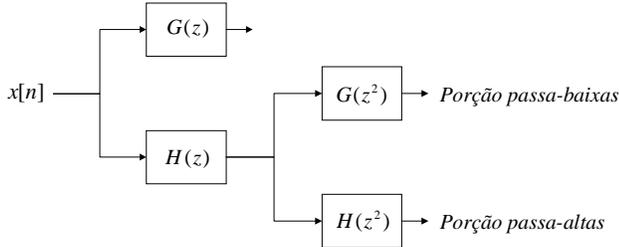


Fig. 1 - Banco de filtros *wavelet* não-dizimado.

3. REGULARIDADE DE HÖLDER

A transformada *wavelet* fornece um meio pelo qual a suavidade local de um sinal pode ser quantificada. Do ponto de vista matemático, a suavidade é representada pela taxa de decaimento dos coeficientes *wavelet* em sucessivas escalas de decomposição do sinal, que pode ser analisada pela observação da regularidade (caso geral da propriedade de continuidade de Lipschitz [9]). As seções seguintes apresentam o conceito de regularidade de Hölder e sua relação com a transformada *wavelet*, para a qual é dada ênfase à característica de correlação entre as sub-bandas como a principal motivação ao algoritmo proposto.

3.1 Regularidade e wavelets

A regularidade local de uma função $f(x)$ em um ponto a pode ser analisada segundo a noção de continuidade de Lipschitz [9]: uma função $f(x)$ é dita r -Lipschitz em a , $0 \leq r < 1$, se

$$|f(x) - f(a)| \leq K|x - a|^r \quad (1)$$

onde K é uma constante arbitrária. Uma descontinuidade em degrau, por exemplo, possui expoente de Lipschitz $r=0$. A consideração $r > 1$ é possível se a Eq. (1) for satisfeita para derivadas de ordem mais alta.

As seguintes condições valem para o comportamento local de coeficientes *wavelet* próximos a um ponto r -Lipschitz [9]: se $f(x)$ é r -Lipschitz em $x=a$, $r < N$ e $\psi(x)$ possui pelo menos N momentos desvanescentes, então

$$\max_{(j,k) \in A} |\Psi_{j,k}| \leq K.2^{-j(r+\frac{1}{2})} \quad (2)$$

onde A contém os pares (j,k) para os quais a pertença ao suporte de $\psi_{j,k}(x)$. A Fig. 2 ilustra tal comportamento próximo a uma descontinuidade em degrau ($r=0$).

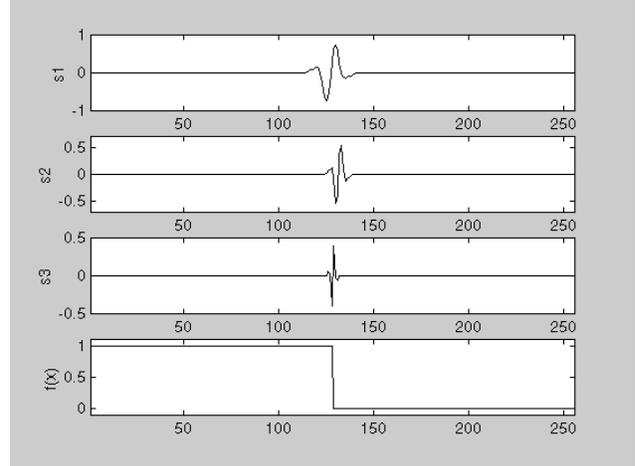


Fig. 2 - Diferentes escalas s_n da transformada *wavelet* de uma borda em degrau.

Uma extensão do conceito de continuidade de Lipschitz ($r > 1$) é feita requerendo que a Eq. (1) seja satisfeita para $f(x)$ e suas derivadas de n -ésima ordem. Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui regularidade de Hölder (ou expoente Hölder) $\alpha = n+r$ com $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < 1$ se existe uma constante $K < \infty$ tal que

$$|f^{<n>}(y) - f^{<n>}(x)| \leq K|y - x|^r \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

onde $f^{<n>}$ indica a derivada de n -ésima ordem de f , e r corresponde ao expoente de Lipschitz [9].

O expoente de Hölder indica, assim, o número de derivadas contínuas de uma função. Funções com valores grandes de expoente de Hölder são matemática e visualmente suaves, enquanto que funções com valores pequenos de expoente de Hölder são associadas a funções mais irregulares [10].

3.2 Estimação da Regularidade de Hölder

A transformada *wavelet* não-dizimada é um eficiente meio para medir a suavidade de uma função, permitindo sintetizar um sinal $f(x)$ através de operações de translações e dilatações de uma função *wavelet* “mãe” $\psi(x)$. Assim seja a *wavelet*

$$\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k). \quad (4)$$

Um sinal apresenta expoente de Hölder r se existe uma constante K tal que os coeficientes da transformada *wavelet* $\Psi_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ satisfaçam

$$|\Psi_{j,k}| \leq K.2^{-k(r+\frac{1}{2})} \quad (5)$$

para todos $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{R}$ [5,6,9,10]. Esse teorema caracteriza a regularidade de uma função pelo decaimento da magnitude dos coeficientes de sua transformada *wavelet* através das sucessivas escalas de decomposição, podendo ser utilizado para explicar as similaridades entre escalas decorrentes do processamento multi-resolução.

3.3 Correlação entre escalas

Pesquisas em análise multi-resolução de imagens têm indicado a presença de características similares em forma, porém distintas em suporte espacial para escalas diversas [5,10,11]. Funções mais suaves exibem maior similaridade entre escalas, que pode ser matematicamente definida pelo teorema do decaimento da Eq. (5). Pode-se mostrar que a correlação entre sub-bandas *wavelet* s_m e s_n para as escalas 2^m e 2^n é limitada por

$$|\langle s_m, s_n \rangle| \leq K \cdot 2^{-(m+n)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \quad (6)$$

onde K é uma constante e α é o expoente de Hölder. Tal inequação indica que a similaridade entre as escalas decresce exponencialmente à medida que a regularidade da função analisada cresce, observação que tem sido corroborada por dados experimentais e por outros trabalhos [5,10].

A regularidade de Hölder mostra-se, portanto, uma poderosa ferramenta matemática para a análise de sinais correlacionados, o que sugere seu uso na estimação de pontos ausentes em imagens interpoladas. Com base nessa observação, a Seção 4 apresenta um algoritmo que analisa o comportamento para diferentes escalas da decomposição *wavelet* de um sinal, estimando novos coeficientes em escalas menores [6].

4. INTERPOLAÇÃO POR PRESERVAÇÃO DE REGULARIDADE DE HÖLDER

A interpolação envolve um problema de escala, sendo sugestiva a utilização de análise multi-resolução [6]. A idéia mais trivial de interpolação de imagens no domínio das *wavelets* é considerar a imagem a ser interpolada como um sinal correspondente a baixas frequências da imagem interpolada, ou seja, considerar os filtros de um estágio de reconstrução *wavelet* como filtros interpoladores. Todavia, essa não é uma consideração realista, já que o conteúdo em frequência da imagem a ser interpolada possui também componentes de altas frequências [6].

Métodos tradicionais de interpolação de imagens levam em consideração fatores acerca da natureza das imagens que usualmente não são verdadeiros na prática. A interpolação bilinear impõe continuidade [1], a interpolação cúbica assume continuidade tanto da imagem quanto de suas duas primeiras derivadas, e assim por diante. Uma vez que imagens de cenas naturais consistem de seções suaves unidas por descontinuidades abruptas nos limites dos objetos (bordas), tais algoritmos de interpolação não são realísticos. Na prática, a consideração de que a imagem a ser interpolada é uma função contínua em derivadas de alta-ordem conduz a bordas e texturas suavizadas e/ou borradas. Essa variação na suavidade visual é imediatamente notada e provoca um certo desconforto ao observador. Para contornar tais problemas, propõe-se um método de interpolação por preservação da regularidade, que sintetiza uma nova sub-banda *wavelet* baseada no decaimento da magnitude dos coeficientes conhecidos da transformada *wavelet* da imagem.

A suposição mais geral é considerar a imagem original como uma imagem processada por um filtro passa-baixas qualquer, seguida por uma operação de dizimação por um fator 2 (reamostragem com metade da taxa), como ilustrado na Fig. 3.

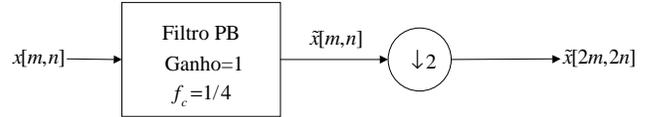


Fig. 3 - Diagrama em blocos de um sistema genérico para redução de taxa de amostragem por um fator 2.

A imagem original é considerada, então, como entrada de um estágio de reconstrução *wavelet*, juntamente com as sub-bandas de altas frequências (que serão estimadas), para assim recompor a imagem interpolada por um fator 2. A estimativa dessas sub-bandas é então a chave para a estratégia de interpolação. O sistema completo é ilustrado na Fig. 4, e detalhado nas sub-seções seguintes. Trata-se de um sistema unidimensional, operando inicialmente sobre linhas, e a seguir sobre colunas.

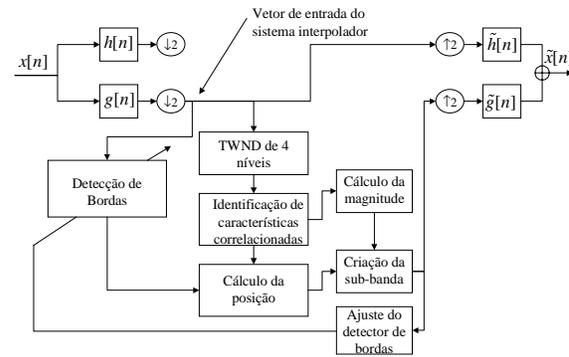


Fig. 4 - Diagrama em blocos do sistema interpolador proposto.

4.1 Detecção de bordas em multi-escala

Seja uma função de alisamento $\theta(x) \neq \phi(x)$, tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) dx = 1$, $\theta(x) = \theta(-x)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0$, se sua primeira derivada existe, logo é uma *wavelet* [9,10]:

$$\Psi^1(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (7)$$

Se tal *wavelet* for usada para computar a transformada *wavelet* de alguma função $f(x)$, observando que $\Psi_a(x) = a^{-1}\Psi(x/a)$, pode-se escrever [10]:

$$\Psi_{fa}^1(x) = f(x) * \Psi_a^1(x) = f(x) * \left(a \frac{d\theta_a(x)}{dx}\right) = a \frac{d(f(x) * \theta_a(x))}{dx} \quad (8)$$

Assim, a transformada *wavelet* equívale à primeira derivada do sinal suavizado em uma escala a . Os máximos locais de $\Psi_{fa}^1(x)$ são pontos de inflexão de $f(x) * \theta_a(x)$. Se $\theta(x)$ é uma função gaussiana, a detecção de extremos é equívale à detecção de bordas de Canny [12]. Desta forma, a detecção de bordas consiste em se realizar uma binarização na transformada *wavelet* calculada sobre a imagem, cuja função de base *wavelet* utilizada é escolhida como igual à primeira derivada (gradiente) de $\theta(x)$,

podendo ser ajustada pela manipulação dos parâmetros característicos de suavização (suporte espacial e desvio padrão da máscara gaussiana utilizada) e de binarização (limiar de decisão λ), permitindo a inserção de mais ou menos pontos de borda [6].

4.2 Cálculo da TW não-dizimada

A imagem de bordas encontrada no passo anterior é definida como um protótipo de pontos de altas frequências, e armazenada para processamento posterior. Determinam-se agora os coeficientes *wavelet* de cada linha (ou coluna) da imagem a ser interpolada, gerando sub-bandas *wavelet* de altas frequências s_1, s_2, \dots, s_L , da escala mais grosseira para a mais fina. A transformada *wavelet* utilizada é da forma não-dizimada, de modo que o sinal na saída de cada filtro possui o mesmo número de amostras do que o sinal de entrada [7,9]. Com adequada amostragem, é possível chegar ao resultado da TW convencional a partir da TW não-dizimada [6].

4.3 Seleção dos pontos de bordas

Técnicas de interpolação por preservação de regularidade conhecidas [5] analisam a convergência de máximos locais de sucessivas escalas para pontos de bordas individuais. Tal procedimento não conduz a uma estimação completa de características de altas frequências, já que podem ser desprezados pontos na vizinhança das bordas que também correspondam a características importantes de alta frequência. O mecanismo de seleção de bordas aqui proposto identifica características bem definidas (regiões abrangendo máximos locais situadas entre cruzamentos por zero [6]), verificando se os pontos de borda e adjacentes convergem para características correlacionadas, ou seja, a convergência é verificada não somente para máximos locais em múltiplas escalas, como também para seus adjacentes. Assim, são preservados todos os pontos para os quais um conjunto de características correlacionadas através das escalas converjam espacialmente, da escala s_1 para a escala s_L , com decaimento das magnitudes dos coeficientes seguindo a Eq. (5).

4.4 Extrapolação de sub-bandas via regularidade

Para os pontos de bordas mantidos, as características (porção entre dois cruzamentos por zero) da sub-banda s_{L-1} são utilizadas como protótipo na estimação de características da nova sub-banda s_{L+1} . Tal como em [5], a sub-banda s_{L-1} é escolhida porque as características da sub-banda s_L são bastante degradadas por ruído, já que esta corresponde à saída do filtro de mais alta frequência no banco de filtros de análise. A sub-banda s_{L-1} é também preferível às de escalas mais grosseiras por possuir características bem localizadas, pois correspondem a uma única borda. Características nas demais sub-bandas possuem amplo suporte espacial, correspondendo a várias bordas. Neste artigo, são considerados 3 níveis de transformação ($L=3$), tomando-se a sub-banda s_3 como modelo. Todavia, ao contrário do método de Carey [5], a convergência de características não se restringe apenas a apontar um único ponto de bordas, mas o que se denomina aqui de uma *região de bordas* (ponto de bordas e seus adjacentes), ou seja, se há uma série de características que

convergem em diversas escalas para uma região de bordas (e não apenas para um único ponto de bordas), será sintetizada uma característica na sub-banda s_{L+1} : ao invés de se copiar e escalar apropriadamente (em seu suporte espacial) uma sub-banda já existente [5], a idéia para a criação da nova sub-banda consiste em se extrapolar de forma geométrica características de sub-bandas mais grosseiras que converjam para uma região de bordas (Fig.5). Ainda que a detecção de bordas em multi-escala de Mallat [10] seja eficiente, é falso afirmar que uma borda se caracteriza completamente por um único ponto, o que sugere a utilização de uma região de pontos adjacentes a ela.

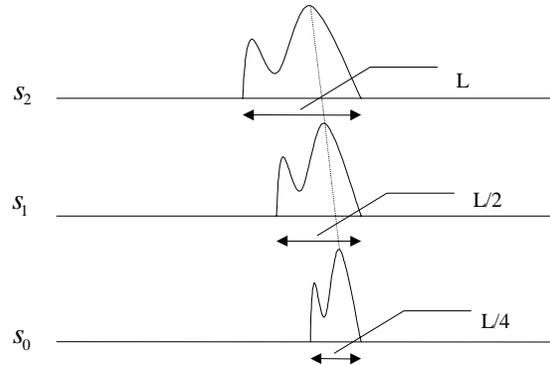


Fig. 5 - Transporte de características correlacionadas e convergentes a uma região de bordas.

4.5 Extrapolação das magnitudes dos coeficientes

Para cada característica extrapolada para o nível de resolução $L+1$, deve haver um ajuste de magnitude. A magnitude da nova característica é escolhida de modo a satisfazer o limite na Eq. (5). Carey *et al.* [5] propõem a estimação da taxa de decaimento da magnitude, através de um ajuste via mínimos quadrados dos logaritmos das magnitudes dos coeficientes. Todavia, desde que o limite na Eq. (5) não seja violado, escolhe-se o valor de magnitude que mais se aproxime do valor correspondente na característica extrapolada na etapa anterior.

4.6 Criação da sub-banda

A nova sub-banda estimada corresponde, assim, à entrada de um estágio de síntese juntamente com cada linha do sinal original analisado na entrada, o que conduz a um sinal interpolado com o dobro da dimensão do sinal de entrada. Uma nova imagem de bordas é determinada e o processo se repete, tomando-se como elementos de entrada as colunas. Ao final, tem-se uma imagem resultante com dimensão 2 vezes maior do que a imagem inicial.

4.7 Ajuste na detecção de bordas

Nessa etapa, são feitos ajustes nos parâmetros de detecção de bordas, de forma a privilegiar mais pontos de bordas, garantindo mais características correlacionadas convergentes.

A próxima seção ilustra os resultados obtidos para o método de interpolação proposto, comparativamente a métodos clássicos de interpolação de imagens e a métodos baseados em *wavelets*, ratificando o bom desempenho buscado pelo algoritmo.

5. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O algoritmo de interpolação foi implementado em MATLAB 5.2 sob Windows 98, utilizando-se a família de *wavelets* 'biortogonal 9-7' [13], sendo aplicado a imagens clássicas e os resultados obtidos comparados quantitativa e subjetivamente aos métodos de interpolação por transformada de Fourier discreta (via FFT), bilinear, cúbica e ao método proposto por Carey [5]. O parâmetro de comparação objetiva é a razão sinal-ruído de pico (PSNR).

A primeira imagem testada foi a "Lenna", com dimensão 256×256 pixels. É efetuada uma filtragem passa-baixas (PB) com frequência normalizada de corte igual a 0,25, ganho na banda passante igual a 1 e ganho na banda de rejeição igual a zero, com banda de transição conformada por uma função gaussiana de desvio padrão igual a 1 (Fig. 6). Após filtrada, a imagem é dizimada por um fator 2 e interpolada.

Na etapa seguinte (detecção de bordas em multi-escala), utilizou-se o método de detecção de bordas de Canny [12]. A função gaussiana usada na detecção de bordas foi ajustada com desvio padrão igual a 1 e suporte de dimensão 10×10 pixels.

A etapa seguinte consiste na verificação de características das sub-bandas de altas frequências (em linhas e colunas) que converjam para pontos de bordas. A Fig. 7 ilustra uma composição dos pontos de bordas horizontais e verticais obtidos após a verificação de convergência.

Definidos os pontos de bordas importantes e repetido o esquema para as colunas, é obtida a imagem interpolada. A Fig. 8 mostra uma parte do rosto da imagem "Lenna" obtido por interpolação, usando três métodos clássicos e o método proposto. A Tabela 1 mostra os valores de PSNR obtidos.

A substituição do filtro PB geral pelo filtro PB *wavelet* de análise produz sensível melhora no resultado. Os resultados são ilustrados na Fig. 9. A Tabela 2 apresenta os valores de PSNR para o método proposto, comparativamente a outros métodos. O valor obtido para o método proposto por Carey foi extraído de [5], não sendo possível ilustrar os resultados gráficos para esse caso.

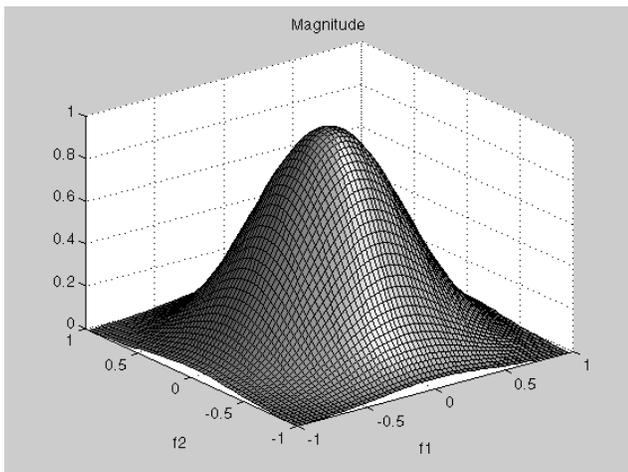


Fig. 6 - Resposta em frequência do filtro PB anterior ao processo de interpolação.



Fig. 7 - Imagens de bordas: (a) anterior à verificação de convergência; (b) após a verificação de convergência.

Tabela 1 - Valores de PSNR para a "Lenna".

Método	PSNR (dB)
FFT	28,0866
Bilinear	27,4465
Cúbica	27,8819
Wavelet com ajuste de bordas	28,2206

Tabela 2 - Valores de PSNR para a "Lenna" (degradação - filtro PB *wavelet*).

Método	PSNR (dB)
FFT	28,7163
Bilinear	28,8046
Cúbica	29,4288
Carey [5]	31,7
Wavelet com ajuste de bordas	36,758

Como se observa, o método proposto preserva altas frequências de forma mais eficiente do que os demais: há uma melhora significativa tanto na PSNR quanto subjetivamente, já que na imagem "Lenna" há mais bordas de objetos do que de textura. O mesmo algoritmo é aplicado a três outras imagens ("Baboom", "Peppers" e "Couple"), algumas mais ricas em bordas de áreas texturizadas. A Tabela 3 mostra os valores de PSNR obtidos para os métodos comparados. A melhora não é evidente, pois bordas texturizadas não são privilegiadas pelo método proposto.

Tabela 3 - Valores de PSNR para as imagens "Baboom", "Peppers" e "Couple" (degradação - filtro PB *wavelet*).

Imagem	Bil.	Cub.	FFT	Carey [5]	Proposta
Baboom	24,48	24,76	24,96	25,1	26,08
Peppers	28,54	29,52	28,75	31,2	36,78
Couple	29,29	29,48	29,10	29,6	31,92

6. CONCLUSÕES

O método de interpolação proposto explora a preservação de uma característica importante da transformada *wavelet*, a regularidade. Através dela, estima-se o comportamento de componentes de altas frequências, criando-se novas sub-bandas *wavelet* através da extrapolação do decaimento dos coeficientes. As novas sub-bandas são usadas em conjunto com a imagem inicial para construir uma imagem interpolada.

O algoritmo proposto preserva a regularidade local da imagem original, evitando problemas de excessiva suavização associada a outros métodos. Além disso, apresenta modificações substanciais sobre outras técnicas que também fazem uso da regularidade [5], representando com mais propriedade características de altas frequências necessárias à síntese *wavelet*.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete-time Signal Processing*, Prentice-Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs, 1989.
- [2] L. R. Rabiner and B. Gold. *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, 1975.
- [3] D. Fraser. "Comparison at High Spatial Frequencies of Two-Pass and One-Pass Geometric Transformation Algorithms," *CVGIP*, Vol. 46, No.3, pp.267-283, 1989.
- [4] F. Cardoso. *Algoritmos Genéticos para Interpolação Não-Linear de Imagem e Decodificação de Códigos Lineares*. Campinas, 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação - Universidade Estadual de Campinas.
- [5] W. K. Carey, D. B. Chuang and S. S. Hemami. "Regularity-Preserving Image Interpolation," *International Conference on Image Processing*, 1997.
- [6] S. R. M. Penedo. *Interpolação de imagens através da análise de regularidade baseada em decomposição wavelet*. Florianópolis, 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - LINSE - Universidade Federal de Santa Catarina.
- [7] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics (SIAM)*, Vol. 61, Philadelphia, 1992.
- [8] S. Mallat. "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, pp.674-693, 1989.
- [9] M. F. Cohen, T. D. DeRose, A. Fournier, M. Lounsbery, L. M. Reissell, P. Schröder and W. Sweldens. "Wavelets and their Applications in Computer Graphics," *Siggraph '95 Notes*, 1995.
- [10] S. Mallat and S. Zhong. "Characterization of Signals from Multiscale Edges," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 14, No. 7, pp. 710-732, 1992.
- [11] A. Witkin. "Scale Space Filtering," *Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 1019-1021, 1983.
- [12] J. F. Canny. "A computational approach to edge detection," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 8, pp. 679-698, 1986.
- [13] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu and I. Daubechies. "Image Coding Using Wavelet Transform," *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 1, pp. 205-220, Apr. 1992.

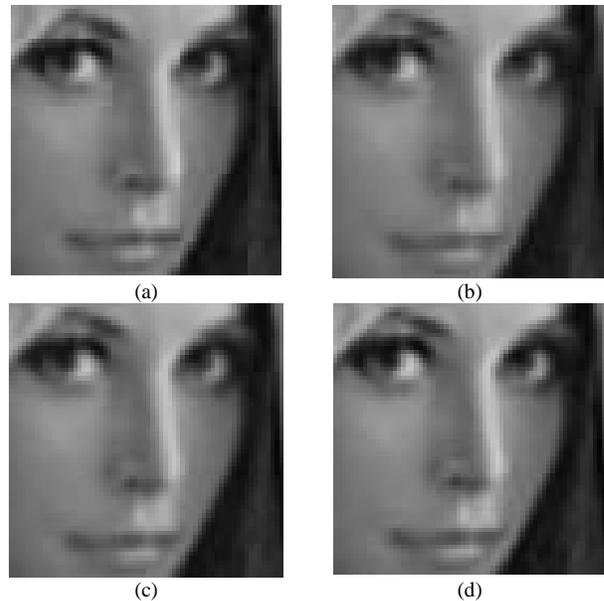


Fig. 7 - Imagens interpoladas - detalhe (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) método proposto.

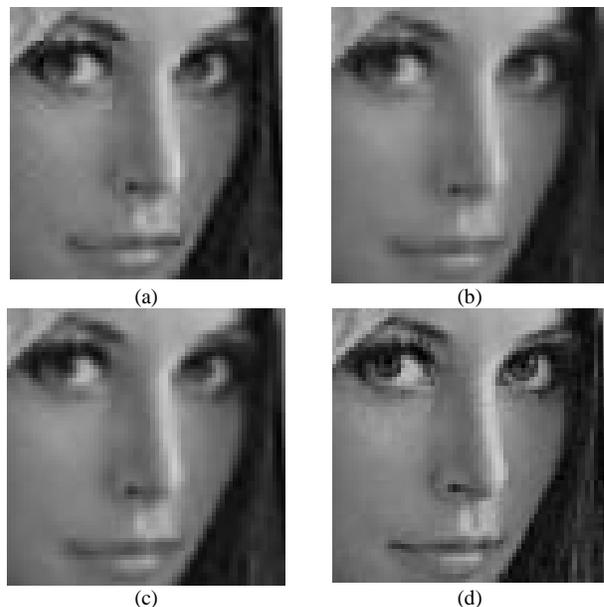


Fig. 8 - Imagens interpoladas (degradação - filtro PB wavelet). (a) Interpolação via FFT; (b) bilinear; (c) cúbica; (d) método proposto.