

# USO DO MÉTODO VBPM-FE NA ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DO FEIXE ÓPTICO EM FIBRAS ALTAMENTE BIRREFRINGENTE

Helder Fleury. Pinheiro<sup>1</sup>, Andrés Pablo López Barbero<sup>2</sup>, e Hugo Enrique Hernández-Figueroa<sup>3</sup>

## RESUMO

Utilizamos a técnica numérica vetorial VBPM-FE na simulação da propagação do feixe óptico em fibras altamente birrefringentes. Esta formulação, baseada em elementos finitos, resolve a equação de onda vetorial escrita em termos das componentes transversais do campo magnético. Os modos espúrios são suprimidos por causa da inclusão implícita do divergente do campo magnético. Leva-se em conta a natureza vetorial dos campos, logo, considera-se o acoplamento das componentes de campo e a influência do material e da geometria sobre a polarização. Os resultados mostraram boa concordância com dados experimentais.

## 1. INTRODUÇÃO

O método da propagação do feixe (BPM) é uma das técnicas numéricas mais difundidas para simular a propagação dos campos eletromagnéticos em fibras e em guias aplicados em óptica integrada. As formulações vetoriais são essenciais pois consideram a natureza vetorial das ondas eletromagnéticas, permitindo assim, levar em conta o acoplamento mútuo e a dependência da polarização devido ao material e aos efeitos geométricos. Aproximações vetoriais e semi-vetoriais foram desenvolvidas utilizando o esquema das diferenças finitas ou a transformada de Fourier[1]-[4]. Recentemente Zoboli et al. [5] apresentaram um propagador vetorial baseado no método dos elementos finitos para meios isotrópicos. Eles consideraram elementos nodais e as três componentes do campo magnético  $\mathbf{h}$ .

O método VBPM-FE é baseado na técnica nodal dos elementos finitos e utiliza o esquema de diferenças finitas Crank-Nicholson para fazer a propagação do feixe. Esta técnica foi desenvolvida a partir da equação de onda vetorial escrita em termos das componentes transversais  $h_x$  e  $h_y$  do campo magnético  $\mathbf{h}$  através da inclusão implícita da condição do divergente igual a zero, que também garante a eliminação dos modos espúrios. Com a eliminação da componente axial  $h_z$  reduziu-se substancialmente o esforço computacional, uma vez que, as dimensões das matrizes do sistema matricial, resultante da aplicação da técnica aqui apresentada, ficam reduzidas de aproximadamente 44% com a relação à técnica FE-VBPM que também emprega elementos nodais mas que apresenta as três componentes do campo  $\mathbf{h}$  [5]. Além de utilizar malhas amplamente não uniformes que permitem concentrar elementos em regiões de maior interesse, a formulação

foi<sup>1</sup> enriquecida pelo uso de programas otimizados para o tratamento das matrizes esparsas resultantes da aplicação do método dos elementos finitos.

A formulação VBPM-FE permite analisar a propagação do feixe óptico em guias de ondas dielétricos constituídos por materiais isotrópicos e/ou anisotrópicos. O tensor permissividade foi definido variando arbitrariamente ao longo da seção transversal do guia de onda e com elementos fora da diagonal, mais especificamente,  $\mathcal{E}_{xy}$  e  $\mathcal{E}_{yx}$ . Daí pode-se também analisar guias de ondas com eixos ópticos desalinhados.

Para demonstrar a validade e a estabilidade do método FE-VBPM, analisamos diversas estruturas [6], [10]. Neste trabalho demonstramos a eficiência do método na análise da propagação do feixe óptico em uma fibra de alta birrefringência com eixos ópticos desalinhados.

## 2. FORMULAÇÃO

A formulação utilizada resolve a seguinte equação de onda vetorial escrita em termos das componentes transversais do campo magnético  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{k}}_{0t} \nabla_t \times \left( \nabla_t \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) + \tilde{\mathbf{k}}_{1t} \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial z} \mathbf{u}_z +$$

$$\nabla_t \times \tilde{\mathbf{k}}_{zz} \nabla_t \times \mathbf{h}_t + \mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{k}}_{2t} \nabla_t \times (\nabla_t \cdot \mathbf{h}_t \mathbf{u}_z) -$$

$$\left( \mathbf{k}_0^2 + \gamma \tilde{\mathbf{k}}_{3t} \right) \mathbf{h}_t = \mathbf{0} \quad (1)$$

O tensor  $\tilde{\varepsilon}_t^{-1}$  é um tensor arbitrário 2x2 dado por:

<sup>1</sup> Universidade Federal do Paraná, Centro Politécnico, Departamento de Eletricidade, Jardim das Américas, Curitiba-PR, Brasil Tel. 41- 3613222, Fax 3613228, hfp@eletr.ufpr.br

<sup>2</sup> Departamento de Telecomunicações, Universidade Federal Fluminense, Rua Passos da Pátria, 156, Niterói, RJ- Brasil, CEP 24240-000

<sup>3</sup> Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Dep. de Microondas e Óptica, Av. Albert Einstein, N<sup>o</sup> 400, 13083-970, Campinas-SP, Brasil, Tel. 19-7883735

$$\tilde{\mathcal{E}}_t = \varepsilon_{xx} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \varepsilon_{xy} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \varepsilon_{yx} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \varepsilon_{yy} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y$$

O campo magnético  $\mathbf{H}$  foi descrito por:  $\mathbf{h}(x,y,z) = h_t \mathbf{u}_t + h_z \mathbf{u}_z$ , em que  $\beta_z$  é a constante de propagação de referência e  $\mathbf{h}(x,y,z)$  é a componente lenta (envoltória) da onda propagante e, naturalmente  $e^{-jk_0 \beta_z z}$  é a componente rápida desta onda. Aplicando a aproximação paraxial, os seguintes termos são desprezados:  $\partial \mathbf{h}_t^2 / \partial^2 z$  and  $\partial h_z^2 / \partial^2 z$ . Em adição, podemos desprezar a variação da componente axial com relação a direção  $z$ , ou seja, fazer  $\partial h_z / \partial z = 0$  pois esta variação é muito menor que a variação das componentes transversais com relação a direção  $z$  dada por:  $\partial \mathbf{h}_t / \partial z$ . Os demais parâmetros são dados por:

Aplicando o método de Galerkin [11] na equação (1) obtém-se a seguinte equação integral equivalente:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left( \nabla_t \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) (\nabla_t \times \tilde{\mathbf{k}}_{ot} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{w}_t)) d\Omega - \\ & \oint_{\partial\Omega} \left( \nabla_t \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial z} \right) (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{k}}_{ot} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{w}_t)) \mathbf{n} \cdot d\ell + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{k}}_{it} \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial z} \cdot \mathbf{w}_t d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{k}_z (\nabla_t \times \mathbf{h}_t) (\nabla_t \times \mathbf{w}_t) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{k}_z (\nabla_t \times \mathbf{h}_t) (\mathbf{w}_t \times \mathbf{n}) d\ell - \\ & \int_{\Omega} \left( \nabla_t \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) (\nabla_t \times \tilde{\mathbf{k}}_{2t} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{w}_t)) d\Omega - \\ & - \oint_{\partial\Omega} \left( \nabla_t \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial z} \right) (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{k}}_{2t} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{w}_t)) \mathbf{n} \cdot d\ell + \\ & \int_{\Omega} (\mathbf{k}_0^2 + \gamma^2 \tilde{\mathbf{k}}_{3t}) \mathbf{h}_t \cdot \mathbf{w}_t d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$\forall \mathbf{w}_t$  e  $\mathbf{h}_t \in \mathbf{h}^{(1)}(\Omega)$ , na qual  $\Omega$  representa o domínio da seção transversal do guia de onda,  $\mathbf{h}^{(1)}(\Omega)$  é um subespaço do espaço de Hilbert  $\mathbf{h}^{(2)}(\Omega)$ , cujas funções-elementos e suas primeiras e segundas derivadas pertencem ao espaço de funções integráveis no sentido de Lebesgue:  $\mathfrak{S}^2(\Omega)$  e  $\partial\Omega$  são os contornos dos elementos pertencentes aos diferentes materiais e às paredes artificiais que limitam o domínio computacional que no caso são paredes elétricas perfeitas ou magnéticas (PECs ou PMCs). A contribuição da segunda integral de linha da equação (2) é nula para o interior do domínio e quando  $\partial\Omega$  coincide com paredes elétricas perfeitas (PECs) ou paredes magnéticas perfeitas (PMCs). Nota-se também que as contribuições da primeira e da

terceira integrais de linha da equação (2) são também nulas quando  $\partial\Omega$  coincide com PMCs. Já quando  $\partial\Omega$  coincide com PECs, estas integrais somente anulam-se quando o dielétrico que faz fronteira com o PEC for diagonalmente anisotrópico. Nas demais situações as integrais possuem contribuições não desprezíveis e devem ser computadas. Nota-se que ao fazer  $\partial/\partial z = 0$  na equação (2) chega-se a equação para a análise estática ou modal que pode ser reduzida pela aplicação do método dos elementos finito a um problema de autovalores, de fundamental importância para o traçado das características de dispersão, determinação da constante de fase de referência e distribuição de campo inicial para o esquema da propagação. Agora expandindo as funções  $\mathbf{h}_x(x,y,z)$  e  $\mathbf{h}_y(x,y,z)$  em termos das funções base  $\Psi_i(x,y)$ , com coeficientes de expansão  $\mathbf{h}_{xj}$  e  $\mathbf{h}_{yj}$ , que são os valores dos campos nos nós dos elementos, obtém-se um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas do tipo:

$$[\mathbf{A}] \frac{\partial}{\partial z} \{h_t\}(z) = [\mathbf{B}] \{h_t\}(z), \quad (3)$$

na qual  $[\mathbf{A}]$  e  $[\mathbf{B}]$  são matrizes esparsas, simétricas de ordem  $2n_p \times 2n_p$  e  $n_p$  o número de nós da malha. O vetor  $\{h_t\}(z)$  representa os valores das componentes transversais do campo magnético  $\mathbf{h}$  nos nós da malha. Finalmente para resolver a equação (3) aplicou-se o esquema Crank-Nicolson que é estável e não causa problemas de inconsistência de energia durante a propagação. Como resultado chega-se ao seguinte sistema de equações lineares algébricas:

$$([\mathbf{A}] - 0,5\Delta z [\mathbf{B}]) \{h_t\}_{[n]} = ([\mathbf{A}] + 0,5\Delta z [\mathbf{B}]) \{h_t\}_{[n-1]},$$

na qual  $\Delta z$  é o incremento em  $z$  dado para cada passo da propagação. Uma vez calculado  $\{h_t\}(z) = \begin{pmatrix} \{H_x\}(z) \\ \{H_y\}(z) \end{pmatrix}$ , obtém-se

$h_z$  recorrendo a relação do divergente do campo magnético  $\mathbf{h}$  igual a zero,  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ , donde tira-se que  $h_z = \left( \nabla_t \cdot \mathbf{h}_t + \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) / \gamma$ .

### 3. RESULTADOS

Consideramos o experimento mostrado em [12], onde uma fibra de alta birrefringência foi analisada através de um instrumento interferométrico com o objetivo de localizar os eixos principais de birrefringência sem precisar clivar a fibra. Quando uma fibra é lateralmente pressionada por uma força constante fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo lento, ocorre uma rotação dos eixos principais de birrefringência de um ângulo  $\alpha$  dado por:

$$\tan(2\alpha) = \frac{k \operatorname{sen}(2\theta)}{1 - k \operatorname{cos}(2\theta)} \quad (4),$$

e a amplitude da birrefringência resultante passa a ser igual a :

$$B_T = \sqrt{B_{\text{int}}^2 + B_{\text{ext}}^2 - 2B_{\text{in}}B_{\text{ext}} \cos 2\theta}$$

, na qual,  $k = \frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{in}}}$ ,  $B_{\text{ext}}$  é a birrefringência induzida pela aplicação da força externa  $\mathbf{F}$  e  $B_{\text{in}}$  é a birrefringência intrínseca da fibra definida por  $B_{\text{int}} = \beta_s - \beta_f = \frac{2\pi}{L_B}$ , na qual  $\beta_s$  e  $\beta_f$  são as constantes efetivas de propagação para os modos de polarização lento e rápido, e  $L_B$  é o comprimento de batimento dos mencionados modos. A Figura 1 mostra a força externa sendo aplicada a uma fibra de alta birrefringência provocando rotação dos eixos principais de polarização.

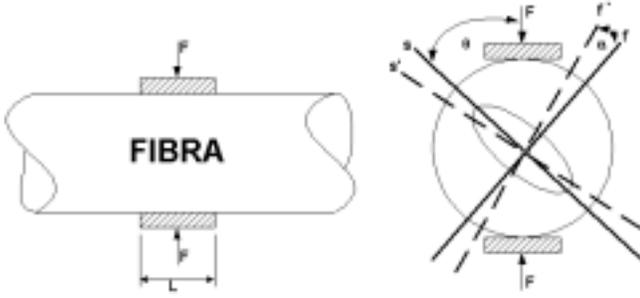


Figura 1 – Força externa sendo aplicada a uma fibra de alta birrefringência provocando rotação dos eixos principais de polarização.

A fibra de alta birrefringência possui raio igual a  $R = 1,1 \mu\text{m}$ , e termos do tensor permissividade relativa dados por:  $\epsilon_{xx}^{(0)} = 2,16$ ,  $\epsilon_{yy}^{(0)} = \epsilon_{zz}^{(0)} = 2,162099384$  para o núcleo e  $\epsilon_c = 2,1257$  para a casca [8]. O comprimento de onda foi centrado em  $\lambda = 0,829 \mu\text{m}$ , o incremento em z foi igual a  $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$ , e admitiu-se que a força  $\mathbf{F}$  aplicada corresponde a  $k \cong 0,17$ , que foi estimado em [12]. Primeiramente para simular a propagação do feixe óptico no trecho de fibra pressionada, calculou-se  $\alpha$  usando a relação (4) para diversos valores de  $\theta$ , e depois obteve-se os elementos do tensor permissividade através das equações :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}^{(0)} \cos^2 \alpha + \epsilon_{yy}^{(0)} \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{xx}^{(0)} \operatorname{cos}^2 \alpha + \epsilon_{yy}^{(0)} \operatorname{cos}^2 \alpha,$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{zz}^{(0)},$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = (\epsilon_{xx}^{(0)} - \epsilon_{yy}^{(0)}) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha,$$

sendo aqui,  $\epsilon_{xx}^{(0)}$ ,  $\epsilon_{yy}^{(0)}$ ,  $\epsilon_{zz}^{(0)}$  os índices de refração sem o efeito das tensões induzidas pela força  $\mathbf{F}$  para as direções x, y e z, respectivamente. A fibra foi excitada pelo modo de polarização fundamental  $HE_{11}^x$  e para cada valor de  $\theta$  a intensidade da componente  $h_x$ , referente ao modo de polarização  $HE_{11}^y$ , foi calculada depois que o feixe propagou-se pelo trecho da fibra pressionada pela força  $\mathbf{F}$ . A Figura 2 compara os resultados numéricos com os dados experimentais apresentados em [12] que foram obtidos através de um instrumento baseado em uma técnica interferométrica [13]

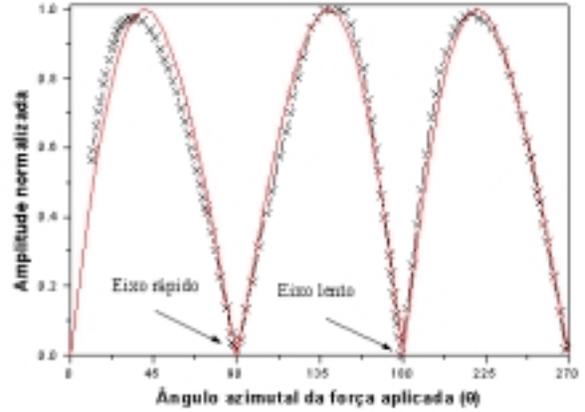


Figura 2 – Resultado da simulação referentes a localização dos eixos de birrefringência de uma fibra óptica. A linha sólida representa a curva obtida pela simulação numérica e a curva com x mostra os dados experimentais colhidos na literatura especializada [12].

Notamos uma concordância entre os valores obtidos através da simulação numérica e os dados experimentais. Melhores resultados podem ser obtidos através de cálculos mais precisos para  $k$  ou por meio de análises rigorosas levando em conta as variações sofridas pelo perfil do índice de refração devido às tensões induzidas pela força externa  $\mathbf{F}$  [12].

A Figura 3 mostra o processo cíclico da transferência de energia de uma componente do campo  $\mathbf{h}$  para outra considerando uma força externa  $\mathbf{F}$  aplicada segundo o ângulo  $\theta = 40^\circ$ .

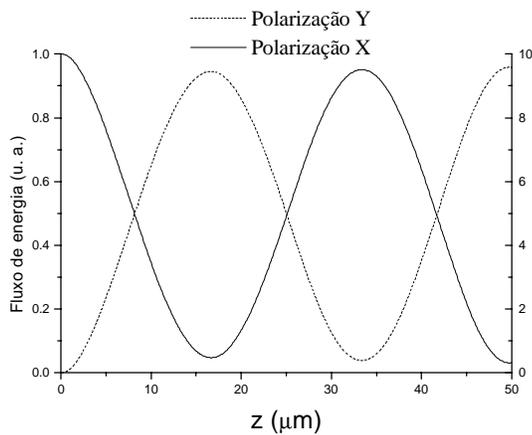


Figura 3- Transferência de energia entre as componentes transversais do campo  $\mathbf{h}$  para uma força externa aplicada com  $\theta = 40^\circ$

## CONCLUSÕES

A formulação FE-VBPM é utilizada para analisar a propagação em guias de ondas dielétricos anisotrópicos. Examinando os campos e traçando o estado de polarização da onda para uma fibra óptica altamente birrefringente, demonstramos que a formulação realmente leva em conta a natureza vetorial das ondas eletromagnéticas uma vez que considera a dependência da polarização com relação a geometria e ao material e o acoplamento das componentes de campo  $\mathbf{h}$  devido principalmente a anisotropia. Finalmente para demonstrar o rigor da formulação também para situações caracterizadas por um tensor permissividade com elementos fora da diagonal, analisamos uma fibra altamente birrefringente com rotação dos eixos principais de polarização provocada por uma força externa  $\mathbf{F}$  constante. Os resultados desta simulação apresentam boa concordância com dados experimentais presentes na literatura.

Os autores agradecem Sidney Luiz Alessi Carrara, Ph.D, pelas proveitosas discussões técnicas e incentivo, e ao CNPq e CAPES/PICDT/UFF pelo suporte financeiro

## REFERÊNCIAS

[1] P. L. Liu e B. J. Li. "Semivectorial beam-propagation method for analyzing polarized modes of rib waveguides", *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 28, pp.778-782, abril 1992.  
 [2] S. V. Polstyanko, R. Dyczij-Edlinger e J. F. Lee, "Full vectorial analysis of a nonlinear slab waveguide based on the nonlinear hybrid vector finite-element method", *Optics Letters*, vol. 21, pp. 98-100, janeiro 1996.

[3] M. Koshiba e Y. Tsuji, "A wide-angle finite-element beam propagation method", *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 8, pp. 1208-1210, setembro 1996.  
 [4] Y. Arai, A. Maruta, e M. Matsuhara, "Transparent boundary for the finite-element beam-propagation method", *Opt. Lett.*, vol.18, pp. 765-766, 1993.  
 [5] E. Montanari, S. Selleri, L. Vincetti e M. Zoboli, "Finite-Element Full-vectorial Propagation Analysis for Three-Dimensional z-Varying Optical Waveguide", *IEEE/OSA J. Lightwave Tech.*, Vol. 16, pp. 703-714, abril 1998.  
 [6] H. F. Pinheiro e H. E. Hernández-Figueroa, "Novel Finite-Element Formulation for Vectorial Propagation Analysis in Anisotropic Medium", Proceedings (CD-ROM) of the 1999 SBMO/IEEE, MTT-S, AP e LEOS International Microwave and Optoelectronics Conference, IMOC'99, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 558-562, 9-12, agosto 1999.  
 [7] H. F. Pinheiro e H. E. Hernández-Figueroa, "New Finite-Element Vectorial Formulation for Beam Propagation in Anisotropic Media", Proceeding of the OSA/Integrated Photonics Research Topic Meeting (IPR'99), Santa Barbara, California, USA, pp. 37-39, 19-21, julho 1999.  
 [8] H. F. Pinheiro e H. E. Hernández - Figueroa, "Novel Finite-Element Formulation for Vectorial Beam Propagation Analysis in Anisotropic Medium", aceito para publicação na revista IEEE Photonics Technol. Lett., 1999.  
 [9] H. F. Pinheiro e H. E. Hernández - Figueroa, "Full Vectorial FE-BPM Approach for the Analysis of Optical Axis Misalignment Effects", aceito em LEOS'99, IEEE Lasers and Electro-Optics Society Conference, San Francisco, California, USA.  
 [10] H. F. Pinheiro, A. P. Lópes Barbero e H. E. Hernández - Figueroa, "Full Vectorial FE-BPM Approach for the Analysis of Anisotropic Medium with off-diagonal Permittivity Terms", *Microwave and Optical Technology Letters*, Janeiro 2000.  
 [11] Jianming Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, New York: John Wiley and Sons, Janeiro. 1993.  
 [12] A. P. L. Barbero, "Sistema para Caracterização de Circuitos Ópticos a Fibras Altamente Birrefringentes", Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP, 1995.  
 [13] S. L. A. Carrara, B. Y. Kin e H. J. Shaw, "Elasto-Optic Alignment of Birefringent Axes in Polarization-Holding Optical Fiber", *Opt. Lett.*, Vol. 11, pp. 470-472, 1986.

